



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE – UERN

FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS – FANAT

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

VANDERSON CLEITON DE OLIVEIRA

FIGURA DE MÉRITO EM MODELOS
COSMOLÓGICOS

MOSSORÓ-RN
DEZEMBRO 2020

VANDERSON CLEITON DE OLIVEIRA

FIGURA DE MÉRITO EM MODELOS
COSMOLÓGICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade do Estado do Rio Grande do Norte como requisito parcial para a obtenção do grau de **mestre** em Física.

Orientador: Profa. Dra. Maria aldinêz Dantas

MOSSORÓ-RN
DEZEMBRO 2020

© Todos os direitos estão reservados a Universidade do Estado do Rio Grande do Norte. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do(a) autor(a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu(a) respectivo(a) autor(a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

Catálogo da Publicação na Fonte.
Universidade do Estado do Rio Grande do Norte.

O48f Oliveira, Vanderson Cleiton de
 Figura de Mérito em Modelos Cosmológicos. /
 Vanderson Cleiton de Oliveira. - Mossoró, 2020.
 74p.

Orientador(a): Profa. Dra. Maria aldinêz Dantas.
Dissertação (Mestrado em Programa de Pós-Graduação
em Física). Universidade do Estado do Rio Grande do Norte.

1. Programa de Pós-Graduação em Física. I. Dantas,
Maria aldinêz. II. Universidade do Estado do Rio Grande do
Norte. III. Título.

VANDERSON CLEITON DE OLIVEIRA

FIGURA DE MÉRITO EM MODELOS
COSMOLÓGICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade do Estado do Rio Grande do Norte como requisito parcial para a obtenção do grau de **mestre** em Física.

Aprovada em 23/12/2020

Banca Examinadora

Profa. Dra. Maria aldinêz Dantas

Orientadora

UERN

Prof. Dr. Mackson Matheus França Nepomuceno

Examinador interno

UERN/UFERSA

Prof. Dr. Aleksandro Pereira Lima.

Examinador externo

UFRN

Dedico este trabalho primeiramente a Deus e depois a
uma grande mulher na minha vida, minha v^o, uma
pessoa que deu seu m^áximo para educar e cuidar, que
sempre foi determinada em manter-nos em bom
caminho com muita luta e passando por todos os
obst^áculos complicados da vida, obrigado Clotilde por
todo seu amor.

AGRADECIMENTOS

- A Deus, pelo dom da vida;
- À toda minha família, mas em especial, à minha mãe maria verônica de oliveira, por todo o amor e dedicação;
- À minha esposa Lamila por apoiar-me sempre;
- À minha orientadora, à Professora Dra. Maria Aldinêz Dantas, sempre dedicada a ajudar seus alunos;
- A todos os professores, que contribuíram com a minha formação pessoal e acadêmica;
- Aos meus irmãos Linara e Gledson.

“Nós somos uma maneira do cosmo conhecer a si mesmo.”

Carl Sagan

O homem tem observado o Universo desde a sua consciência e vem desenvolvendo conceitos, algumas vezes místicos, para explicar sua origem. Com o passar do tempo e a evolução da ciência a cosmologia surge para explicar alguns questionamentos do ser humano. Modelos cosmológicos foram propostos para explicar a dinâmica e origem do Cosmos. Mas como testar qual modelo pode explicar de forma mais completa o nosso Universo observável. Isto só é possível através de testes envolvendo dados observacionais e o emprego de ferramentas estatísticas. Em nossas análises estatísticas, nós inicialmente utilizamos uma amostra constituída de 32 idades de galáxias distribuídas no intervalo de *redshift* ($0.11 \leq z \leq 1.84$). Com o intuito de estudar os vínculos observacionais sobre a energia escura a partir de dados futuros construímos amostras simuladas via o método Monte Carlo, centrado no modelo Λ CDM plano dentro de uma distribuição normal. Na construção das amostras sintéticas utilizamos o valor de $\Omega_m = 0.27$ e um valor de $H_0 = 73.5 \text{Km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$ (independente de modelos cosmológicos). Fizemos uso do método do χ^2_{min} para encontrar os melhores ajustes dos parâmetros livres de nossos cenários cósmico. Em seguida calculamos a matriz de Fisher em termos dos parâmetros selecionados, a Matriz de covariância e por fim, calculamos a Figura de Mérito (FoM). Mostramos que a FoM é uma ferramenta bastante útil e que possibilitou quantificar o potencial restritivo de dados sintéticos indicando que no futuro medidas de idades de galáxias serão capazes de impor limites significantes nas cosmologias adotadas.

Palavras-chave: Modelos Cosmológicos; Dados Sintéticos; Figura de Mérito.

ABSTRACT

Man has observed the Universe since his consciousness and has been developing concepts, sometimes mystical, to explain its origin. Over time and the evolution of science cosmology arises to explain some questions of the human being. Cosmological models were proposed to explain the dynamics and origin of cosmos. But how to test which model can more thoroughly explain our observable Universe. This is only possible through tests involving observational data and the use of statistical tools. In our statistical analyses, we initially used a sample consisting of 32 ages of galaxies distributed in the redshift interval $(0, 11 \leq z \leq 1, 84)$. In order to study the observational constraints on dark energy with data from future surveys, we constructed simulated samples via the Monte Carlo method, centered on the flat CDM model within a normal distribution. In the construction of synthetic samples we used the value of $\Omega_m = 0, 27$ and a value of $H_0 = 73, 5 \text{Km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$ (independent of cosmological models). We used the χ_{min} method to find the best fits of the free parameters of our cosmic scenarios. Next, we calculate Fisher's matrix in terms of the selected parameters, the covariance matrix, and finally, we calculate the Figure of Merit (FoM). We show that FoM is a very useful tool and that it made it possible to quantify the restrictive potential of synthetic data indicating that in the future galaxy age measures will be able to impose significant limits on the adopted cosmologies.

Keywords: Cosmological models; Synthetic Data; Figure of Merit.

LISTA DE FIGURAS

2.1	Lei de <i>Hubble</i> que comprova a expansão do Universo. Versão original [7]	7
2.2	Medida das linhas espectrais devido ao movimento da fonte em relação ao observador com um espectrógrafo. Figura retirada da referência [32].	9
2.3	Abundância dos elementos leves em relação a quantidade de hidrogênio ordinária. Figura retirada de [36].	11
2.4	Espectro da RCF, segundo dados do FIRAS a bordo do COBE, mostra que não há desvios da equação de Planck até a quinta casa decimal. Figura retirada da referência [39].	12
2.5	Comparação dos mapas das anisotropias da RCF obtidas pelo COBE e WMAP. Figura retirada de [41].	12
2.6	Espectro de potência angular da temperatura da RCF obtida com os primeiros resultados satélite espacial Planck em 2013. Figura retirada da referência [41].	13
2.7	Superfícies bidimensionais que exemplificam os universos aberto, fechado e plano. Figura retirada da referência [46]	14
2.8	Evolução temporal do Universo dominado por Matéria, Radiação e Energia Escura. Figura retirada da referência [48].	16
2.9	Evolução temporal do Universo com relação ao seu tamanho. Figura retirada de USTC.	17

2.10 Idade do Universo em função do parâmetro densidade. Retirado da referência [50].	22
5.1 Esta amostra corresponde a 32 galáxias, distribuídas no intervalo de <i>redshift</i> $0.11z \leq 1.84$ e inclui observações do GDDS [77] e dados arquivados [78,79].	38
5.2 Exemplos de nossas amostras simuladas de idade de galáxias com $N = 200, 1000$ pontos, respectivamente, medidas em bilhões de anos (Ganos), versus o <i>redshift</i> , z . Foi adotado um erro, $\sigma_t = 10\%$. Em ambos os gráficos a linha sólida verde representa o modelo fiducial no qual baseiam-se as simulações.	39
5.3 FoM versus N . O número de pontos das amostras simuladas de $t(z)$ obtidas para o modelo W_aCPL considerando um erro de 5% (esquerda) e 10% (direita), na amostra observada [78].	40
5.4 Modelo $XCDM_{k=0}$: FoM versus o número de pontos de galáxias sintéticas. Figura reproduzida pelo Autor.	42
5.5 Modelo $W_aCDM_{k=0}$ Oscilatório: FoM versus o número de pontos de galáxias sintéticas. Figura reproduzida pelo Autor.	43
A.1 Representação gráfica da translação de uma elipse no centro (0,0) para centro (h,K). Figura reproduzida pelo autor.	56
A.2 Representação gráfica da rotação de uma elipse no centro (h,k). Figura reproduzida pelo autor.	57
A.3 Elipse de confiança com parâmetros x e y. Figura retirada de [87]	59

LISTA DE TABELAS

4.1	Elipse de confiança.	35
5.1	Resultados dos melhores ajustes dos parâmetros livres. Tabela reproduzida pelo Autor.	41
5.2	Resultados dos melhores ajustes dos parâmetros livres do Modelo Λ CDM _{k=0} . Tabela reproduzida pelo Autor.	41
5.3	Resultados dos melhores ajustes dos parâmetros livres do Modelo Λ CDM _{k=0} Oscilatório. Tabela reproduzida pelo Autor.	41

Sumário	x
1 INTRODUÇÃO	1
2 COSMOLOGIA PADRÃO	6
2.1 A expansão do universo	6
2.1.1 DESVIO PARA O VERMELHO	8
2.2 Nucleossíntese Primordial	9
2.3 Radiação Cósmica de Fundo	11
2.4 Dinâmica do Universo	14
2.5 Medindo distâncias no Universo	19
2.6 A Idade do Universo	20
3 MODELOS COSMOLÓGICOS	23
3.1 Modelo Λ CDM	23
3.2 Modelo X CDM	25
3.3 Modelo W_q CDM Oscilatório	26
3.4 Modelos Paramétricos	27

3.4.1	PARAMETRIZAÇÃO LINEAR W_a CDM	27
3.4.2	PARAMETRIZAÇÃO W_a CPL	28
4	MÉTODOS ESTATÍSTICOS	30
4.1	A <i>Likelihood</i> ou Verossimilhança	30
4.2	Método Qui-Quadrado	32
4.2.1	MÉTODO QUI-QUADRADO REDUZIDO	32
4.3	Matriz de Fisher	33
4.4	Figura de Mérito	35
5	DADOS OBSERVADOS/SIMULADOS E RESULTADOS	37
5.1	Dados Observados - idades galáxias	37
5.2	Amostras Simulada	39
5.3	Resultados	40
5.3.1	MELHORES AJUSTES	40
5.3.2	FoM	42
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	44
	Referências Bibliográficas	47
A		55

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A Cosmologia é uma ciência que tem como objeto de estudo o Universo. Este é um assunto que desperta a curiosidade nos seres humanos desde os primórdios e, atualmente, os cosmólogos se preocupam em responder algumas questões da física contemporânea, compreendendo a estrutura, a composição e a evolução do Universo em grande escala.

Já é sabido que a revolução científica trouxe vários frutos para a sociedade e uma delas é o nascimento da Cosmologia no início do século *XX*, quando surgiram desafios nas áreas de física, devido a graves problemas de incompatibilidade como, por exemplo, o da própria indefinição da descrição do comportamento dos átomos que não conseguia ser explicadas pela física clássica. Como resultado destas incoexistências, com a teoria utilizada, surgiram novos conceitos que responderam a essas questões e trouxeram uma nova física, explicando não só a natureza microscópica de ordem atômica, como também a macroscópica de ordem das galáxias.

A cosmologia moderna começou em 1915 quando o Físico Alemão A. Einstein (1879 -1955) propôs a Teoria da Relatividade Geral (TRG) como uma teoria geométrica da gravitação [1]. No artigo, intitulado, *Die Feldgleichungen der Gravitation*¹ e publicado pela revista *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* 844-847, ele descreve a gravidade resolvendo os principais problemas não descritos pela física newtoniana. É uma hipótese generalista da relatividade especial, fornecendo uma

¹Tradução livre do Alemão: As equações de Campo da Gravitação.

descrição unificada da gravidade como uma propriedade do espaço-tempo. Dois anos depois, Einstein propôs um modelo Cosmológico que descrevia a dinâmica do Universo, tendo como base a TRG [2]. Naquela época, ele pensava que o Universo seria estático e introduziu um termo repulsivo nas equações de campo da TRG com a finalidade de evitar a atração provocada pela matéria, correspondente a um modelo relativístico².

Após a publicação do artigo de Einstein, vários cientistas contribuíram para a criação de modelos cosmológicos na tentativa de representar a dinâmica do Universo. O primeiro deles foi no mesmo ano da publicação de Einstein, o do holandês W. de Sitter (1872-1934). Ele propôs, através das equações de Einstein, que o Universo não era estático e sim, estava se modificando continuamente. Em seu modelo, o Universo é inteiramente descrito com ausência de matéria e radiação, as galáxias são interpretadas como partículas flutuando dentro do espaço-tempo em expansão e a sua semelhança com o modelos de Einstein está na constante cosmológica [3]. No ano de 1922, o cosmólogo Russo A. Friedmann (1888-1925) publicou um artigo onde ele resolve as equações de campo de Einstein com a premissa de um Universo homogêneo e isotrópico em grandes escalas, o que posteriormente é conhecido como Princípio Cosmológico [4]. Naquela publicação, é obtido um modelo de curvatura espacial positiva com fases de expansão e contração (expansionista), sem Λ , diferente do que Einstein tinha pensado, o que depois ele o chamou de maior erro de sua vida [5]. Mais adiante, Friedmann admitiu que esta era mais uma das possibilidades de universos, que poderiam ter curvatura abertos, fechada e nula. Infelizmente seu trabalho só foi reconhecido depois de muito tempo de sua publicação. Poucos anos depois, em 1927, o belga G. Lemaître (1894-1966) apresentou suas ideias na Conferência Solvay, sobre um Universo finito que se originou de um ponto (átomo primordial). Ele demonstrou uma derivação da lei de Hubble sobre a velocidade de afastamento das galáxias e provou matematicamente pela equações de Einstein a teoria do *Big Bang* [6]. Dois anos mais tarde, o astrônomo Estadunidense Edwin P. Hubble (1889 -1953) mostrou uma evidência observacional de que o Universo estava em expansão, o que tornou a publicação do chamado átomo primordial bastante aceita pela comunidade científica.

A evidência de Hubble foi feita no observatório de Monte Wilson, com o telescópio Hooker, sendo possível medir o período de variação da luminosidade de estrelas Cefeidas

²Este termo, chamado de constante cosmológica, é visto nas equações de Einstein como um termo adicional do campo da métrica multiplicado por uma constante. É geralmente representada pela letra grega Λ .

em 46 galáxias. Devido a este trabalho, estabeleceu-se a Lei de Hubble que mostrou a relação da velocidade de afastamento e a distância de determinada galáxia referente à Via Láctea [7]. Ou seja, conforme estas observações, o Universo tinha uma dinâmica expansionista e não estática como proposta por Einstein em 1917.

No ano de 1947 o Russo George A. Gamow (1904-1968), que é considerado um dos pais do Modelo Padrão, junto com os seus colaboradores, contribuíram de forma significativa nas pesquisas sobre a natureza inicial do Universo com foco em física nuclear de alta energia. Com a descoberta na década de 30 de elementos como nêutron, deutério e pósitron foi possível para Gamow e seu grupo, realizar experimentos que solucionava um problema central, a formação dos elementos leves (Hidrogênio, Deutério, Hélio e Lítio), um modelo descrito como Nucleossíntese Primordial [8].

Através da nucleossíntese primordial foi possível prever teoricamente a existência de uma radiação, uma relíquia da época do *Big Bang*, que permeasse o Universo até os dias atuais³. Em 1964 Arno A. Penzias e Robert Wilson construíram um radiômetro que possuía uma sensibilidade a ruídos térmicos muito baixos, da ordem de $3,5K$. Naquele momento foi possível identificar, por meio de análises contínuas, que se tratava da Radiação Cósmica de Fundo (RCF) [9]. Com o avanço da tecnologia, em 1970, o satélite *Cosmic Background Explorer* (COBE) mapeou o céu para analisar a RCF e medir as anisotropias obtidas das pequenas variações da temperatura de fundo⁴ e assim, analisando graficamente com relação aos parâmetros cosmológicos do modelo padrão, tornou-se possível uma primeira prova que no início do Universo teria havido perturbações para formar as estruturas atuais e sem isso, o Universo não existiria.

