



Universidade do Estado do Rio Grande do Norte – UERN
Faculdade de Ciências Exatas e Naturais – FANAT
Departamento de Física
Programa de Pós-Graduação em Física

Moisés Pereira da Silva

Conexões entre Rotação Estelar e Coordenadas
Galácticas

Mossoró-RN

2017

Moisés Pereira da Silva

Conexões entre Rotação Estelar e Coordenadas Galácticas

Dissertação apresentada ao programa
de Pós-graduação em Física como parte
dos requisitos para obtenção do título
de MESTRE EM FÍSICA

Orientador: Prof. Dr. Bráulio Batista Soares

Mossoró-RN

2017

© Todos os direitos estão reservados a Universidade do Estado do Rio Grande do Norte. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do(a) autor(a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu(a) respectivo(a) autor(a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

Catálogo da Publicação na Fonte.
Universidade do Estado do Rio Grande do Norte.

D229c da Silva, Moisés Pereira
Conexões entre Rotação Estelar e Coordenadas Galácticas. / Moisés Pereira da Silva. - Mossoró, 2017.
111p.

Orientador(a): Prof. Dr. Bráulio Batista Soares.
Dissertação (Mestrado em Programa de Pós-Graduação em Física). Universidade do Estado do Rio Grande do Norte.

1. Rotação estelar. 2. coordenadas galácticas. 3. vizinhança solar. I. Soares, Bráulio Batista. II. Universidade do Estado do Rio Grande do Norte. III. Título.

Moisés Pereira da Silva

Conexões entre Rotação Estelar e Coordenadas Galácticas

Dissertação apresentada ao programa
de Pós-graduação em Física como parte
dos requisitos para obtenção do título
de MESTRE EM FÍSICA

Aprovada em 22/09/2017

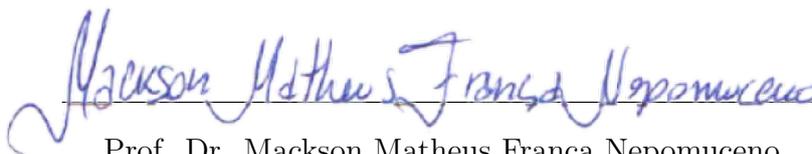
Banca Examinadora



Prof. Dr. Bráulio Batista Soares

Orientador

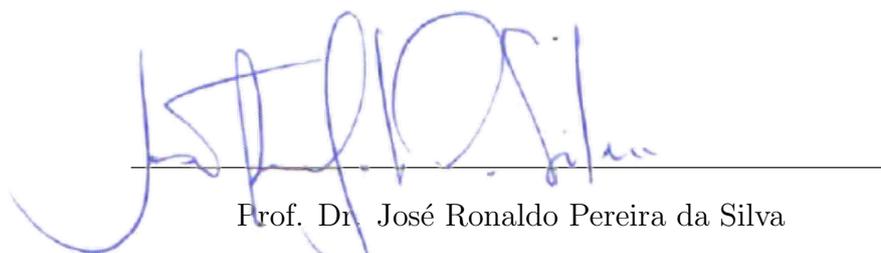
UERN



Prof. Dr. Mackson Matheus França Nepomuceno

Examinador externo

UFERSA



Prof. Dr. José Ronaldo Pereira da Silva

Examinador interno

UERN

*Dedico esta dissertação a minha mãe Iracema Pereira da Silva e aos meus irmãos
Eduarda Kelly Pereira de Sales e Geovane Maciel Pereira.*

“A inteligência está mais perto da consciência do erro do que da certeza do acerto”

Luiz Felipe Pondé

Agradecimentos

Primeiramente a minha mãe Iracema Pereira da Silva, que sempre esteve ao meu lado, a quem devo muito ao que sou hoje.