Em 1998 teve mais uma grande conquista na Cosmologia. Desta vez, duas equipes de pesquisadores: uma liderado por Saul Perlmutter e Brian Schmidt e outra liderado por Adam Riess. Eles obtiveram vários resultados de medidas de Supernovas do tipo Ia e por meio de análises estatísticas restringiram os parâmetros cosmológicos, reduzindo as incertezas pela quantidade de amostra, sendo bastante significativo para o estudo da

³Ironicamente é que esta radiação foi detectada acidentalmente em 1964 por Penzias e Wilson, dando a eles o Nobel por este feito.

⁴Os primeiros resultados sobre as variações na temperatura da RCF e sobre seu espectro de corpo negro foram publicados em [10, 11]. Por esses resultados, em 2006, George F. Smoot, e Jonh C. Mather, foram laureados com o prêmio Nobel em física. Para uma revisão histórica completa sobre a RCF, veja a Ref. [12].

expansão do Universo⁵. As equipes utilizaram métodos inovadores que diminuíram os erros de medição, a susceptibilidade de seleção das SN Ia foi reduzida e uma técnica de multicolor que acentuou o avermelhamento observado em cada supernova. Por meio destes resultados aplicado nas equações da cosmologia padrão se inferiu que o Universo esta em expansão acelerada e que existe uma energia escura responsável por essa característica [13, 14].

Um dos mais recente resultados na astronomia remete ao trabalho de Albert Einstein de 1916. Com o uso da relatividade geral ele propôs que se dois corpos maciços chocam-se no espaço-tempo causará uma perturbação que se propagará na velocidade da luz, como se fosse uma pedra lançada na água. Quase um século depois, em 2015 ocorreu uma destas oscilações e foi detectado pelo *Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory* (LIGO) utilizando um interferômetro a laser semelhante ao utilizado por Michelson-Morley em 1887. Este experimento⁶ corroborou mais uma vez com a TRG e por consequências os diversos modelos cosmológicos formulados que descrevem a dinâmica expansionista do Universo [15].

Na literatura, ao longo dos anos, os cosmólogos seguem basicamente duas linhas de estudo na tentativa de explicar a atual fase de expansão acelerada do Universo: a primeira está associada a aparição de uma componente exótica, denominada Energia Escura, que exerce uma força contrária a gravitacional, com uma pressão negativa, atraindo a matéria fazendo o Universo acelerar. Dentro do contexto da TRG, de fato, o modelo Λ CDM (Modelo Cosmológico Padrão) é o mais bem ajustado aos dados observacionais e é descrito por um fluido com equação de estado do tipo vácuo e densidade de energia constante [16, 17]. Apesar de seu sucesso, este modelo está radicalmente em desacordo com a teórica da energia do vácuo que é descrita pela teoria quântica de campos, o que incentiva a criação de modelos alternativos para descrição do Universo, tais como: *Big Rip*, modelo que a expansão é infinita [18]; *Big crunch*, um Universo que não teve inicio, sempre existiu. Neste modelo, o Universo seria cíclico, desacelera e contraia novamente, proporcionando outro Big Bang, depois volta a acelerar [19]; Modelo de quintessência: Campo Escalar [20], gás de Chaplygin [21], decaimento do Vácuo [22]. Já segunda linha de estudo, está associada

⁵Esses autores receberam o prêmio Nobel de 2011, mostraram como a expansão do Universo está acelerando baseado na observação da luz oriundas de SN Ia.

⁶Este resultado que foi considerada pelo o Juri como uma "descoberta que sacudiu o mundo"laurearam os cientistas Rainer Weiss, Barry Barish e Kip Thorne o Prêmio Nobel de Física de 2017 por seu trabalho no LIGO, o detector de ondas gravitacionais.

a retificações na TRG (modelos de gravidade modificada), como por exemplo, modelos de Brana [23], Expansão Cardassiana [24] e $F(R)$ [25].

Motivado por esta variedade de cosmologias que surgiram devido as lacunas que cada modelos pode ter, o objetivo deste trabalho é obter o grau de precisão de alguns modelos existentes na literatura a luz de dados sintéticos de idades de galáxias, sendo esses simulados via Método Monte Carlos (MMC) a partir dos dados observacionais/reais. Para tal, faremos uso de análise estatísticas e do método denominado Figura de Mérito - FoM. A fim de calcular a FoM, usaremos a definição apresentada pelo projeto *Dark Energy Task Force* (DEFT). Para maiores detalhes veja a Ref. [26].

Esta dissertação está dividida da seguinte forma: no capítulo que segue descrevemos os principais pilares observacionais que corroboram com a teoria do Big-Bang, apresentando a lei de Hubble, o surgimento da matéria no Universo primordial, a radiação cósmica de fundo e também como a relatividade geral contribui para explicar a dinâmica do Universo numa cosmologia padrão. No capítulo três, são revisados, além do modelos Λ CDM, os outros modelos adicionais abordados neste trabalho. Na sequência, faremos uso de ferramentas estatísticas para inferências de grandezas desejadas e assim, analisar os modelos adotados. Por fim, no último capítulo, mostraremos os resultados e as considerações finais deste trabalho.

Neste capítulo, aborda-se a cosmologia padrão de maneira simples e mais clara possível. Inicia-se com a exploração da expansão do Universo a partir das descobertas do telescópio Hubble, que nos permitiu formular teorias desde do *Big-Bang* até a dinâmica do Universo atual. Objetivando que o leitor, sem conhecimento prévio do tema, possa entender os conceitos abordados.

2.1 A expansão do universo

Do ponto de vista observacional, grandes descobertas na cosmologia foram graças aos estudos de Edwin Hubble em 1929, apresentando dados que o Universo não era estável e sim, mutável. Também constatou a existência de outras galáxias, surgindo assim a astronomia extragaláctica, que já tinha sido proposto, primeiramente, por Kant na metade do século XVIII [27]. Esta, porém, não foi a descoberta mais importante de Hubble. Seu resultado nos revelou que galáxias próximas se afastam de nós com velocidades, v , crescentes com as distâncias, d , deparadas delas¹, [7].

$$v = H(t).d, \tag{2.1}$$

¹Note que isso significa que o Universo está se expandindo de forma contrária ao que nossa intuição acredita, ou seja a gravidade deveria fazer com que esta expansão fosse decrescente. Além do mais, contraria a ideia proposta por Einstein sobre o Universo ser estático.

onde as medições das velocidades de recessão estão em km/s e as distâncias em megaparsec. Nesse sistema de unidades, o parâmetro de *Hubble*, $H(t)$ é dado por $km/s \cdot Mpc^{-1}$. Ele também pode ser determinado através do fator de escala e da sua derivada no tempo, $H(t) = \frac{\dot{a}}{a}$ e firma naturalmente uma escala temporal característica para o Universo por possuir dimensão de inverso do tempo $[T]^{-1}$. Para Universo atual $H_0 = H(t = 0)$.

Logo após a descoberta de *Hubble*, houve muita dificuldade de estabelecer o valor de H_0 devido a erros de medidas. Atualmente, mesmo existindo maneiras independentes de medir H_0 , ainda existe uma tensão de mais de 3σ nestas medidas: uma a partir de observações da radiação cósmica de fundo, $H_0 = 67.4 \pm 0.5 \text{ km/s} \cdot Mpc^{-1}$ [28] e a outra oriunda das escada de distância cósmica de SNe do tipo Ia, $H_0 = 73.52 \pm 1.42 \text{ km/s/Mpc}$ [29].

A lei de *Hubble*, a equação (2.1) que é atribuída a recessão das galáxias, é um dos pilares da cosmologia moderna. Ela mostra, definitivamente, que o Universo está se expandindo como podemos ver abaixo pela figura original de *Hubble*, [7],

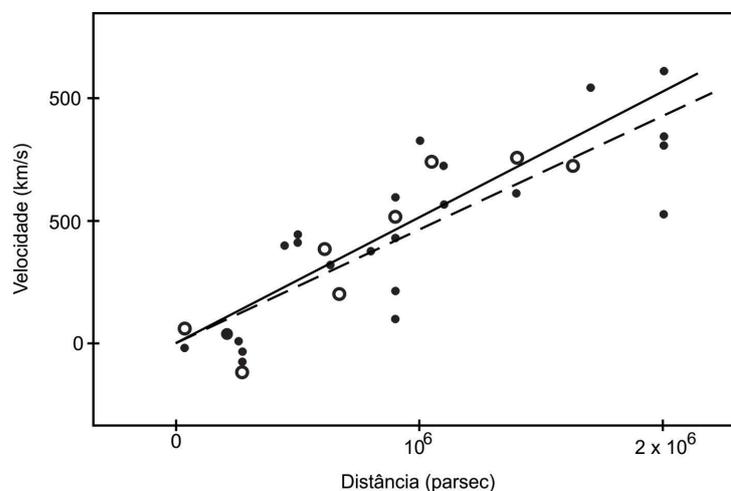


Figura 2.1: Lei de *Hubble* que comprova a expansão do Universo. Versão original [7]

Levando em conta que o Universo está em expansão podemos fazer uso de um sistema de coordenadas diferente, onde conectamos a distância própria, $r(t)$, com a distância comóvel, $r(t_0)$, através de um fator de escala, $a(t)$,

$$r(t) = a(t)r(t_0). \quad (2.2)$$

Note que esta relação só é possível devido a expansão do Universo ser uniforme. Podemos

medir a taxa de expansão do Universo através do termo $a(t)$, [30].

2.1.1 DESVIO PARA O VERMELHO

Um dos problemas na cosmologia é determinar distâncias astronômicas de forma precisa e, na literatura, existem inúmeras maneiras de obter esta grandeza: uma, é através de placas fotográficas; uma outra, via de medição do satélite *hipparcos*, que tem limitações a estrelas mas distantes, pois ficam inacessíveis a observações. Uma forma mais rigorosa para estrelas muito distantes é utilizando a identificação e medida de variáveis cefeidas, [31]. Com algumas definições matemática relacionadas ao fluxo de luminosidade medido, podemos calcular distâncias. Para mais detalhes, veja a referência [32].

Com relação as galáxias, utilizamos o efeito doppler para determinar as suas distâncias, já que elas possuem velocidade radial ao observador, característica que pode ser facilmente medida. Sua velocidade de afastamento causa um deslocamento conjunto das linhas espectrais que pode ser aferido por uma observação espectroscópica bastante aprimorada [7, 32]. Estas medidas podem ser realizadas tanto com linhas espectrais de emissão como de absorção. Observe o esquema da figura 2.2. É possível identificar o padrão de espectro de um elemento químico, λ_0 , que é extremamente bem determinado pelas leis de transição atômica. Note que com um espectrógrafo é observado as medida das linhas espectrais devido ao movimento da fonte em relação ao observador. Em um outro instante essas linhas terão outro padrão de emissão λ , pode-se determinar o deslocamento do seu espectro, conhecido como *redshift* (z) ao qual está ligado ao efeito doppler e consequentemente a velocidade de afastamento em uma aproximação de primeira ordem, como descrita pela equação, [33]

$$z = \frac{\lambda(t) - \lambda_0}{\lambda_0} \approx \frac{v}{c}. \quad (2.3)$$

Esta equação 2.3 nos levou a constatação de que quanto mais distante for a galáxia mais rápida ela se afasta proporcionalmente de nós, completamente em acordo com a figura 2.1.

Para facilitar a nossa compreensão dos cálculos imaginamos que um fóton de comprimento λ_0 seja emitido em um tempo t_0 , onde o fator de escala do Universo, a_0 , será

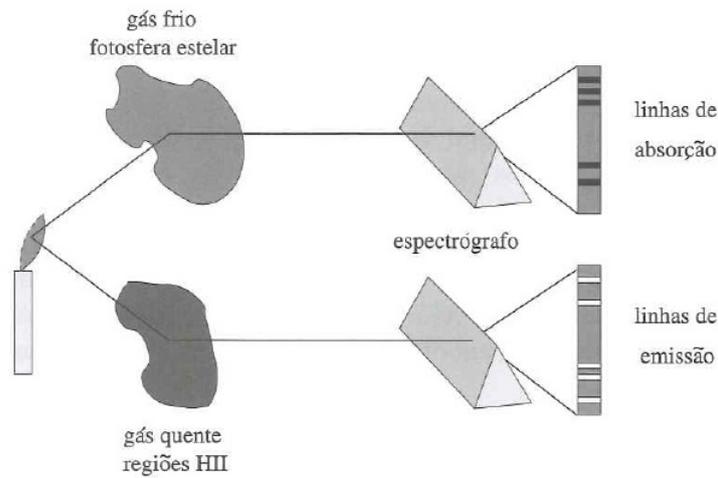


Figura 2.2: Medida das linhas espectrais devido ao movimento da fonte em relação ao observador com um espectrógrafo. Figura retirada da referência [32].

modificado com a sua expansão. Logo em um instante posterior, t , medimos um $a(t)$ que está relacionado ao comprimento de onda $\lambda(t)$. Utilizando a equação (2.3), obtemos uma relação entre z e $a(t)$,

$$1 + z = \frac{1}{a(t)}, \quad (2.4)$$

implicando que o *redshift* é uma consequência direta da expansão do Universo e não do efeito doppler [32]. Esta relação pode ser descrita também da seguinte forma:

$$1 + z = \frac{a_0}{a(t)}, \quad (2.5)$$

sendo que o sub-índice 0 indica o tempo atual, a_0 é descrito como valor atual do fator de escala em $t = t_0$ e $a(t)$ é o fator de escala em um tempo qualquer. Há intenção de relacionar todas equações futuras com o *redshift*, para isso, temos uma relação desse com outras variáveis.

2.2 Nucleossíntese Primordial

A nucleossíntese primordial descreve como foi a formação de componentes essenciais para surgimento da matéria bariônica e ela é considerada um dos pilares do MCP. No início do Universo, neste estado primordial, tudo estava condensado e quente e devido

a instabilidade das partículas isso não se manteve dando origem a expansão do Universo. Durante esse período, a radiação dominava o Universo e sua densidade era inversamente proporcional ao fator de escala do Universo $a(t)$ [33]. Após os primeiros minutos do Big-Bang surgiram elementos com núcleos mais leves e esses foram forjados basicamente na era pré-galáctica: o hidrogênio (1H), deutério (2H), hélio (3He) e (4He), e o lítio (7Li) [34].

Reações nucleares puderam acontecer no meio gasoso interestelar devido a formação desses núcleos leves e assim antes da síntese das galáxias alguns outros elementos em concentrações pequenas puderam ser formados. Porém, depois do surgimento das galáxias, grande parte dos elementos mais pesados presentes na Terra e em algumas outras estrelas mais novas foram formados em explosões de nova e supernova [34]. A medida que o Universo continuou a se expandir, a temperatura diminuiu e a pressão entre os elementos bariônicos foi insuficiente para continuar a fusão nuclear no plasma primordial, extinguindo a formação dos elementos leves. O que nos leva a uma consequência muito importante, as frações dos elementos leves observadas atualmente devem ser praticamente as mesmas da época da nucleossíntese primordial [35].

A estimativa da abundância dos elementos leves é um importante teste para os modelos cosmológicos. Os dados obtidos pelo o *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP)* permitiu realizar previsões acerca da nucleossíntese [35]. Resultados dos cálculos das concentrações desses elementos em relação a quantidade de Hidrogênio ordinário está demonstrado na figura 2.3, [36]. Note que tem uma região de confiança para o deutério que é capaz de obter um vínculo mais restrito para determinar o valor do parâmetro que relaciona a abundância dos bárions com os fótons, η , dado por,

$$\eta = 2,737 \times 10^{-8} \Omega_b h^2. \quad (2.6)$$

Como os bárions do Universo podem ser obtidos através de observação que podem ter valor de $\Omega_{ob} \approx 0.04$, podemos então encontrar $\eta \approx 1,1 \times 10^{-19}$ que concorda com as previsões teóricas baseadas na nucleossíntese primordial, veja a referência da [37].

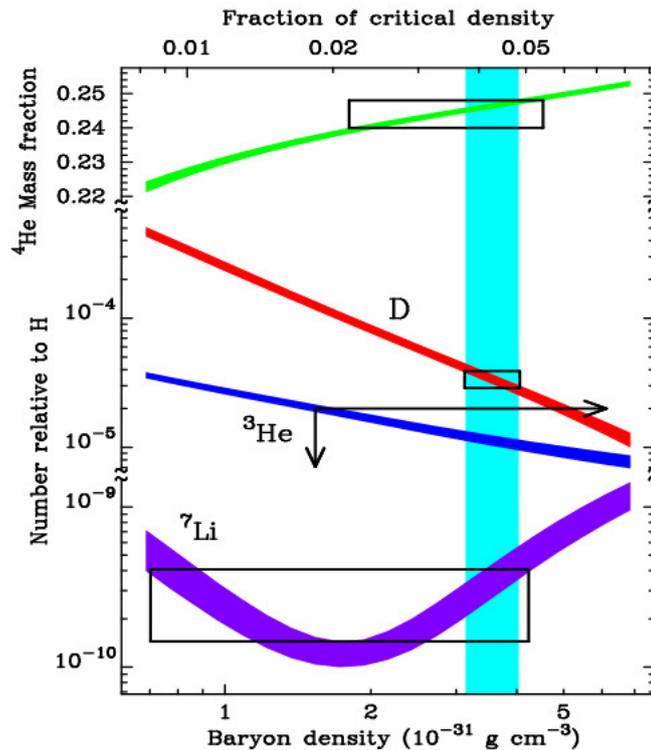


Figura 2.3: Abundância dos elementos leves em relação a quantidade de hidrogênio ordinária. Figura retira de [36].

2.3 Radiação Cósmica de Fundo

Após o Big-Bang, o Universo era constituído por um plasma quente e denso que continha fótons, elétrons e outras partículas fundamentais da matéria. Com o crescimento do Universo ocorreu seu resfriamento formando-se o hidrogênio nêutron, a esta época denominamos era da recombinação, $z \approx 1100$. Pouco tempo depois, os fótons se desacoplaram da matéria e se expandiram livremente no Universo sem nenhuma interação e assim surgiu o conceito de Radiação Cósmica de Fundo [38]. Como foi comentado na introdução a RCF foi detectada por Arno Penzias e Robert Wilson fazendo uso de um radiômetro e após várias análises, foi possível estabelecer sua relação com um espectro de corpo negro, como demonstrado pela figura 2.4, [39].

A partir das propriedades medidas da RCF foi possível obter características sobre o Universo em seu estado primordial e de acordo com outros estudos foi moldada a cosmológico atual como o modelo Λ CDM, [40]. Através do satélite COBE foi determinada, com precisão, as características do espectro da RCF e sua temperatura da ordem de $T_0 = 2.725 \pm 0.001K$. A radiação que se mede hoje vem uniformemente de todas as

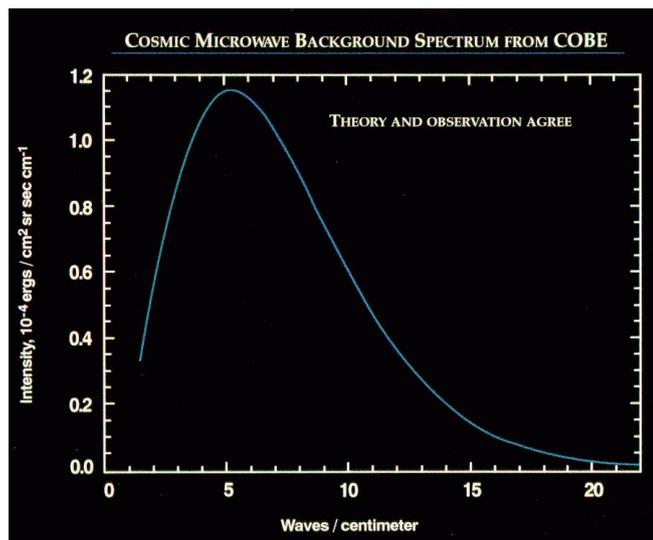


Figura 2.4: Espectro da RCF, segundo dados do FIRAS a bordo do COBE, mostra que não há desvios da equação de Planck até a quinta casa decimal. Figura retirada da referência [39].

direções. Essa é a evidência mais importante para concluir que o Universo primordial é de fato homogêneo e isotrópico em grandes escalas, como foi descrito pelo princípio cosmológico. Embora a temperatura da RCF seja muito aproximadamente isotrópica (ver figura 2.5), algumas fontes de anisotropias² foram identificadas a partir dos resultados do COBE, WMAP e mais recentemente pelo PLANCK [41], [42] e [43].

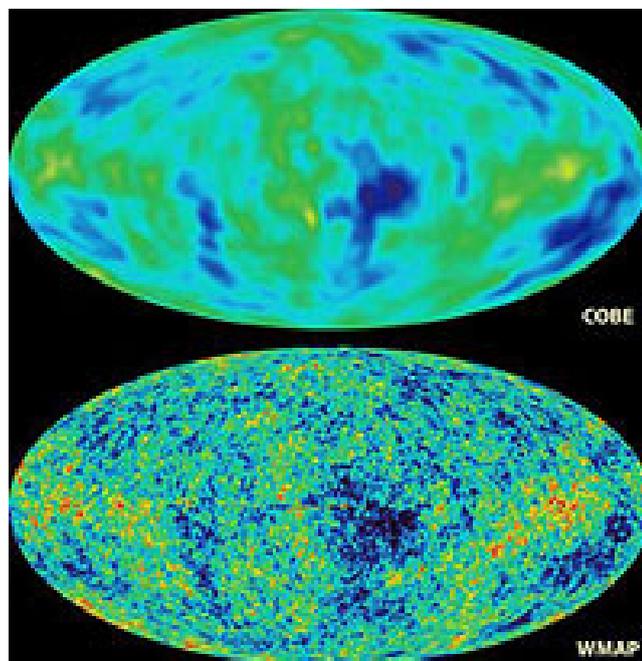


Figura 2.5: Comparação dos mapas das anisotropias da RCF obtidas pelo COBE e WMAP. Figura retirada de [41].

²Só foi possível o mapeamento graças as correções de efeitos de anisotropia de dipolo e análise de movimentos relativos em nossa Galaxia

Por meio das anisotropias da RCF encontramos várias informações sobre a estrutura do Universo e tais informações só são possíveis através de métodos estatísticos. Um dos primeiros passos é obter a relação entre ângulos sólidos medidos nas flutuações e as perturbações que os geram, que esta relacionada com o comprimento de onda λ , assim as estruturas analisadas possuem dependência com os ângulos. Uma função de correlação é utilizada para comprovar parâmetros cosmológicos, relacionando a diferença entre a temperatura medida em certa direção no céu e a temperatura da RCF, então com um ângulo fixo, constrói-se um espectro de flutuações com alguns picos característicos, veja a figura 2.6 [38].

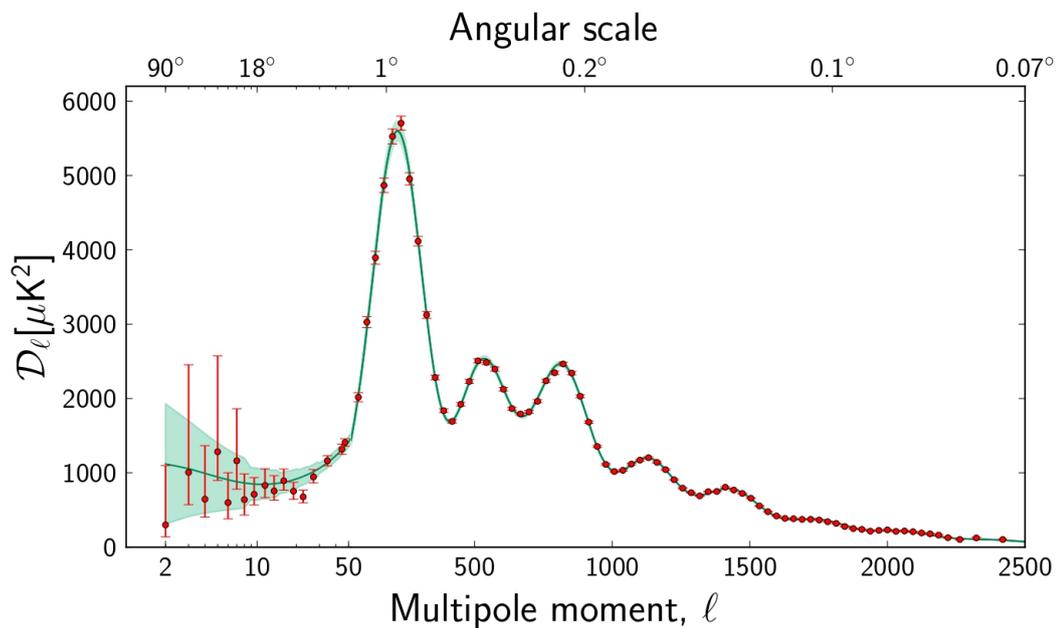


Figura 2.6: Espectro de potência angular da temperatura da RCF obtida com os primeiros resultados satélite espacial Planck em 2013. Figura retirada da referência [41].

Os picos estão relacionados com as chamadas oscilações acústicas no plasma, e podemos associa-los com os modos harmônicos desta oscilação. O primeiro pico representa o harmônico fundamental, a maior onda que poderia aparecer no meio, que define o tamanho do Universo observável ou escala angular do horizonte, os outros picos estão ligados aos outros harmônicos. E assim pode-se extrair informações das anisotropias da RCF como as densidades de matéria escura, matéria bariônica e da constante cosmológica, que pode demonstrar a geometria do Universo [44].

2.4 Dinâmica do Universo

A descrição da evolução do Universo em grande escala, é baseada na métrica de *Friedmann-Lamaître-Robertson-Walker* (FLRW) que é fundamentada no Princípio Cosmológico, definida como, [37]:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)[dr^2 + S_k^2(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)], \quad (2.7)$$

onde $S_k(r)$ é uma generalização geométrica do Universo compactado em uma única equação,

$$S_k(r) = \begin{cases} r, & k = 0 \\ R\text{sen}\left(\frac{r}{R}\right), & k = +1 \\ R\text{senh}\left(\frac{r}{R}\right), & k = -1. \end{cases} \quad (2.8)$$

As variáveis r , θ e φ são denominadas coordenadas comóveis. A constante κ mostra a geometria do Universo, podendo ser fechado, plano e aberto correspondendo a $\kappa = +1, 0$ e -1 , respectivamente [37]. Em 1829, Nikolai I. Lobachevski propôs uma forma de analisar a curvatura do espaço dada que pela relação [45],

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{\kappa \cdot A}{R^2}. \quad (2.9)$$

Na figura (2.7) é ilustrado as três possíveis geometrias da equação (2.9) [46].

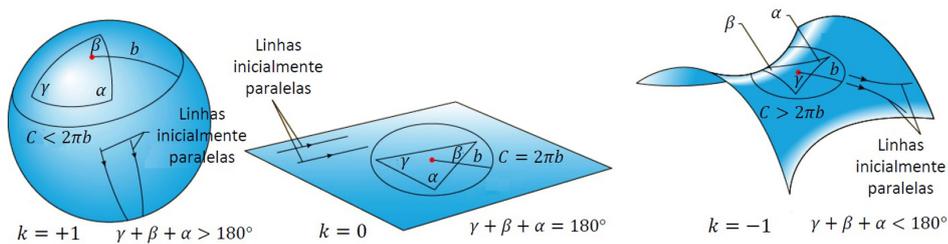


Figura 2.7: Superfícies bidimensionais que exemplificam os universos aberto, fechado e plano. Figura retirada da referência [46]

Essa métrica é uma solução exata das equações de campo de Einstein da TRG, dada abaixo

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

sendo que o tensor energia-momento, $T_{\mu\nu}$, é

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (2.11)$$

ρ e p são a densidade e a pressão do fluido que representa o Universo, respectivamente.

Já as equações de Friedmann podem ser obtidas substituindo a métrica FLRW e o $T_{\mu\nu}$, nas equações de campo de Einstein, equação (2.10),

$$\frac{8\pi G\rho}{3} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\kappa}{a^2}, \quad (2.12)$$

e

$$8\pi Gp = -2\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) - \frac{\dot{a}}{a} - \frac{\kappa}{a^2}. \quad (2.13)$$

Devido a homogeneidade e isotropia, ρ e p estão relacionadas com o tempo. Subtraindo (2.12) de (2.13) temos uma equação que não depende da curvatura e descreve a aceleração do Universo

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (2.14)$$

Considerando a primeira lei da termodinâmica encontramos a equação de conservação para um fluido do tipo perfeito em função do fator de escala, dada por [47]

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (2.15)$$

Analisando a equação (2.15) determinamos vários casos que caracteriza a dominância de algumas componentes que constituem o fluido cósmico em determinadas eras. Para isso, estas componentes obedecem uma equação de estado simples, ou seja,

$$p = \omega\rho, \quad (2.16)$$

onde ω é o parâmetro da equação de estado. No caso geral em que $\omega = \omega(z)$, uma combinação da equação acima com a equação (2.15) implica em

$$\rho(z) = \rho_0 \exp\left\{\int_{a_0}^a 3[1 + \omega(z)]d\ln(1+z)\right\}, \quad (2.17)$$

enquanto que se ω constante, temos

$$\rho(t) = \rho_0 a(t)^{-3(1+\omega)}, \quad (2.18)$$

que representa a evolução da densidade de energia escura ou quintessência com o fator de escala do Universo.

No período em que a matéria domina, $P = 0$, temos,

$$\rho_m(t) = \rho_{m_0} a(t)^{-3}. \quad (2.19)$$

Quando relacionamos a era da radiação, onde $P = \frac{1}{3}\rho$ resulta em,

$$\rho_r(t) = \rho_{r_0} a(t)^{-4}. \quad (2.20)$$

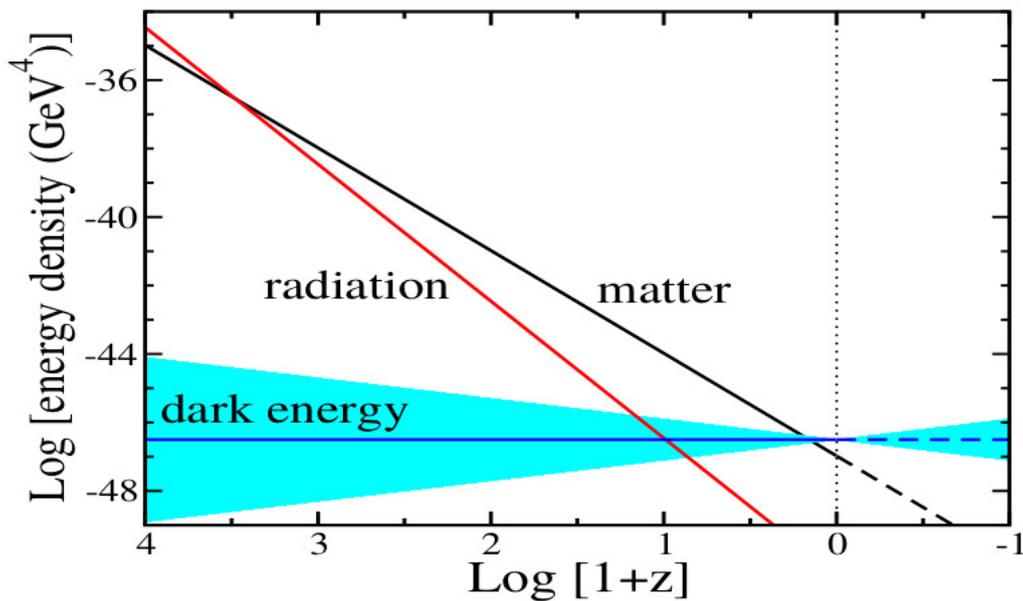


Figura 2.8: Evolução temporal do Universo dominado por Matéria, Radiação e Energia Escura. Figura retirada da referência [48].

A figura 2.8 mostra a evolução das densidades dos constituintes do cosmos com cada período de dominação [48]. No início do Universo, este era dominado por uma energia associada a radiação e que depois de um certo tempo foi dominada por matéria. Note que

atualmente o Universo esta na era da energia escura. É coerente pensar que em $z = 0$ a matéria quase não contribui e que a energia escura tem valor negativo³ de ρ , desta forma podemos escrever

$$\rho(t) = -\rho_\Lambda. \quad (2.21)$$

É possível ainda obter, a partir das equações (2.12) e (2.13), como o fator de escala varia com o tempo para o fluido dominante ($\omega = \text{constante}$),

$$a \propto \int (Ca^{3(w+1)} - k)^{\frac{1}{2}} dt, \quad (2.22)$$

onde C é uma constante de integração. Para o caso plano ($k = 0$), a integral acima é facilmente resolvida, resultando em

$$a = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3(1+\omega)}}. \quad (2.23)$$



Figura 2.9: Evolução temporal do Universo com relação ao seu tamanho. Figura retirada de USTC.