- Ao meu orientador, Dr. Bráulio Batista Soares, por sua orientação, apoio e contribuição não somente no mestrado mas em toda a minha formação acadêmica. Muito obrigado, Bráulio.
- Ao professor Dr. José Ronaldo Pereira da Silva, o qual sempre esteve disponível para ouvir minhas dúvidas e que contribuiu de modo significativo para a realização deste trabalho.
- A todos os professores do Departamento de Física da UERN e em especial aos professores Dr. Nilson Sena de Almeida e Dr. Carlos A. Lopes Ruiz pelas conversas construtivas e conselhos que me guiaram na minha formação.
- A todos os amigos da graduação e pós-graduação pelo companheirismo e pelos bons momentos que passamos.
- Agradeço a todos aqueles que estiveram a meu lado durante essa jornada.
- À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Nos últimos 70 anos, uma das questões mais enigmáticas na astrofísica estelar é a conexão da rotação com a localização das estrelas na Galáxia. Estudar a rotação em função da localização estelar é relevante para uma variedade de problemas, principalmente para compreensão da origem e redistribuição do momentum angular nos estágios iniciais de formação. Neste trabalho, investigamos a relação entre a distribuição das velocidades rotacionais projetadas, $v \sin i$, com as coordenadas galácticas e distância estelar, com base em 15000 estrelas de campo de classes de luminosidade V, IV, III e II, cobrindo um amplo intervalo espectral de B a K. Os resultados do presente estudo mostram uma clara dependência da rotação estelar com a posição das estrelas na Galáxia. Para as estrelas no intervalo espectral de F5 a K, encontramos um gradiente positivo da rotação relativo aumento da distância ao Sol. De forma inversa, nas estrelas anãs do tipo espectral B a F4, há uma tendência geral de diminuição da velocidade rotacional com a distância. Encontramos também dependência da rotação com a latitude (b) e longitude galáctica (l). Próximo ao disco galáctico há um número considerável de estrelas com alta rotação e, em geral, para estrelas localizadas no plano superior galáctico ($b > 0$) as taxas de rotação são mais altas que as estrelas do plano inferior ($b < 0$).

Palavras-chave: Rotação estelar, coordenadas galácticas, vizinhança solar.

Abstract

In the last 70 years, one of the most puzzling questions in stellar astrophysics is the connection of rotation with the location of stars in the Galaxy. Studying rotation as a function of stellar location is relevant for a variety of problems, mainly for the understanding the origin and redistribution of angular momentum in the early stages of formation. In this work, we investigate the relationship between the distribution of the projected rotational velocity, $v \sin i$, with the galactic coordinates and stellar distance, on the basis of a sample of 15000 field stars of luminosity classes V, IV, III and II, covering a wide spectral range of B to K. The results of the present study show a clear dependence of the stellar rotation with the position of the stars in the Galaxy. For stars in the spectral range from F5 to K, we find a positive gradient of rotation relative to increasing distance from stars to Sun. Inversely, in dwarf stars of spectral type B to F4, there is a general tendency of decreasing rotational velocity with distance. We have also found dependence of the rotation with latitude (b) and longitude Galactic (l). Near the galactic disk there are a considerable number of stars with high rotation and, in general, stars located in the galactic upper plane ($b > 0$) the rates of rotation are higher than the stars of the lower plane ($b < 0$).

Keywords: stellar rotation, galactic coordinates, solar neighbourhood.

Sumário

Lista de Tabelas	i
Lista de Figuras	ii
1 Introdução	1
1.1 Sistema galáctico de coordenadas	2
1.2 Rotação e coordenadas galácticas	3
1.3 Objetivos	6
2 Momentum Angular	7
2.1 Origem do momentum angular	7
2.2 O Problema do momentum angular	10
3 Os Dados Observacionais	13
3.1 As amostras	13
4 Resultados e discussões	17
4.1 Determinação dos intervalos	17
4.2 Rotação e longitude galáctica	20
4.2.1 Catálogo Glebocki & Gnacinski	20
4.2.2 Catálogo Abt, Levato e Grosso	31
4.2.3 Catálogo Royer <i>et al.</i>	32
4.2.4 Catálogos De Medeiros <i>et al.</i>	35
4.3 Rotação e latitude galáctica	38
4.3.1 Catálogo Glebocki & Gnacinski	38
4.3.2 Catálogo Abt, Levato e Grosso	48
4.3.3 Catálogo Royer <i>et al.</i>	50