Durante a era da radiação ($\omega = 1/3$), o fator de escala se comportava como

$$a = a_{r_0} t^{\frac{1}{2}}, \quad (2.24)$$

³A este cenário, denominamos de modelo Λ CDM. Matematicamente, é o que melhor representa a cosmologia padrão e será discutido com mais detalhado no capítulo 3.

enquanto que para a era da matéria ($\omega = 0$)

$$a = a_{m_0} t^{\frac{2}{3}}. \quad (2.25)$$

No caso em que $\omega = -1$ (constante cosmológica), a dependência temporal desse fator resulta em

$$a = a_{\Lambda_0} \exp \frac{\Lambda}{3} t. \quad (2.26)$$

A figura (2.9) mostra uma ilustração da evolução do Universo com relação ao seu tamanho. Considerando que a região representa o Universo e que dependendo do valor de sua energia total, que é uma constante do sistema, o Universo poderá ser aberto, fechado ou plano. Para o caso do Universo com geometria plana, podemos definir uma densidade crítica, ρ_c , [40],

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (2.27)$$

Também podemos definir algumas densidades adimensionais dos constituintes do Universo em função da densidade crítica,

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}. \quad (2.28)$$

Assim, utilizando a condição de normalização para os parâmetros adimensionais do Universo, encontraremos a seguinte relação

$$\Omega_T = \sum \Omega_i + \Omega_\Lambda = 1, \quad (2.29)$$

ou,

$$\Omega_T = \Omega_r + \Omega_m + \Omega_k + \Omega_\Lambda = 1, \quad (2.30)$$

sendo que Ω_T é a densidade adimensional total do Universo e Ω_k é definido como

$$\Omega_k = 1 - \sum \Omega_i = -\frac{k}{(H_0 a_0)^2}. \quad (2.31)$$

Assim, chegaremos as seguintes conclusões

$$\begin{cases} \Omega_i > 1 & k > 0; & \Omega_k < 0 \\ \Omega_i = 1 & k = 0; & \Omega_k = 0 \\ \Omega_i < 1 & k < 0; & \Omega_k > 0. \end{cases} \quad (2.32)$$

2.5 Medindo distâncias no Universo

Além do que foi comentado na seção anterior, outras grandezas em função dos parâmetros cosmológicos podem ser obtidas a partir da métrica FLRW, tais como: distância própria, distância co-móveis, distância angular e distância de luminosidade [33].

Consideramos que o espaço-tempo está em expansão, a distância entre dois corpos quaisquer (observador e fonte) evoluem com o passar do tempo. Vamos considerar que uma fonte esta na origem num certo tempo, t , enquanto o observador recebe sinal no tempo atual, t_0 . Como a fonte é luminosa e esta na posição co-móvel (r, θ, ϕ) , os valores da posição angular θ e ϕ não mudam, ocorre variação apenas em r . Assim podemos obter a distancia própria, [37]:

$$d_p(t) = a(t) \int_0^r dr, \quad (2.33)$$

ou,

$$d_p(t) = a(t)d_c(t_0). \quad (2.34)$$

Portanto, a definição de distância co-móvel, $d_c(t_0)$, será a distância própria considerando o valor do atual fator de escala. Note que ela não se altera com tempo. Também podemos escreve-la em função de um modelo cosmológico, $H(z)$:

$$d_c(t_0) = \int_{t_0}^t \frac{dz}{H(z)}. \quad (2.35)$$

Uma outra definição importante para a cosmologia é a distância de luminosidade, [37], descrita segundo equação abaixo:

$$d_L = \frac{(1+z)}{\sqrt{|\Omega_k|}} S_k(r) \left(\sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{dz}{H(z)} \right), \quad (2.36)$$

em que $S_k(r)$ representa uma funcional que depende do parâmetro de curvatura, que foi definido na equação (2.8).

Outra maneira é relacionar a distancia luminosidade com o módulo da distância, μ , que é dada como a diferença entre a magnitude absoluta M e a magnitude aparente, m , da seguinte forma:

$$\mu = m - M = 5\log_{10}d_L + 25. \quad (2.37)$$

E por fim, a distância angular, que é razão entre a largura de um objeto astronômico e a sua variação angular. Esta distância é utilizada para expressar os tamanhos próprios no referencial do objeto, definida como [49]:

$$d_A = \frac{S_\kappa(r)}{1+z}, \quad (2.38)$$

e tem uma relação física com a distância angular dado por:

$$d_L = d_A(1+z)^2. \quad (2.39)$$

2.6 A Idade do Universo

Através da descoberta de Hubble, em 1929, foi possível determinar que o Universo está se expandindo e, se isso acontece e pudéssemos retroceder no tempo, veríamos que o Universo teve um início. Mas afinal, qual a idade do Universo? Para responder esta questão vamos partir da definição usual do tempo, definido matematicamente, como

$$\int_0^{t_z} dt = \int_0^a \frac{da}{\dot{a}}. \quad (2.40)$$

Multiplicando a equação acima pelos os fatores $\left(\frac{a_0}{a}\right)$ e $\left(\frac{a}{a}\right)$ na equação acima e fazendo uso da equação (2.5), teremos a seguinte relação

$$t(z) = \int_0^z \frac{dz'}{(1+z')H(z')}. \quad (2.41)$$

Esta é a expressão geral para a relação idade-*redshift* como função dos parâmetros observáveis para uma dada cosmologia. Portanto, a idade total do Universo será dada por

$$t_0 = \int_0^\infty \frac{dz'}{(1+z)H(z)}. \quad (2.42)$$

Podemos ainda determinar uma idade limiar para o Universo atual referente a cada geometria:

- $k = 0$ e $\sum_i \Omega_{i0} = 1$, (apenas matéria - Universo de Friedman):

$$t_0 = \frac{2}{3H_0}; \quad (2.43)$$

Generalizando este modelo, temos $\Omega_{\Lambda 0} = 1 - \Omega_{m0}$ e $\Omega_k = 0$, podemos encontrar uma relação matemática para a idade do Universo, dada pela equação a seguir,

$$t_0 = \frac{2}{3H_0\Omega_{m0}^{0,3}}. \quad (2.44)$$

Logo, considerando $\Omega_{m0} = 0,3$, temos que a idade do Universo é aproximadamente 14,2 bilhões para um $H_0 = 72$ km/s/Mpc. [50].

- $k = 1$ e $\sum_i \Omega_{i0} > 1$:

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \left[\frac{\Omega_{i0}}{2(\Omega_{i0} - 1)^{3/2}} \arccos \left(\frac{2 - \Omega_{i0}}{\Omega_{i0}} \right) - \frac{1}{1 - \Omega_{i0}} \right]; \quad (2.45)$$

- $k = -1$ e $\sum_i \Omega_{i0} < 1$:

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \left[\frac{1}{1 - \Omega_{i0}} - \frac{\Omega_{i0}}{2(\Omega_{i0} - 1)^{3/2}} \ln \left(\frac{2 - \Omega_{i0} + 2\sqrt{1 - \Omega_{i0}}}{\Omega_{i0}} \right) \right]. \quad (2.46)$$

Na figura abaixo podemos perceber que através dos parâmetros de densidades chegamos aos Universo de Milne (caso em que $\Omega_{i0} \rightarrow 0$) e o Universo de Einstein-De Sitter ($\Omega_{i0} \rightarrow 1$ com geometria plana), dados pelos extremos do gráfico [37, 51].

De acordo com o que foi mencionado acima, apresentamos os principais conceitos da cosmologia padrão e como as observações comprovaram a teoria do Big-Bang. Também surgiram questões sem respostas associadas a aceleração atual do Universo ou a natureza

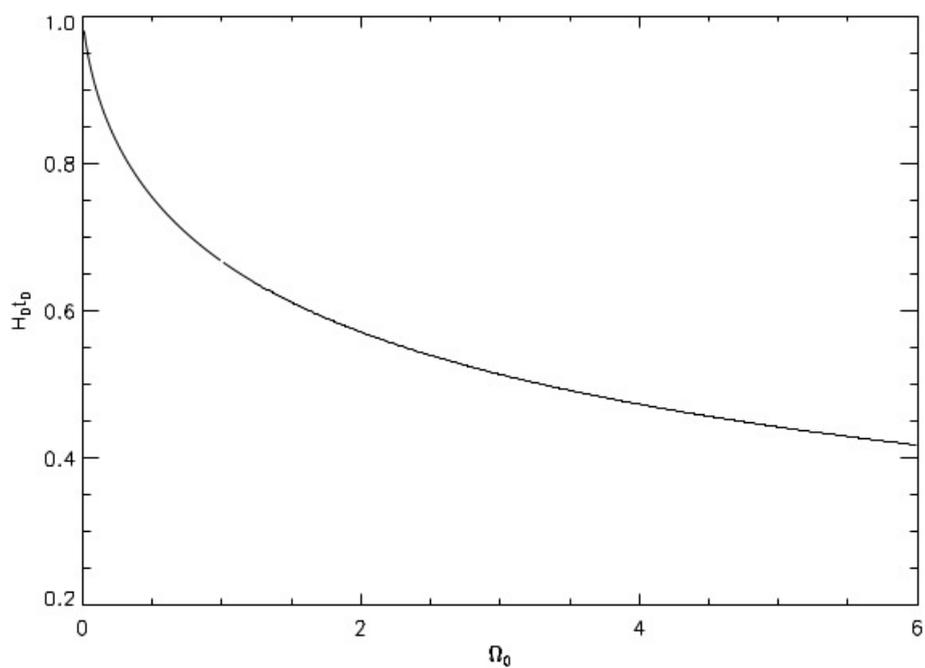


Figura 2.10: Idade do Universo em função do parâmetro densidade. Retirado da referência [50].

da energia escura. No próximo capítulo, será demonstrado os principais modelos e suas relações com os parâmetros cosmológicos.

CAPÍTULO 3

MODELOS COSMOLÓGICOS

No capítulo anterior iniciamos estudos sobre a dinâmica do Universo através da cosmologia padrão e descrevemos um pouco sobre esse modelo, denominado Λ CDM. Neste capítulo será abordado conceitos mais generalizados sobre este cenário e outros modelos que serão adotados nesta dissertação.

3.1 Modelo Λ CDM

É interpretado como o mais simples e que melhor prediz os dados observacionais, sendo moldado via conceitos da TRG e transformações inseridas pela métrica de FLRW. Assim mergulhamos em conclusões sobre o aspecto da natureza do Universo ser dominado por radiação ou matéria escura ou energia escura.

As característica mais importante do modelo Λ CDM está na expansão do Universo, logo ele possui uma dinâmica, o que significa uma variação do seu conteúdo material com tempo. Assim o modelo evolui de três formas distintas de acordo com sua curvatura:

- Geometria aberta (hiperbólica): o Universo se expande para sempre;
- Geometria plana: o Universo também se expande eternamente, com uma diferença da expansão no caso anterior, pois possui uma energia menor;
- Geometria fechada (esférica): a expansão do Universo tem um volume máximo sendo

depois deste ponto, iniciada uma redução do seu volume.

De forma generalizada, através da equação (2.18), podemos descrever a evolução dos constituintes do Universo para qualquer geometria. Utilizando as equações (2.16), (2.4) e dividindo pela densidade crítica podemos determinar:

$$\Omega_x = \Omega_{x_0}(1+z)^{3(\omega+1)}; \quad (3.1)$$

Se $\omega = 0 \Rightarrow$ o parâmetro de densidade da matéria evolui com o *redshift*:

$$\Omega_m = \Omega_{m_0}(1+z)^3; \quad (3.2)$$

Se $\omega = 1/3 \Rightarrow$ a evolução do parâmetro de densidade da radiação com *redshift* é dada por:

$$\Omega_r = \Omega_{r_0}(1+z)^4; \quad (3.3)$$

Se $\omega = -1 \Rightarrow$ do mesmo modo, encontramos que a evolução da densidade da constante cosmológica é definida da seguinte forma:

$$\Omega_\Lambda = \Omega_{\Lambda_0}. \quad (3.4)$$

Os parâmetros de densidade cominam numa equação de Hubble dependente de z , dada abaixo, [30]:

$$H(z) = \sqrt{\Omega_{r_0}(1+z)^4 + \Omega_{m_0}(1+z)^3 + \Omega_{k_0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda_0}}. \quad (3.5)$$

Note que a equação acima está escrita em termos do parâmetro de densidade da curvatura, dado pela equação (2.31) do capítulo anterior. Quando consideramos a geometria plana, encontramos

$$H(z) = \sqrt{\Omega_{r_0}(1+z)^4 + \Omega_{m_0}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}. \quad (3.6)$$

Resultados observacionais recentes têm indicado consistentemente que vivemos em um Universo aproximadamente plano, que se expande aceleradamente, composto de $\approx 1/4$

de matéria com pressão nula (bárions + escura) e $\approx 3/4$ de uma componente exótica com pressão negativa, usualmente chamada energia escura ou quintessência. Note que na equação (3.6) sua principal contribuição é considerar a constante cosmológica como causador da expansão acelerada do Universo, interpretada na maioria das vezes como energia do vácuo [52, 53].

Apesar do modelo Λ CDM ter muitos êxitos, ainda existe alguns problemas na literatura que não são resolvidos, como por exemplo: o problema da constante cosmológica e o problema da coincidência cósmica.

Resumindo o problema da constante cosmológica baseia-se, sem explicação, na diferença entre o pequeno valor da constante cosmológica observado com o seu valor teórico definido pela densidade de energia do vácuo ($\rho_{vac} \approx 10^{120} \rho_{obs}$) [54].

Já o problema da coincidência cósmica, é basicamente o fato de existir uma aproximação entre a densidade de energia do vácuo (ρ_{vac0}) e a densidade de matéria (ρ_{m0}) no Universo atual [55]. Ou seja, temos a seguinte razão,

$$\frac{\Omega_{\Lambda_0}}{\Omega_{m_0}} \approx 2.58. \quad (3.7)$$

Isto é particularmente estranho já que a evolução entre estas componentes varia (diferente) rapidamente à medida que o Universo se expande. De fato, no Universo primordial a energia do vácuo era desprezável em comparação com a matéria, enquanto que recentemente a situação é dominada pela a energia do vácuo.

3.2 Modelo XCDM

O modelo XCDM surgiu de uma alteração pequena do modelo padrão Λ CDM. Neste cenário descrevemos a energia escura como um fluido do tipo perfeito, com o parâmetro da equação de estado, ω , constante ao longo de toda dinâmica do Universo, em um intervalo $-1 \leq \omega \leq -1/3$, sendo que -1 corresponde a constante cosmológica. Isto basicamente implica que o Universo é composto de duas componentes que tem uma mistura de densidades dada por:

$$\rho = \rho_m + \rho_x. \quad (3.8)$$

Substituindo a equação (3.8) na (2.15) encontramos a seguinte relação de conservação

$$\dot{\rho}_x + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_x + p) = 0, \quad (3.9)$$

que resulta em

$$\rho_x(t) = \rho_{x,0}a(t)^{-3(1+\omega)}. \quad (3.10)$$

A equação de *Friedmann* para este modelo, com curvatura ($k \neq 0$), é dada por

$$H(z) = \sqrt{\Omega_{m_0}(1+z)^3 + \Omega_{x_0}(1+z)^{3(\omega+1)} + \Omega_k(1+z)^2}. \quad (3.11)$$

Para um Universo com geometria plana ($k = 0$), temos

$$H(z) = \sqrt{\Omega_{m_0}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{m_0})(1+z)^{3(\omega+1)}}. \quad (3.12)$$

Neste contexto podemos resolver os problemas de ajuste fino ou mesmo demonstrar que a aceleração do Universo é devido a uma substância que surgiu de decaimento dos campos quântico [56].

3.3 Modelo W_a CDM Oscilatório

Seguindo a ideia do modelo apresentado anteriormente, o modelo Oscilatório surge para tentar responder indagações que o modelo padrão, Λ CDM, não consegue responder [57]. Podemos descrever esse modelo como uma oscilação na variação da velocidade, onde o Universo desacelera e depois acelera. Neste Universo a equação tem parâmetro de estado

$$\omega_a = -\cos[\ln(a)]. \quad (3.13)$$

Podemos perceber que se $a = a_0 = 1$, então $\omega_a = -1$. A densidade de energia em função do tempo é descrita da seguinte forma

$$\rho(t) = \rho_0(1+z)^3 b(z), \quad (3.14)$$

onde $b(z) = e^{-3\sin[\ln(1+z)]}$ e pode ser entendido como uma grandeza que quantifica o quanto este modelo oscila em relação ao modelo Λ CDM. A dinâmica deste Universo, com $k \neq 0$, em função do *Redshift*,

$$H(z) = \sqrt{\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda}(1+z)^3 e^{-3\sin[\ln(1+z)]} + \Omega_k(1+z)^2} \quad (3.15)$$

e para $k = 0$, temos:

$$H(z) = \sqrt{\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda}(1+z)^3 e^{-3\sin[\ln(1+z)]}}. \quad (3.16)$$

3.4 Modelos Paramétricos

Parametrizar a equação de estado é uma ferramenta para investigar a dinâmica da energia escura. Uma forma de parametrizar $w(z)$ é por meio de séries de potências truncada no primeiro termo e com duas condições de contorno: no termo zero e na primeira ordem da derivada da função $x(z)$, dada por:

$$w(z) = w_0 + w_0' x(z). \quad (3.17)$$

Com os parâmetros da função de estado definida em (3.17), podemos descrever alguns casos que possam explicar a energia escura, como por exemplo a parametrização linear, CPL e entre outras.

3.4.1 PARAMETRIZAÇÃO LINEAR W_a CDM

A parametrização linear é uma boa aproximação em casos de baixos *redshift*. Compreendendo que sua origem seja dada por um campo escalar ou energia fantasma¹ $w(z)$ é descrita por

$$w(z) = w_0 + w_0' z, \quad (3.18)$$

¹A energia fantasma é definida para uma condição do parâmetro da equação de estado, ω , seja menor que -1 .

sendo que o caso particular para $w_0' = 0$ é a constante cosmologia, $w_0 = -1$. Contudo, isto deve ser uma função muito suave de z como definida no truncamento da função $x(z)$, o que implica que z tem uma boa aproximação em baixos intervalo de z . Surge então outra questão, quais valores z deve ter para uma boa aproximação de $w(z)$? Isto se dá devido a condição de subdominância da energia escura no passado, ou seja, sua densidade deve ser menor que a densidade de energia atual [58, 59].

A densidade de energia escura pode ser obtida, substituindo (3.18) em (2.17)

$$\rho_e(z) = \rho_{e0}(1+z)^{3(1+w_0)-w_0'} e^{3w_0'z}, \quad (3.19)$$

com a equação para $H(z)$ com curvatura ($k \neq 0$), dado por

$$H(z) = \sqrt{\Omega_r(1+z)^4 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_e(1+z)^{3(1+w_0)-w_0'} e^{3w_0'z}}. \quad (3.20)$$

Para um Universo com geometria plana ($k = 0$), temos

$$H(z) = \sqrt{\Omega_r(1+z)^4 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_e(1+z)^{3(1+w_0)-w_0'} e^{3w_0'z}}. \quad (3.21)$$

3.4.2 PARAMETRIZAÇÃO W_a CPL

A parametrização CPL $W(a)$ CDM possui uma equação de estado de energia escura variando com o tempo, por meio da descrição do parâmetro $w(a)$ abaixo, [60, 61],

$$w(a) = w_0 + w_a(1-a) = w_0 + w_a \frac{z}{1+z}. \quad (3.22)$$

Note que esta parametrização, diferente da parametrização linear, não tem limitações para o *redshift* no passado, ou seja, é uma função bem comportada para altos z , recuperando o caso anterior em baixos z .

Substituindo a equação acima na equação (2.15) encontramos

$$\rho(t) = \rho_0 a(t)^{-3[1+\omega_0+\omega_a]} e^{-3\omega_a[1-a(t)]}, \quad (3.23)$$

que matematicamente modifica também os parâmetros cosmológicos. Assim encontramos as dinâmicas para este Universo de acordo com a geometria:

Para $\Omega_k \neq 0$:

$$H(z)^2 = \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_e(1+z)^{-3[1+\omega_0+\omega_a]}e^{-3\omega_a[z/(1+z)]}. \quad (3.24)$$

Para $\Omega_k = 0$:

$$H(z)^2 = \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_e(1+z)^{-3[1+\omega_0+\omega_a]}e^{-3\omega_a[z/(1+z)]}. \quad (3.25)$$

Até o momento, descrevemos os principais conceitos sobre alguns modelos, dentro do contexto da TRG, que tentam produzir o comportamento da natureza do nosso Universo. No próximo capítulo, explanamos a estatística utilizada nesta dissertação a fim de testar e inferir informações das teorias descritas acima.

Todo cientista precisa testar se as suas teorias são precisas. Em outras palavras, eles precisam saber qual o cenário é mais adequado para descrever um certo sistema físico relacionado aos experimentos/dados. Na cosmologia, essa precisão, se faz através de algumas análises estatísticas que confronta o modelo teórico com as observações. Existem vários caminhos para se fazer esta quantificação e uma delas é dada pela Figura de Mérito, porém antes de mencionar este método, temos que implementar conceitos estatísticos mais básicos que vão ajudar a defini-la [62].

4.1 A *Likelihood* ou Verossimilhança

A função de verossimilhança ou *Likelihood* é descrita por uma distribuição de todas as variáveis envolvidas em um modelo. Por ser uma medida de Conformidade, é uma ferramenta estatística aplicada em varias áreas e tem por objetivo estimar os parâmetros livres de um determinado modelo teórico comparando com os dados observados¹.

Suponha que os dados possam ser representados por uma função de probabilidade $f(X; \theta)$: X é uma variável e θ representa os parâmetros ou apenas um, se for o caso. Descrevendo a função conhecida f , serão estimados os parâmetros representados por θ . Se tivermos (x_1, x_2, \dots, x_N) dados independentes e todos retirados da função $f(X; \theta)$ com

¹A verossimilhança máxima tem uma longa história. Foi derivada por *Bernoulli* em 1776 e por *Gauss* em torno de 1821, também foi detalhada por *Fisher* em 1912.

probabilidade

$$\begin{aligned}
 L(x_1, x_2, \dots, x_N) &= f(x_1, x_2, \dots, x_N | \theta) \\
 &= f(x_1 | \theta), f(x_2 | \theta) \dots, f(x_N | \theta) \\
 &= \prod_{i=1}^N f(x_i | \theta),
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde esta é conhecida como função de *Likelihood* ou verossimilhança [63].

Se f for como uma função gaussiana, podemos descrevê-la como uma função neperiana das variáveis e dos parâmetros com uma constante normalizada, dado pela equação abaixo,

$$f(x | \theta) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[x - \tilde{x}(\theta)]^2}{2\sigma^2}}, \tag{4.2}$$

onde x é o valor observado e $\tilde{x}(\theta)$ é o valor esperado, que leva em conta os parâmetros do modelo. Note que esta equação descreve a probabilidade de apenas um evento. Substituindo a equação (4.2) em (4.1) chegamos a função de *Likelihood*,

$$L(x | \theta) \propto e^{-\frac{[x - \tilde{x}(\theta)]^2}{2\sigma^2}}, \tag{4.3}$$

onde a estimativa máxima em relação aos parâmetros de interesse reflete a melhor estimativa da função. Normalmente utilizamos o logaritmo da *Likelihood*², $\ln L(\theta)$. Isto é usual, pois o valor máximo da função é também o mais provável³ numa gaussiana de N muito grande [64, 65]. Para determinar o estimador de máxima *likelihood* (L_{max}) em um parâmetro θ , resolvemos a equação abaixo,

$$\frac{dL(x | \theta)}{d\theta} = 0. \tag{4.4}$$

²Fazemos uso da definição do logaritmo quando queremos deixar a função mais suave, tornando-a mais fácil de analisar.

³O valor mais provável é descrito pelo teorema do Limite Central.

4.2 Método Qui-Quadrado

O teste qui-quadrado é a medida da distância entre as contagem observadas e as contagens esperadas em uma tabela de dupla entrada, dada pela equação abaixo:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{[x_i - \tilde{x}_i(\theta)]^2}{\sigma^2}. \quad (4.5)$$

Analisando a equação (4.5), podemos perceber que resultado da soma será sempre zero ou positiva, devido a soma ser quadrática. O que implica na seguinte consequência: se a soma tiver valor zero, então este tem grande precisão já que o valor esperado é igual ao valor observado. Mas por outro lado, se for grande, isto indica que este resultado está muito distante e o modelo não descreve bem os dados [66]. Portanto, se compararmos vários modelos com os dados, aquele que possuir o menor Qui-quadrado (χ_{min}^2) é supostamente o que possui melhor ajuste em relação aos dados observacionais.

Observe que χ^2 é o argumento da função de *likelihood*, assim podemos modificar o a equação (4.3) da seguinte forma,

$$L \propto \exp\left(\frac{-\chi^2}{2}\right), \quad (4.6)$$

ou seja, no caso gaussiano a L_{max} e χ_{min}^2 são idênticos.

4.2.1 MÉTODO QUI-QUADRADO REDUZIDO

O Qui-Quadrado Reduzido envolve o conceito de grau de liberdade, ν , definido como a diferença entre o número de pontos de uma determinada amostra (N_d) e o número de parâmetros livres (N_θ) do modelo que será testado. Ou seja,

$$\nu = N_d - N_\theta. \quad (4.7)$$

Para os melhores ajustes dos parâmetros, aplicamos a seguinte condição para o qui-quadrado reduzido, χ_{red}^2 ,

$$\chi_{red}^2 = \frac{\chi^2}{\nu} \approx 1. \quad (4.8)$$

Se ν é muito grande, assim como descritos em tópicos anteriores, assumimos que o χ_{red}^2 tem distribuição gaussiana [67]. Temos as seguintes condições:

Se χ_{red}^2 maior do que 1:

- O modelo está errado e pode ser rejeitado;
- Os erros são subestimados;
- Os erros de medição não são distribuídos de forma gaussiana.

Se χ_{red}^2 menor do que 1:

- Os erros foram superestimados;
- Os dados são correlacionados ou não independentes;
- A distribuição dos dados não é Gaussiana.

4.3 Matriz de Fisher

A matriz de informações de Fisher ou simplesmente matriz de Fisher é usada para calcular as matrizes de covariância associadas às estimativas de máxima verossimilhança. Aplicando a definição de serie de fourier poderom ter uma boa aproximação para inferir os erros dos parâmetros dado através de uma curva de normalização que descreve a *Likelihood* de determinados eventos. Essa aproximação é feita em sua derivada de segunda ordem, já que a derivada de primeira ordem é zero, pois esta está no máximo da função de distribuição. Com isso podemos determinar as estimativas de erros dada por:

$$\ln L = \ln L(\theta_0) + \frac{1}{2} \sum_{ij} (\theta_i - \theta_{i,0}) \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_i \partial \theta_j} |_{\theta_0} (\theta_j - \theta_{j,0}). \quad (4.9)$$

Podemos dizer que temos uma matriz Hessiana que relaciona os erros dos parâmetros e que descreve como estes parâmetros estão relacionados,

$$H_{ij} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_i \partial \theta_j}.$$

Lembrando que a função de máxima *Likelihood* pode ser escrita em função do qui-quadrado, equação (4.2), assim podemos encontrar a estimativa de erro de parâmetros relacionado ao χ^2 , dado pela equação abaixo

$$\chi^2 = \chi^2(\theta_0) + \frac{1}{2} \sum_{ij} (\theta_i - \theta_{i,0}) \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \Big|_{\theta_0} (\theta_j - \theta_{j,0}). \quad (4.10)$$

Agora analisemos uma situação de máxima *Likelihood* e que fixamos todos ou parâmetros, exceto um cujo erro possa ser descrito como $1/\sqrt{H_{ij}}$, chegamos a seguinte equação,

$$\langle \chi^2(\theta) \rangle = \langle \chi^2(\theta_0) \rangle + \left\langle \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right\rangle (\theta_i - \theta_0)^2. \quad (4.11)$$

O erro específico deste parâmetro que não foi fixado é dado pela matriz de Fisher calculado por:

$$F_{ij} = \left\langle \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right\rangle, \quad (4.12)$$

nesta equação têm intrinsecamente os valores esperados que vem do modelo e dos dados observacionais que são coletados em algum experimento.

O nível de certeza de um dado evento acontecer pode ser relacionado através da matriz de Fisher da seguinte maneira,

$$\Delta \chi^2 = F_{ij} (\theta_i - \theta_0)^2. \quad (4.13)$$

Quando $\Delta \chi^2 = 2.3$, temos que seu valor está em um nível de confiança de 68% e por $\sqrt{F_{ij}^{-1}}$ fornece o erro para o parâmetro θ_i . Portanto este erro gera uma imprecisão e assim temos uma probabilidade de $1 - \sigma$ [68]. Veja a tabela 4.1 para outros sigmas.

4.4 Figura de Mérito

Nas seções anteriores vimos diferentes técnicas relacionadas aos melhores ajustes dos parâmetros, porém estas não trazem tanta informação, a menos que haja suporte com técnicas auxiliares. Isto quer dizer que estes métodos não são totalmente confiáveis em termos de comparação entre modelos. A Figura de Mérito (*Figure of merit* - FoM) é uma grandeza que quantifica a incerteza e as flutuações do Método Qui-Quadrado.

A FoM pode ser definida como o inverso da área da região de confiança (espaço paramétrico que está sendo analisado), podendo ser associada em vários níveis de confiança: 1σ , 2σ e 3σ . Note que, por esta definição, quanto maior for a FoM, menor será a região do contorno de confiança e os parâmetros envolvidos serão mais restritos, ou seja, terão uma precisão maior. Na cosmologia fazemos uso da definição feita pelo projeto *Dark Energy Task Force* - DETF, [26]. É importante ressaltar que esta ferramenta matemática depende de alguns importantes conceitos já consolidados na estatística e pode ser generalizada a qualquer estudo. Por isso, requer uma construção específica de uma equação. Neste trabalho, as equações da FoM desenvolvidas para nosso estudo foram

$$FoM = \frac{1}{\sigma_x \cdot \sigma_y \sqrt{1 - \rho^2}}$$

e

$$FoM = \frac{1}{(\Delta\chi^2)_{ab}}.$$

As equações acima estão demonstradas no anexo I [(A.18) e (A.19)]. Elas têm relação com $(\Delta\chi^2)$ e o intervalo de confiança (CL) dada pela tabela abaixo:

σ	CL	$\Delta\chi^2$	α
1	68.3%	2.3	1.52
2	95.4%	6.17	2.48
3	99.7%	11.8	3.44

Tabela 4.1: Elipse de confiança.

Esta tabela mostra o grau de confiança que uma amostra ou mesmo um modelo tem em descrever um fenômeno físico. Os níveis de confiança que esta relacionado na Tabela (4.1) por α são uma forma de estimar a probabilidade que o parâmetro real esteja dentro de um intervalo considerado. Por exemplo, vamos considerar um modelo que tem

dois parâmetros θ_1 e θ_2 , se multiplicarmos estes por α encontramos uma região ou área de confiança que pode ser uma elipse. Veja como demonstração as figuras [A.3](#). O parâmetro ρ descreve a rotação da elipse.

Na literatura existem inúmeras aplicações do conceito de FoM, tais como: testar Modelos de Energia Escura [\[64\]](#); comparações úteis de diferentes experimentos de energia escura [\[69\]](#); determinar a partir de observações se a energia escura é uma constante cosmológica ou não, com atenção especial para a melhor equação determinada de valor de estado [\[70\]](#); ou até mesmo no nosso caso, como podemos dizer o quanto um determinado modelo cosmológico é mais preciso a luz dos dados. Em todos os casos é desenvolvido uma formula para FoM em questão e se escolhe os parâmetros que se deseja quantificar.

Neste capítulo abordamos alguns métodos estatísticos que são utilizados para inferir quais os cenários cosmológicos são mais adequados para descrever medidas observacionais. Assim, podemos determinar os melhores ajustes dos parâmetros relacionados a cosmologia que descreve a dinâmica do Universo atual.

CAPÍTULO 5

DADOS OBSERVADOS/SIMULADOS E RESULTADOS

Ultimamente, um avanço considerável na astronomia observacional tem contribuído para uma mudança quantitativa e qualitativa do nosso entendimento sobre o Universo. Isto nos impulsiona a buscar métodos que visem analisar como devem ser a configuração dos dados observacionais futuros a fim de melhorar, cada vez mais, este panorama. A seguir, discutiremos como dados de idades de galáxias em altos *redshifts* podem contribuir nesta análise.