4.3.4	Catálogos De Medeiros <i>et al.</i>	51
4.4	Rotação e distância estelar	53
4.4.1	Catálogo Glebocki & Gnacinski	53
4.4.2	Catálogo Abt, Levato e Grosso	66
4.4.3	Catálogo Royer <i>et al.</i>	68
4.4.4	Catálogos De Medeiros <i>et al.</i>	70
4.4.5	Projeção da rotação no plano galáctico	73
5	Conclusões e perspectivas	80
5.1	Conclusões	80
5.2	Perspectivas	82
A	Sobre o Teste Anderson-Darling	83
B	Tabelas dos Dados Observacionais	85
	Referências Bibliográficas	90

Lista de Tabelas

3.1	Quantidade de dados de $v \sin i$ presente em cada tipo espectral e classe de luminosidade.	16
B.1	Amostra de estrelas do catálogo Glebocki & Gnacinski e seus respectivos parâmetros.	86
B.2	Amostra de estrelas do catálogo Abt, Levato e Grosso e seus respectivos parâmetros.	87
B.3	Amostra de estrelas do catálogo Royer <i>et al.</i> e seus respectivos parâmetros.	88
B.4	Amostra de estrelas do catálogo De Medeiros <i>et al.</i> e seus respectivos parâmetros.	89

Lista de Figuras

1.1	Uma imagem esquemática da localização do Sol na Galáxia, ilustrando o sistema de coordenadas galácticas. Os símbolos b e l correspondem, respectivamente, a latitude e a longitude galáctica.	2
3.1	Comparação entre a distribuição acumulada de $v \sin i$ das amostras Abt, Levato e Gross, e Royer <i>et al</i> com o catálogo Glebocki & Gnacinski. As distribuições acumuladas correspondem às estrelas em comum entre os trabalhos. Em ambas as comparações feitas com o teste Anderson-Darling (teste AD), a probabilidade de que as distribuições sejam diferentes é $P \sim 98\%$	14
4.1	Plano $v \sin i$ em função da distância	19
4.2	Box-plots de $v \sin i$ em função do tipo espectral para estrelas da sequência principal. Para as estrelas G e K, o valor da mediana de $v \sin i$ é $2,7 \text{ km s}^{-1}$ e 3 km s^{-1} , respectivamente.	21
4.3	Mediana de $v \sin i$ em função do tipo espectral para estrelas da sequência principal.	21
4.4	Densidade kernel da longitude galáctica. No gráfico é apresentado a forma da distribuição estelar de cada tipo espectral ao longo da longitude galáctica para classe de luminosidade V. A letra N é o número de estrelas em cada classe espectral. O declínio das linhas nos valores extremos do gráfico (em 0 e 360) resulta do efeito de suavização do estimador de densidade kernel, e não está relacionado ao número de estrelas nesses extremos.	22

4.5	Gráficos polares de $v \sin i$ em função da longitude galáctica para estrelas da classe de luminosidade V e tipos espectrais B, A, F, G e K. Em cada gráfico está plotado os valores do 1°, 2° (mediana) e 3° quartil pertencentes a um dado intervalo de longitude. O raio dos círculos corresponde à velocidade de rotação, $v \sin i$, e a circunferência refere-se à longitude galáctica.	23
4.6	Densidade kernel da longitude galáctica. No gráfico é apresentado a forma da distribuição estelar de cada tipo espectral ao longo da longitude galáctica para estrelas subgigantes.	25
4.7	Histograma em coordenadas polares do número de estrelas subgigantes ao longo da longitude.	25
4.8	Gráficos polares da distribuição de $v \sin i$ em função da longitude galáctica para estrelas subgigantes (classe IV) com tipos espectrais B, F e K. O raio dos círculos corresponde à velocidade de rotação, $v \sin i$, e a circunferência refere-se à longitude galáctica.	26
4.9	Densidade kernel da longitude galáctica em cada tipo espectral para estrelas gigantes. A concentração de estrelas, todas as classes espectrais, é menor na faixa $\sim 230^\circ < l < 30^\circ$	27
4.10	Gráficos polares da distribuição de $v \sin i$ em função da longitude galáctica para estrelas gigantes (classe III) com tipos espectrais B, A, F, G e K. O raio dos círculos corresponde à velocidade de rotação, $v \sin i$, e a circunferência refere-se à longitude galáctica.	28
4.11	Estimativa de densidade kernel da longitude galáctica em cada tipo espectral para estrelas gigantes luminosas (classe II).	29
4.12	Idem figura 4.10, para as estrelas gigantes luminosas (classe II).	30
4.13	Histograma em coordenadas polares do número de estrelas anãs (classe V) ao longo da longitude.	31
4.14	Gráfico em coordenadas polares da distribuição de $v \sin i$ em função da longitude galáctica para estrelas do tipo B da sequência principal.	32
4.15	Estimativa de densidade kernel da longitude galáctica para os tipos espectrais B, A e F da sequência principal.	32