5.1 Dados Observados - idades galáxias

Em nossas análises estatísticas, nós utilizamos uma amostra de idade constituída por 32 galáxias distribuídas no intervalo de *redshift* $0.11 \leq z \leq 1.84$, dada pela referência [71] - figura. A amostra total é constituída por 3 sub-classes: galáxias de campo do tipo *early* [72, 73], (cujas idades foram obtidas utilizando os modelos SPEED da Ref. [74]); 20 galáxias vermelhas do survey Gemini Deep Deep Survey - GDDS [75]; e duas rádio galáxias LBDS 53W091 e LBDS 53W069 [76, 77]. Na figura 5.1 apresentamos as idades dessas galáxias em função do *redshift*. A barra de erro corresponde a uma incerteza de 10% na medida dessas observações.

Um ponto importante dos testes envolvendo idades de um determinado objeto no Universo é que se precisa levar em conta o tempo que o objeto demorou para se formar.

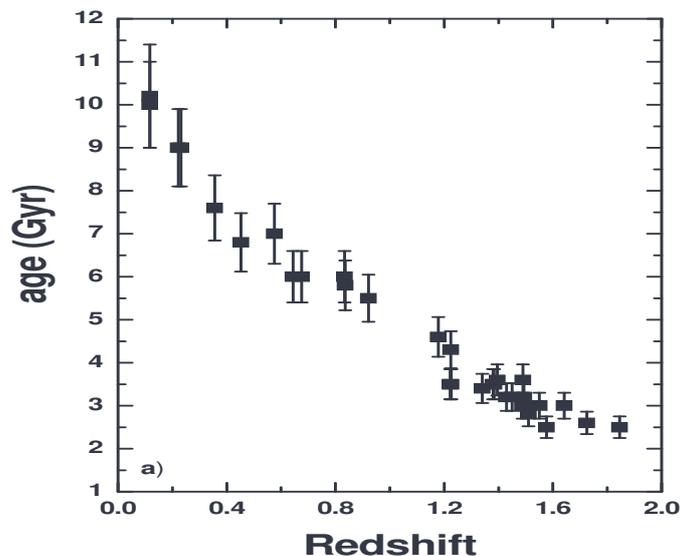


Figura 5.1: Esta amostra corresponde a 32 galáxias, distribuídas no intervalo de $redshift\ 0.11z \leq 1.84$ e inclui observações do GDDS [77] e dados arquivados [78,79].

Portanto a idade real de uma galáxia é dada por

$$t_{real}(z) = t_{obs}(z) + \tau, \quad (5.1)$$

onde τ é o tempo de incubação ou *delay factor*, que corresponde à nossa ignorância sobre a quantidade de tempo desde o início do processo de formação de estruturas do Universo até a formação (t_f) do objeto (veja também a referência [78] e [79] para uma discussão). Devido à nossa ignorância sobre este parâmetro, é comum efetuar uma marginalização¹ analítica sobre o χ^2 dos dados de $t(z)$ com respeito ao mesmo. Tal procedimento pode ser realizado conforme descrito na referência [80], onde foi assumido o mesmo τ para todos os dados da amostra, ou então relaxando esta imposição e considerando um τ distinto para cada um de seus pontos. Recentemente, Wei et al. (2015) obteve $\tau = 1.36Gyr$ e $\tau = 1.62Gyr$ considerando esta amostra no modelo Λ CDM com geometria plana e com os parâmetros H_0 e Ω_m livres e variandos [81]. No nosso caso assumimos um valor fixo de $\tau = 1.5Gyr$ que é dado pela média entre estes intervalos.

¹A marginalização é uma ferramenta bayesiana e, por definição, é também um procedimento pelo qual podemos eliminar um parâmetro, a fim de estudarmos outros parâmetros de forma independente. Portanto, ela nos permite eliminar da distribuição de probabilidade a dependência de uma determinada variável através da integração sobre ela.

5.2 Amostras Simulada

Para construir as nossas amostras seguimos a metodologia apresentada por Bengally *et. al.*, [82], utilizando o Método de Monte Carlo (MMC) para aumentar nossos números de dados em cada amostra, para maiores detalhes veja as a referência [83], e a inferência estatística para cálculo dos erros da FoM por meio de dados gerados pelo MMC. As amostras sintéticas de $t(z)$ estão de acordo com uma distribuição Gaussiana centrada em um modelo fiducial Λ CDM plano com $\Omega_m = 0.27$ e $H_0 = 73.52 \text{ km/s/Mpc}$, valores consistentes com os melhores ajustes obtidos via medidas das observações de variáveis tipos cefeidas e Snc Ia pela colaboração SHOES [29], de tal modo que o desvio padrão desta distribuição de probabilidade corresponde ao erro percentual das determinações de $t(z)$.

De acordo com informações fornecidas pelas missões observacionais futuras, tais como o Atacama Cosmology Telescope (ACT) no Chile e Southern African Large Telescope (SALT) na África do Sul, é esperado uma amostra de até 2000 galáxias velhas observadas em um intervalo de $0 < z < 1,5$, com 10% de incerteza sobre as suas determinações de idade. Baseadas nestas previsões, nossas realizações serão divididas em grupos de 100 a 2000 pontos (variando em 100) uniformemente distribuídos neste intervalo de *redshift*. Diferente da referência [82] que adotou erros de $\sigma_t = 5\%$ e 10% do valor de $t(z)$ fiducial, nós adotamos apenas um erro de 10% , também consistente com as previsões destes futuros surveys. Na figura 5.2 temos exemplos destas amostras sintéticas.

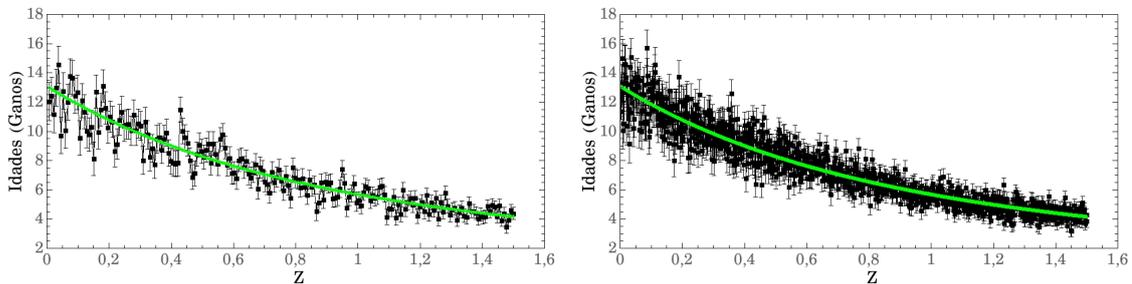


Figura 5.2: Exemplos de nossas amostras simuladas de idade de galáxias com $N = 200, 1000$ pontos, respectivamente, medidas em bilhões de anos (Ganos), versus o *redshift*, z . Foi adotado um erro, $\sigma_t = 10\%$. Em ambos os gráficos a linha sólida verde representa o modelo fiducial no qual baseiam-se as simulações.

5.3 Resultados

Nesta seção apresentaremos os nossos principais resultados provenientes da metodologia utilizada neste trabalho. A figura 5.3 mostra, por motivo de comparação, a figura de mérito em função do número de pontos das amostras simuladas de $t(z)$ obtidas para a parametrização W_aCPL (descrita na seção 3.4.2). As linhas sólidas vermelhas e azuis representam os dados observacionais de idades e SNe Ia, respectivamente. As linhas tracejadas referem-se as análises combinadas destes com os dados de BAO (*Baryon Acoustic Oscillations*). Os quadrados representam as FoM obtidas para as amostras de $t(z)$, enquanto os círculos são as análises combinadas de $t(z)$ + BAO, [84]. Note que a escala do eixo da abscissas estão em uma escala logarítmica.

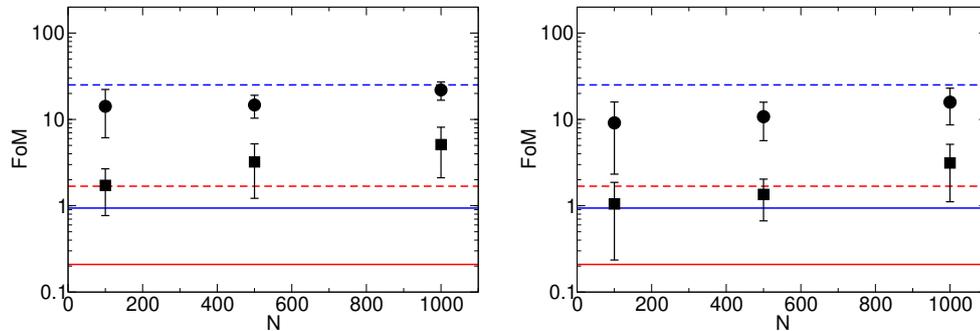


Figura 5.3: FoM versus N . O número de pontos das amostras simuladas de $t(z)$ obtidas para o modelo W_aCPL considerando um erro de 5% (esquerda) e 10% (direita), na amostra observada [78].

5.3.1 MELHORES AJUSTES

Na tabela 5.1, apresentamos os primeiros resultados das nossas análises estatísticas. Os melhores ajustes para os parâmetros livres de alguns modelos cosmológicos: a primeira coluna temos o modelos testado; na segunda coluna o χ^2_{min} , na terceira temos o χ^2_{red} que está relacionado com número de graus de liberdade ν e na quarta coluna os melhores ajustes e os seus respectivos erros (1σ). Note que os resultados dos testes χ^2 , embora não muito restritivos, quando consideramos os limites inferiores para os valores de Ω_m , são consistentes com os valores recentes encontrados na literatura.

Os modelos $\Lambda\text{CDM}_{k \neq 0}$ e $\Lambda\text{CDM}_{k=0}$ foram acrescentado nestas análises somente por efeitos comparativos, pois não serão utilizados na análise da FoM. Como foi comentada

Modelos	χ^2_{min}	χ^2_{red}	parâmetros livres
$XCDM_{k=0}$	23,07	0,77	$\Omega_{m_0} = 0,49 \pm 0,22$ e $\omega = -2,23^{+0,32}_{-0,21}$
$W_aCDM_{k=0}$ Oscil.	19,51	0,65	$\Omega_{m_0} = 0,46^{+0,12}_{-0,21}$ e $b = 0,44 \pm 0,04$
$\Lambda CDM_{k \neq 0}$	25,31	0,84	$\Omega_{m_0} = 0,48^{+0,20}_{-0,31}$ e $\Omega_{k_0} = 0,01 \pm 0,0021$
$\Lambda CDM_{k=0}$	25,24	0,81	$\Omega_{m_0} = 0,47 \pm 0,21$

Tabela 5.1: Resultados dos melhores ajustes dos parâmetros livres. Tabela reproduzida pelo Autor.

na sessão anterior, esta categoria de modelo foi tomado como fiducial nas simulações das amostras sintéticas.

Nas duas tabelas 5.2 e 5.3, também por completeza, mostramos os nossos melhores ajustes dos parâmetros livres dos dois modelos cosmológicos adotados nessas dissertação para cada amostras simulada.

Amostras	χ^2_{min}	Ω_m	ω
100	116,11	0,23	-0,70
300	284,44	0,28	-1,16
500	467,69	0,26	-0,90
800	874,58	0,26	-0,91
1000	984,30	0,27	-1,03
1200	1177,60	0,27	-0,99
1400	1497,99	0,27	-1,05
1600	1576,66	0,27	-1,03
1800	1650,85	0,27	-1,02
2000	2092,31	0,27	-0,99

Tabela 5.2: Resultados dos melhores ajustes dos parâmetros livres do Modelo $XCDM_{k=0}$. Tabela reproduzida pelo Autor.

Amostras	χ^2_{min}	Ω_m	b
100	122,36	0,22	0,57
300	285,67	0,24	0,62
500	469,38	0,26	0,65
800	879,22	0,26	0,71
1000	985,87	0,27	0,72
1200	1178,43	0,26	0,74
1400	1504,97	0,26	0,74
1600	1579,99	0,270	0,75
1800	1722,94	0,270	0,77
2000	2093,05	0,270	0,78

Tabela 5.3: Resultados dos melhores ajustes dos parâmetros livres do Modelo $XCDM_{k=0}$ Oscilatório. Tabela reproduzida pelo Autor.

Em ambos os modelos quando se analisa o valor de Ω_m para as amostras simuladas, percebe-se que este parâmetro tem um valor que se aproxima de 0.27 para a amostra com um número alto de pontos. Observe também que no caso do modelo $W_a\text{CDM}_{k=0}$ Oscilatório, encontramos um melhor ajuste para $b = 0,44$ (variando de 0,40 até 0,48 em 1σ). Como comentado anteriormente este modelo oscila em torno do modelo ΛCDM . Esta oscilação pode ser quantificado por este parâmetro b . Portanto, para este modelo e com estes dados atuais envolvendo datação de galáxias em altos *redshifts* nos diz que este modelo oscila do modelo padrão em torno de 60% (limite inferior) e 52% (limite superior). Em relação a amostra simulada de 2000 pontos, encontramos que no melhor ajuste $b = 0,78$, nos indicando que a oscilação deste modelo em torno do modelo padrão é de apenas de 22% .

5.3.2 FoM

Calculamos a FoM definida de acordo com a equação (A.19) para os dados simulados e os cenários cosmológicos adotados. Ilustramos estes resultados para os modelos $X\text{CDM}_{k=0}$ e $W_a\text{CDM}_{k=0}$ Oscilatório nas figuras 5.4 e 5.5, respectivamente. Em ambas análises foram calculadas a FoM para 1σ (vermelho) e 2σ (preto). As linhas tracejadas correspondem as FoM para as observações reais.

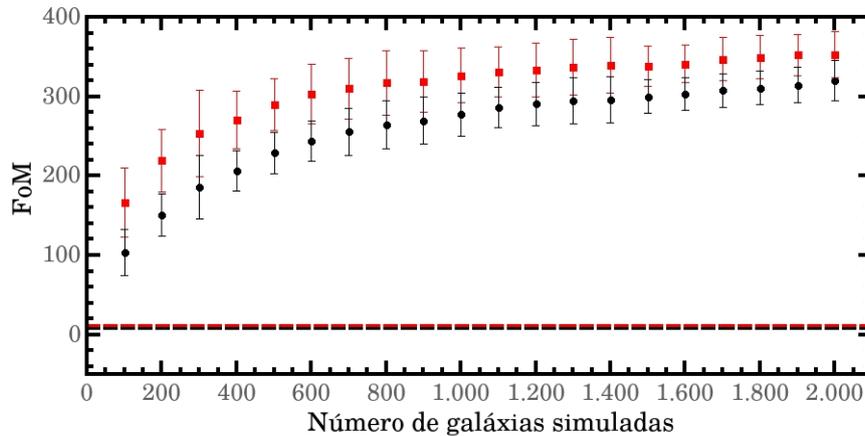


Figura 5.4: **Modelo $X\text{CDM}_{k=0}$** : FoM versus o número de pontos de galáxias sintéticas. Figura reproduzida pelo Autor.

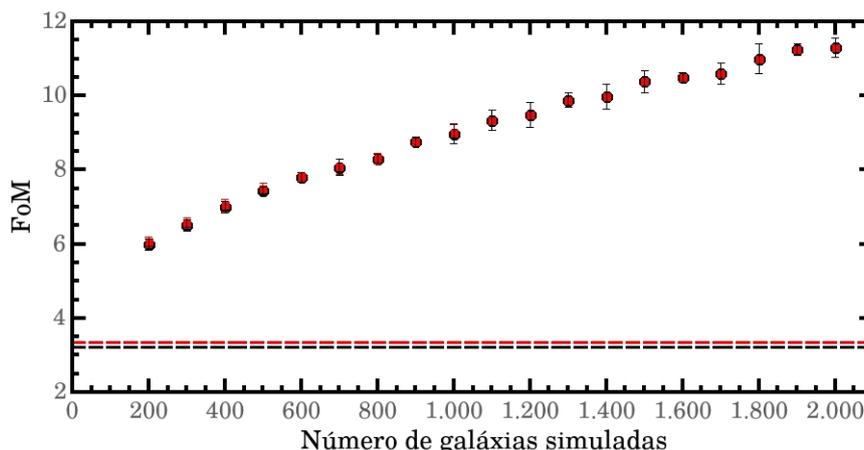


Figura 5.5: **Modelo $W_a\text{CDM}_{k=0}$ Oscilatório:** FoM versus o número de pontos de galáxias sintéticas. Figura reproduzida pelo Autor.

Para encontrar os erros das FoMs, fizemos para cada amostra 30 realizações e ao final calculamos a média e o desvio padrão destas realizações. Todas estas análises da FoM foram feitas através do método de Monte Carlo implementado na linguagem de computação adotada denominada FORTRAN.

De acordo com os resultados das figuras 5.4 e 5.5 podemos concluir que, sem dúvida, a FoM é uma ferramenta bastante promissora. Note que em ambos os casos dos cenários testados o valor da FoM aumentou a medida que o número de ponto aumentou. Isso também aconteceu com os resultados da referência [84], porém eles só simularam até 1000 galáxias. Como o nosso intuito era fazer uma previsão do que se espera nas próximas décadas sobre a quantidade de idade de galáxias observadas, fomos um pouquinho mais otimista e simulamos 2000. Podemos acrescentar que isto era um resultado esperado, visto que a FoM é inversa da área (região de contorno dos espaço paramétricos). Em suma, quanto mais dados, mais restritos serão os níveis de confiança e a FoM será maior.

Assim enfatizamos que FoM pode ser utilizada para confrontar o potencial restritivo das realizações de $t(z)$ frente às amostras observacionais disponíveis no momento. Isto mostra que os dados de $t(z)$, caso apresentem estas configurações no futuro, serão dados competitivos e confiáveis à nossa disposição.

Neste trabalho fizemos uma explanação teórica sobre o conceito de figura de mérito e apresentamos alguns métodos para sua determinação. Por se tratar de um método que quantifica determinadas grandezas ela é de fundamental importância na caracterização de modelos cosmológicos. Investigamos a possibilidade de encontrar limites através da técnica χ^2 e depois relacionamos com a matriz de Fisher com o intuito de encontrar a FoM para cada cenário cosmológico.

Considerando os resultados dos testes χ^2 , apresentados na tabela 5.1 obtidos a partir destas análises, embora com poucas restritivas, quando levamos em conta os limites inferiores para os valores de Ω_m , percebemos a consistência com os valores recentes encontrados na literatura. Em ambos os modelos quando se analisa o valor de Ω_m para as amostras simuladas, percebe-se que ele tem um valor que se aproxima de 0.27 para um número alto de pontos.

No caso do modelo $W_a\text{CDM}_k = 0$ Oscilatório, encontramos um melhor ajuste para $b = 0,44$ (variando de 0,40 até 0,48 em 1σ). Como comentado anteriormente este modelo oscila em torno do modelo ΛCDM . Esta oscilação pode ser quantificado por este parâmetro b . Portanto, para este modelo e com estes dados atuais envolvendo datação de galáxias em altos *redshifts* nos diz que este modelo oscila do modelo padrão em torno de 60% (limite inferior) e 52% (limite superior). Em relação a amostra simulada de 2000 pontos, encontramos que no melhor ajuste $b = 0,78$, nos indicando que a oscilação deste modelo em torno do modelo padrão é de apenas de 22% .

Para a FoM podemos concluir que, sem dúvida, ela é uma ferramenta bastante promissora. Note que em ambos os casos dos cenários testados o valor da FoM aumentou a medida que o número de ponto aumentou. Isso também aconteceu com os resultados da referência [84], porém eles só simularam até 1000 galáxias. Como o nosso intuito era fazer uma previsão do que se espera nas próximas décadas sobre a quantidade de idade de galáxias observadas, fomos um pouquinho mais otimista e simulamos 2000. Podemos acrescentar que isto era um resultado esperado, visto que a FoM é inversa da área (região de contorno dos espaço paramétricos). Em suma, quanto mais dados, mais restritos serão os níveis de confiança e a FoM será maior, como mostrado nos gráficos 5.4 e 5.5. Assim enfatizamos que FoM pode ser utilizada para confrontar o potencial restritivo das realizações de $t(z)$ frente às amostras observacionais disponíveis no momento. Isto mostra que os dados de $t(z)$, caso apresentem estas configurações no futuro, serão dados competitivos e confiáveis à nossa disposição.

Como perspectivas para esta dissertação, podemos acrescentar outros observáveis cosmológicos a nossa análise como RCF, BAO, SNe, fração de massa do gás, *Lookback Time*, etc. Com isso teremos um teste de análise conjunta, envolvendo observações cosmológicas baseadas em medidas de tempo e de distância. Também precisamos melhorar nossa análise estatística apresentada para os erros encontrados para a FoM. Outros pontos que precisamos desenvolver no futuro são destacados abaixo.

- Trabalhar com valores diferentes para H_0 ou fazer uma marginalização sobre ele; Uma outra opção interessante é deixar este parâmetro livre e vinculá-lo a partir dos dados. No entanto, aumentaríamos o nosso espaço paramétrico. Ou seja, acrescentaríamos um outro parâmetro livre as nossas análises;
- Verificar o que acontece com os nossos resultados quando deixamos o valor do tempo de incubação, τ livre ou quando marginaliza-lo;
- Testar a viabilidade deste método com outros modelos cosmológicos, como por exemplo a parametrização W_a CDM Linear (descrita na seção 3.4.1);
- Encontrar os erros das amostras simuladas e mostrar as regiões de contorno em cada espaço paramétrico para as amostras reais e simuladas. Isto será bastante útil para ilustrar, mais uma vez, que a FoM é uma técnica viável. Com estas regiões,

poderemos também confirmar as correlações entres os parâmetros livres de cada cenário, calculadas através do coeficiente de correlação ρ dado na determinação da equação (A.17);

Destacamos que atualmente é notável o aumento dos testes estatísticos com vários observáveis juntamente com a ampliação e atualização dos catálogos. Isto é extremamente interessante porque nos propicia um *review* de todos os modelos trabalhados na literatura, analisando se perante os dados atuais são capazes de vincular parâmetros ou se são descartados.

Por fim, nós enfatizamos a importância de medidas mais precisas de idade de objetos em altos- z . Enquanto os dados atuais idades- z por si só não são capazes de discriminar fortemente entre diferentes modelos cosmológicos, observações futuras fornecendo um novo conjunto de maior qualidade de medidas de idade em altos *redshifts* serão muito úteis no estreitamento da gama de modelos cosmológicos viáveis.

REFERÊNCIAS

- [1] EINSTEIN, A. The field equations of gravitation. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, v. 1915, p. 844–847, 1915.
- [2] EINSTEIN, A. Considerações cosmológicas na teoria geral da relatividade. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, v. 1917, p. 142–152, 1917.
- [3] SITTER, W. D. On the relativity of inertia. remarks concerning einstein's latest hypothesis. *Proc. Kon. Ned. Acad. Wet.*, v. 19, n. 2, p. 1217–1225, 1917.
- [4] FRIEDMAN, A. Über die krümmung des raumes. *Zeitschrift für Physik*, Springer-Verlag, v. 10, n. 1, p. 377–386, 1922.
- [5] GAMOW, G.; ALPHER, R. A.; HERMAN, R. My world line: An informal autobiography. *PhT*, v. 24, n. 3, p. 51, 1971.
- [6] LEMAÎTRE, G. Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques. In: *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*. [S.l.: s.n.], 1927. v. 47, p. 49–59.
- [7] HUBBLE, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the national academy of sciences*, National Acad Sciences, v. 15, n. 3, p. 168–173, 1929.
- [8] GAMOW, G. Erratum: Expanding universe and the origin of elements [phys. rev. 70, 572-573 (1946)]. *Physical Review*, APS, v. 71, n. 4, p. 273, 1947.

- [9] PENZIAS, A. A.; WILSON, R. W. A measurement of excess antenna temperature at 4080 mc/s. *The Astrophysical Journal*, v. 142, p. 419–421, 1965.
- [10] MATHER, J. C. et al. Calibrator design for the COBE* far infrared absolute spectrophotometer (FIRAS). *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 512, n. 2, p. 511, 1999.
- [11] SMOOT, G. F. et al. Structure in the COBE differential microwave radiometer first-year maps. *The Astrophysical Journal*, v. 396, p. L1–L5, 1992.
- [12] PEEBLES, P. J. E.; RATRA, B. The cosmological constant and dark energy. *Reviews of modern physics*, APS, v. 75, n. 2, p. 559, 2003.
- [13] RIESS, A. G. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, IOP Publishing, v. 116, n. 3, p. 1009, 1998.
- [14] PERLMUTTER, S. et al. Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 517, n. 2, p. 565, 1999.
- [15] ABBOTT, B. P. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical review letters*, APS, v. 116, n. 6, p. 061102, 2016.
- [16] WEINBERG, S. *Cosmology and Gravitation, 1972*. [S.l.]: John Wiley, NY.
- [17] PEEBLES, P. Tests of cosmological models constrained by inflation. *This page is intentionally left blank*, p. 84, 1984.
- [18] CALDWELL, R. R.; KAMIONKOWSKI, M.; WEINBERG, N. N. Phantom energy: dark energy with $w < -1$ causes a cosmic doomsday. *Physical Review Letters*, APS, v. 91, n. 7, p. 071301, 2003.
- [19] TOLMAN, R. C. *Relativity, thermodynamics, and cosmology*. [S.l.]: Courier Corporation, 1987.
- [20] RATRA, B.; PEEBLES, P. J. Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field. *Physical Review D*, APS, v. 37, n. 12, p. 3406, 1988.

- [21] KAMENSHCHIK, A.; MOSCHELLA, U.; PASQUIER, V. *Int. J. Phys. Lett. B* 511, 265 (2001); mc bento, o. bertolami, aa sen. *Phys. Rev. D*, v. 66, p. 043507, 2002.
- [22] ÖZER, M.; TAHA, M. A possible solution to the main cosmological problems. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 171, n. 4, p. 363–365, 1986.
- [23] SHIROMIZU, T. K. i. maeda and m. sasaki. *Phys. Rev. D*, v. 62, n. 024012, p. 123, 2000.
- [24] FREESE, K.; LEWIS, M. Cardassian expansion: a model in which the universe is flat, matter dominated, and accelerating. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 540, n. 1-2, p. 1–8, 2002.
- [25] WEYL, H. Eine neue erweiterung der relativitaetstheorie. *Annalen der Physik*, Wiley Online Library, v. 364, n. 10, p. 101–133, 1919.
- [26] FORCE, D. E. T. Report of the dark energy task force. *Available online from NSF*, 2006.
- [27] KANT, I. *Allgemeine naturgeschichte und theorie des himmels*. [S.l.: s.n.], 1797.
- [28] AGHANIM, N. et al. Planck 2018 results-vi. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, EDP sciences, v. 641, p. A6, 2020.
- [29] RIESS, A. G. et al. Large magellanic cloud cepheid standards provide a 1% foundation for the determination of the hubble constant and stronger evidence for physics beyond λ cdm. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 876, n. 1, p. 85, 2019.
- [30] DODELSON, S. *Modern cosmology*. [S.l.]: Elsevier, 2003.
- [31] RIESS, A. G. et al. A 3% solution: determination of the hubble constant with the hubble space telescope and wide field camera 3. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 730, n. 2, p. 119, 2011.
- [32] SOUZA, R. E. D. *Introdução à cosmologia*. [S.l.]: Edusp, 2004.
- [33] WEINBERG, S. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. [S.l.]: Wiley New York, 1972. v. 1.

- [34] GAMOW, G. Expanding universe and the origin of elements. *Physical Review*, APS, v. 70, n. 7-8, p. 572, 1946.
- [35] HINSHAW, G. et al. Nine-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: cosmological parameter results. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, IOP Publishing, v. 208, n. 2, p. 19, 2013.
- [36] BURLES, S.; NOLLETT, K. M.; TURNER, M. S. Big bang nucleosynthesis predictions for precision cosmology. *The Astrophysical Journal Letters*, IOP Publishing, v. 552, n. 1, p. L1, 2001.
- [37] RYDEN, B. *Introduction to cosmology*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2017.
- [38] HORVATH, J.; ALLEN, M. P. *Cosmologia física: do micro ao macro cosmos e vice-versa*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2007.
- [39] FIXSEN, D. et al. The cosmic microwave background spectrum from the full coBE* firas data set. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 473, n. 2, p. 576, 1996.
- [40] PEEBLES, P. J. E. *Physical cosmology*. [S.l.]: Princeton University Press, 2015.
- [41] HINSHAW, G. et al. First-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap)* observations: The angular power spectrum. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, IOP Publishing, v. 148, n. 1, p. 135, 2003.
- [42] ADE, P. A. et al. Planck 2013 results. xv. cmb power spectra and likelihood. *Astronomy & Astrophysics*, EDP sciences, v. 571, p. A15, 2014.
- [43] First-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) determination of cosmological parameters. v. 148.
- [44] SMOOT, G. F. et al. Structure in the coBE differential microwave radiometer first-year maps. *The Astrophysical Journal*, v. 396, p. L1–L5, 1992.
- [45] LOBACHEVSKY, N. I. On the foundations of geometry. *Kazan Messenger*, v. 25, p. 28, 1829.
- [46] LAMBOURNE, R. J. *Relativity, gravitation and cosmology*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010.

- [47] LIDDLE, A. *An introduction to modern cosmology*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2015.
- [48] FRIEMAN, J. A.; TURNER, M. S.; HUTERER, D. Dark energy and the accelerating universe. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, Annual Reviews, v. 46, p. 385–432, 2008.
- [49] PEEBLES, P. *Principles of Physical Cosmology, 1993, Princeton Univ.* [S.l.]: Press.
- [50] BARBUY, B. A idade, a massa e a expansão do universo. *Revista USP*, n. 62, p. 194–199, 2004.
- [51] MAIA, D.; CRAWFORD, P. Idade do universo, velocidades de recessão e horizontes nos modelos de big bang. Universidade de Lisboa.
- [52] ADE, P. A. et al. Planck 2015 results-xiii. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, EDP sciences, v. 594, p. A13, 2016.
- [53] HINSHAW, G. et al. Five-year wilkinson microwave anisotropy probe* observations: data processing, sky maps, and basic results. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, IOP Publishing, v. 180, n. 2, p. 225, 2009.
- [54] ZEL'DOVICH, Y. B. The cosmological constant and the theory of elementary particles. *Soviet Physics Uspekhi*, IOP Publishing, v. 11, n. 3, p. 381, 1968.
- [55] DUNKLEY, J. et al. Five-year wilkinson microwave anisotropy probe* observations: Likelihoods and parameters from the wmap data. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, IOP Publishing, v. 180, n. 2, p. 306, 2009.
- [56] TURNER, M. S.; WHITE, M. Cdm models with a smooth component. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 56, p. R4439–R4443, Oct 1997. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.56.R4439>>.
- [57] ZHANG, T.-J. et al. The constraint ability of hubble parameter by gravitational wave standard sirens on cosmological parameters. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 79, n. 11, p. 900, 2019.
- [58] COORAY, A. R.; HUTERER, D. Gravitational lensing as a probe of quintessence. *The Astrophysical Journal Letters*, IOP Publishing, v. 513, n. 2, p. L95, 1999.

- [59] WELLER, J.; ALBRECHT, A. Future supernovae observations as a probe of dark energy. *Physical Review D*, APS, v. 65, n. 10, p. 103512, 2002.
- [60] CHEVALLIER, M.; POLARSKI, D. Accelerating universes with scaling dark matter. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 10, n. 02, p. 213–223, 2001.
- [61] LINDER, E. V. Paths of quintessence. *Physical Review D*, APS, v. 73, n. 6, p. 063010, 2006.
- [62] TROTTA, R. Bayesian methods in cosmology. *arXiv preprint arXiv:1701.01467*, 2017.
- [63] WALL, J. V.; JENKINS, C. R. *Practical statistics for astronomers*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2012.
- [64] MOURA, Í. K. F. *Testes cosmológicos aplicados a modelos de energia escura*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2016.
- [65] VERDE, L. Statistical methods in cosmology. In: *Lectures on Cosmology*. [S.l.]: Springer, 2010. p. 147–177.
- [66] MOORE, D. S.; NOTZ, W. I.; FLIGNER, M. A. *A estatística básica e sua prática*. [S.l.]: Grupo Gen-LTC, 2000.
- [67] PEACOCK, J. astronomical statistics. Royal Observatory Edinburgh, 2012.
- [68] VERDE, L. Statistical methods in cosmology. In: *Lectures on Cosmology*. [S.l.]: Springer, 2010. p. 147–177.
- [69] WANG, Y. Figure of merit for dark energy constraints from current observational data. *Physical Review D*, APS, v. 77, n. 12, p. 123525, 2008.
- [70] LINDER, E. V. Biased cosmology: Pivots, parameters, and figures of merit. *Astroparticle Physics*, Elsevier, v. 26, n. 2, p. 102–110, 2006.
- [71] SIMON, J.; VERDE, L.; JIMENEZ, R. Constraints on the redshift dependence of the dark energy potential. *Physical Review D*, APS, v. 71, n. 12, p. 123001, 2005.

- [72] SAVAGE, C.; SUGIYAMA, N.; FREESE, K. The age of the universe in cardassian models. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2005, n. 10, p. 007, 2005.
- [73] DORAN, M.; STERN, S.; THOMMES, E. Baryon acoustic oscillations and dynamical dark energy. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, IOP Publishing, v. 2007, n. 04, p. 015, 2007.
- [74] KOMATSU, E. et al. Five-year wilkinson microwave anisotropy probe* observations: cosmological interpretation. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, IOP Publishing, v. 180, n. 2, p. 330, 2009.
- [75] ABRAHAM, R. G. et al. The gemini deep deep survey. i. introduction to the survey, catalogs, and composite spectra. *The Astronomical Journal*, IOP Publishing, v. 127, n. 5, p. 2455, 2004.
- [76] PERCIVAL, W. J. et al. Baryon acoustic oscillations in the sloan digital sky survey data release 7 galaxy sample. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Blackwell Publishing Ltd Oxford, UK, v. 401, n. 4, p. 2148–2168, 2010.
- [77] JASSAL, H.; BAGLA, J.; PADMANABHAN, T. arXiv:0601.389.
- [78] CAPOZZIELLO, S. et al. Constraining dark energy models using the lookback time to galaxy clusters and the age of the universe. *Physical Review D*, APS, v. 70, n. 12, p. 123501, 2004.
- [79] PIRES, N.; ZHU, Z.-H.; ALCANIZ, J. S. Lookback time as a test for brane cosmology. *Physical Review D*, APS, v. 73, n. 12, p. 123530, 2006.
- [80] ASTRONOMIA, M. em. *Galáxias em altos redshifts e a natureza da energia escura*. Tese (Doutorado) — Observatório Nacional, 2007.
- [81] WEI, J.-J. et al. The age–redshift relationship of old passive galaxies. *The Astronomical Journal*, IOP Publishing, v. 150, n. 1, p. 35, 2015.
- [82] BENGALY, C. et al. Forecasting cosmological constraints from age of high-z galaxies. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 561, p. A44, 2014.

-
- [83] PRESS, W. H. et al. *Numerical recipes 3rd edition: The art of scientific computing*. [S.l.]: Cambridge university press, 2007.
- [84] BENGALY, C. et al. Forecasting cosmological constraints from age of high-z galaxies. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 561, p. A44, 2014.
- [85] BOULOS, P.; CAMARGO, I. *Geometria Analítica-Um tratamento vetorial*. São Paulo: Ed. [S.l.]: Prentice Hall Brasil, 2005.
- [86] CAMPOLINO, M. L. Translação e rotação de cônicas em r^2 . 2014.
- [87] COE, D. Fisher matrices and confidence ellipses: a quick-start guide and software. *arXiv preprint arXiv:0906.4123*, 2009.

ANEXO A

Demonstração do Cálculo da Figura de Mérito - FoM

Neste anexo, serão ilustrados os passos para o cálculo da figura de mérito de acordo com referência [85]. Para tal, encontraremos os coeficientes A_1 e A_2 da equação

$$A_1 u_1^2 + A_2 v_1^2 + F' = 0, \quad (\text{A.1})$$

através de uma **translação** e **rotação** da cônica abaixo:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (\text{A.2})$$

TRANSLAÇÃO

Nesta parte a translação será utilizada para eliminarmos os termos de 1° grau Dx e Ey , como pode ser visto na figura [A.1](#), chegando a uma expressão da seguinte maneira,

$$Au^2 + Buv + Cv^2 + F' = 0. \quad (\text{A.3})$$

Partindo da equação (A.2) e substituindo $x = u + h$ e $y = v + k$, encontramos a seguinte relação:

$$A(u + h)^2 + B(u + h)(v + k) + C(v + k)^2 + D(u + h) + E(v + k) + F = 0.$$

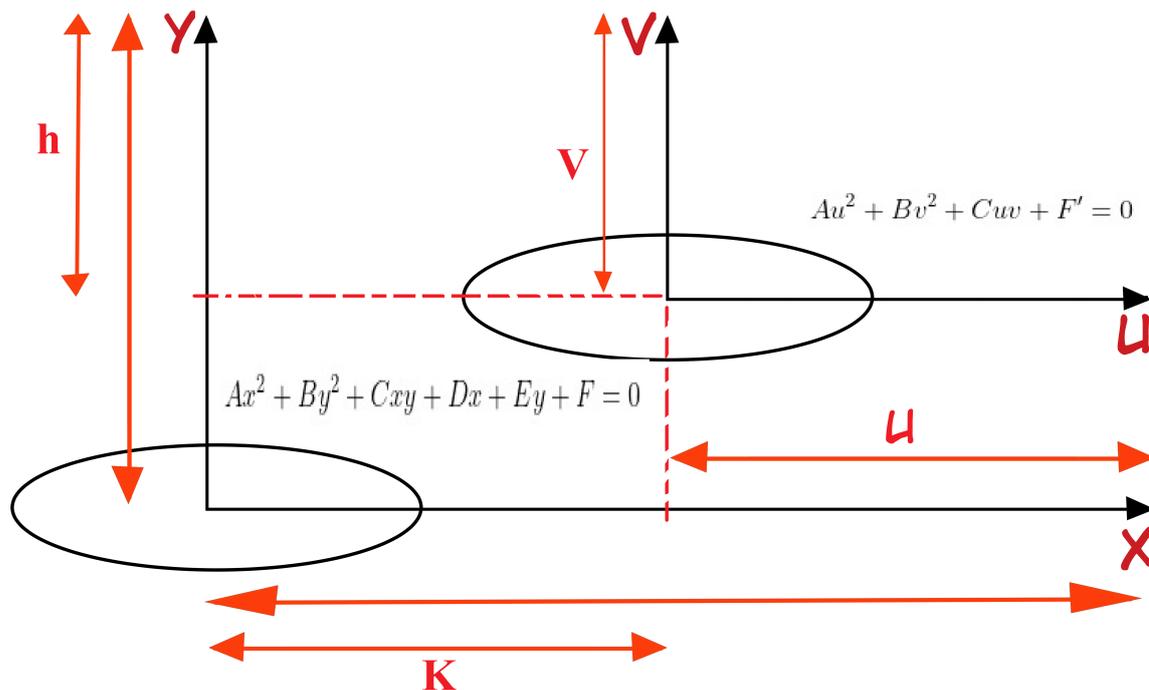


Figura A.1: Representação gráfica da translação de uma elipse no centro $(0,0)$ para centro (h,k) . Figura reproduzida pelo autor.

Expandindo os cálculos e isolando em termos de em novos coeficientes, obtemos

$$\begin{aligned} & Au^2 + Buv + Cv^2 + (2Ah + Bk + D)u + \\ & (2Ck + Bh + E)v + (Ah^2 + Ck^2 + Dk + Ek + F) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Comparando as equações (A.3) e (A.4) chegamos a

$$F' = Ah^2 + Ck^2 + Dk + Ek + F$$

e um sistema

$$\begin{cases} 2Ah + Bk + D = 0 \\ 2Ck + Bh + E = 0, \end{cases}$$

que possui uma solução única quando o determinante, M , for menor que zero para ser elipse¹

$$M = \begin{bmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{bmatrix} < 0$$

e centro no ponto (h, k) . Veja as referências [85, 86] para uma revisão mais detalhada.

ROTAÇÃO

Neste ponto, será utilizada a rotação para eliminarmos os termos de 1° grau misto Buv da equação (A.3) e chegarmos na equação abaixo

$$A_1u_1^2 + A_2v_1^2 + F' = 0. \quad (\text{A.5})$$

O sistema abaixo mostra a mudança de base das variáveis transladada, como pode ser

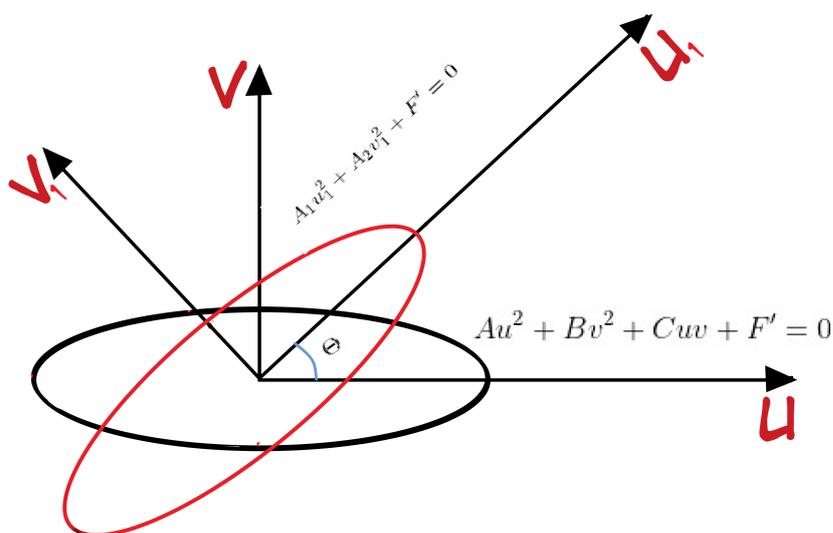


Figura A.2: Representação gráfica da rotação de uma elipse no centro (h, k) . Figura reproduzida pelo autor.

visto na figura acima, $G(u, v)$, para rotacionada, $G(u_1, v_1)$,

$$\begin{cases} u = u_1 \cos \theta - v_1 \sin \theta \\ v = u_1 \sin \theta + v_1 \cos \theta. \end{cases}$$

¹Note que se $M < 0$, a cônica poderá também ser representada por uma circunferências, ou vazio, ou um ponto.

Substituindo as relações acima em (A.3), obtemos

$$(A\cos^2\theta + B\sin\theta.\cos\theta + C\sin^2\theta)u_1^2 + (A\sin^2\theta - B\sin\theta.\cos\theta + C\cos^2\theta)v_1^2 + (-2A\sin\theta.\cos\theta + B\cos 2\theta + 2C\sin\theta.\cos\theta)v_1u_1 + F' = 0. \quad (\text{A.6})$$

Comparando (A.5) com (A.6), pode-se encontrar:

$$A_1 = A\cos^2\theta + B\sin\theta.\cos\theta + C\sin^2\theta, \quad (\text{A.7})$$

$$A_2 = A\sin^2\theta - B\sin\theta.\cos\theta + C\cos^2\theta \quad (\text{A.8})$$

e

$$(A - C)\sin(2\theta) + B\cos(2\theta) = 0. \quad (\text{A.9})$$

A partir da equação acima pode-se determinar qual o ângulo foi rotacionada a elipse:

$$\text{tg}(2\theta) = \frac{B}{A - C}. \quad (\text{A.10})$$

Agora podemos encontrar os coeficientes A_1 e A_2 de acordo com a referência [86] e fazendo uso da resolução das equações (A.7) e (A.8) que geram um determinante cuja as soluções da equação do segundo grau são dado por:

$$\det \begin{bmatrix} A - A_1 & B/2 \\ B/2 & C - A_1 \end{bmatrix} = 0. \quad (\text{A.11})$$

FIGURA DE MÉRITO

De acordo com que foi descrito na sessão 4.4, a figura de mérito é um parâmetro que quantifica uma determinada grandeza e, no geral, é definida como sendo proporcional ao inverso da área da região de confiança, que pode ser em 1σ , 2σ e 3σ . Quanto maior for a FoM , menor será a região de confiança e os parâmetros envolvidos serão mais

restritos [87]. Existe diversas maneiras de expor a FoM , neste trabalho, será dada por: $FoM = \frac{\pi}{A}$, onde A é a área da elipse e o valor de π é usado como forma de normalizar a FoM , mas que poderia ser utilizado $1/A$ sem perda da descrição.

A figura abaixo demonstram duas maneiras que as elipses de confiança podem ser representadas:

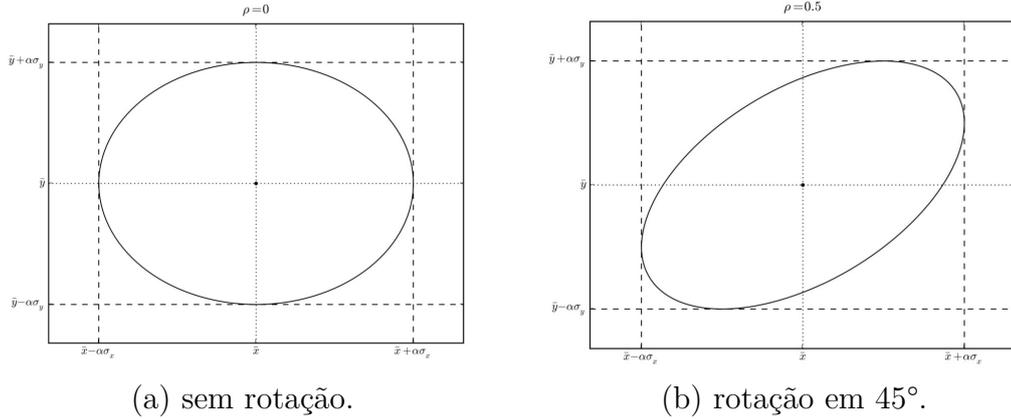


Figura A.3: Elipse de confiança com parâmetros x e y . Figura retirada de [87]

De acordo com a referência [87], os valores de a^2 e b^2 da elipse com a equação na forma reduzida, podemos perceber que σ_x^2 e σ_y^2 têm valores que estão representados na figura A.3 como as distâncias dos eixos x e y ao ponto central (\bar{x}, \bar{y}) . Também notamos que $2\sigma_{xy}$ é diferente de zero quando a elipse esta rotacionada. Portanto estes valores, comparando com a equação (A.2), são A , C e B . Como vimos na equação (A.11) podemos calcular os valores de A_1 A_2 pelo determinante abaixo:

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_x^2 - A_1 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 - A_1 \end{bmatrix} = 0. \quad (\text{A.12})$$

Resolvendo a equação do 2º grau, temos

$$A_1 = a^2 = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2} + \sqrt{\frac{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2}{4} + \sigma_{xy}^2}, \quad (\text{A.13})$$

$$A_2 = b^2 = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2} - \sqrt{\frac{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2}{4} + \sigma_{xy}^2}. \quad (\text{A.14})$$

Como a área da elipse é definida como $\pi a.b$, podemos fazer o produto de a^2 com b^2 e

encontrarmos o seguinte resultado

$$\begin{aligned}
 a^2.b^2 &= \left(\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2} + \sqrt{\frac{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2}{4} + \sigma_{xy}^2} \right) \cdot \left(\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2} - \sqrt{\frac{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2}{4} + \sigma_{xy}^2} \right), \\
 a^2.b^2 &= \frac{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)^2}{2} - \frac{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2}{4} - \sigma_{xy}^2, \\
 a.b &= \sqrt{\sigma_x^2.\sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2}.
 \end{aligned} \tag{A.15}$$

Note que a expressão acima é igual a raiz quadrada do determinante da matriz de covariância² como expressado pela referência [87]. Por motivo de completeza, vamos realizar estes cálculos abaixo:

$$\det Cov = \det \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix},$$

$$\det Cov = \sigma_x^2.\sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2. \tag{A.16}$$

Comparando (A.15) com (A.16) e usando a definição de $\sigma_{xy} = \rho\sigma_x.\sigma_y$, temos

$$a.b = \sqrt{\det Cov} = \sigma_x.\sigma_y\sqrt{1 - \rho^2}. \tag{A.17}$$

O coeficiente de correlação ρ varia entre -1 (completamente anti-correlacionado) e 1 (completamente correlacionado). $\rho = 0$, parâmetros independentes, ou seja, não existe correlação entre eles.

Aplicando a equação (A.17) na definição da FoM , encontramos uma relação matemática

$$FoM = \frac{1}{\sigma_x.\sigma_y\sqrt{1 - \rho^2}}. \tag{A.18}$$

²Lembrando que a matriz inversa de Fisher é igual a matriz de covariância:

$$[F]^{-1} = [Cov] = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix}.$$

Ao levar em consideração o intervalo de confiança $\Delta\chi^2$ e fazendo o mesmo procedimento acima para encontrar a FoM, temos a seguinte equação:

$$FoM = \frac{1}{(\Delta\chi^2).a.b}. \quad (\text{A.19})$$

Veja a referência [87] para maiores detalhes.