4.16	Gráficos em coordenadas polares da distribuição de $v \sin i$ em função da longitude galáctica para estrelas de tipos espectrais B, A e F pertencentes à sequência principal.	33
4.17	Histograma em coordenadas polares do número de estrelas subgigantes de tipo espectral F ao longo da longitude.	34
4.18	Gráfico em coordenadas polares da distribuição de $v \sin i$ em função da longitude galáctica para estrelas subgigantes do tipo F.	35
4.19	Histogramas da longitude galáctica para as estrelas gigantes. Os painéis (a) e (b) correspondem aos espectros G e K, respectivamente.	35
4.20	Gráfico em coordenadas polares da distribuição de $v \sin i$ em função da longitude galáctica para estrelas gigantes de tipos espectrais G e K.	36
4.21	Idem figura 4.20, para as estrelas gigantes luminosas de tipo espectral G.	37
4.22	Estimativa de densidade kernel da latitude galáctica de diferentes tipos espectrais para as estrelas da sequência principal.	38
4.23	Box-plots de $v \sin i$ em função da latitude galáctica para estrelas anãs do tipo espectral B. Cada painel corresponde a uma região de 90° na longitude galáctica.	39
4.24	Idem figura 4.23, para o tipo espectral A.	39
4.25	Box-plots de $v \sin i$ em função da latitude galáctica para estrelas anãs do tipo espectral F. Para uma melhor visualização, os valores atípicos foram ocultados.	40
4.26	Idem figura 4.25, para o tipo espectral G.	40
4.27	Idem figura 4.25, para o tipo espectral K.	41
4.28	Box-plots de $v \sin i$ em função da latitude galáctica para estrelas subgigantes do tipo espectral B.	42
4.29	Idem figura 4.28, para o tipo espectral A.	43
4.30	Idem figura 4.28, para o tipo espectral A.	43
4.31	Box-plots de $v \sin i$ em função da latitude galáctica para estrelas subgigantes do tipo espectral G. Aqui os valores atípicos, por serem muito extremos, foram ocultados.	44

4.32	Idem figura 4.31, para o tipo espectral K. Em razão do baixo número de estrelas nessa classe espectral, as mesmas não foram divididas em intervalos de 90° na longitude galáctica.	44
4.33	Box-plots de $v \sin i$ em função da latitude galáctica para estrelas subgigantes do tipo espectral B.	45
4.34	Idem figura 4.33, para o tipo espectral A.	46
4.35	Idem figura 4.33, para o tipo espectral G.	46
4.36	Idem figura 4.33, para o tipo espectral K.	47
4.37	Box-plots de $v \sin i$ em função da latitude galáctica para as estrelas gigantes e da sequência principal do tipo K para região completa de 0° a 360° na longitude. Novamente, para uma melhor visualização dos resultados, os valores atípicos foram ocultados.	47
4.38	Box-plots de $v \sin i$ em função da latitude galáctica para estrelas anãs do tipo espectral B.	49
4.39	Box-plots de $v \sin i$ em função da latitude galáctica para estrelas gigantes do tipo espectral B. O intervalo $270^\circ < l < 360^\circ$ contém dados insuficientes.	49
4.40	Box-plots de $v \sin i$ versus latitude galáctica para as estrelas A da sequência principal.	50
4.41	Idem figura 4.40, para as estrelas gigantes. Distribuições rotações distintas identificadas somente no intervalo $0^\circ < l < 90^\circ$	51
4.42	Box-plots de $v \sin i$ em função da latitude galáctica para as estrelas gigantes do tipo G.	52
4.43	Idem figura 4.42, para as estrelas K. Na região $90^\circ < l < 180^\circ$ não foi encontrado qualquer intervalo na latitude com distribuições de $v \sin i$ contrastantes. Por serem muito extremos, os valores atípicos foram omitidos.	52
4.44	Box-plots de $v \sin i$ em função da latitude galáctica para estrelas gigantes luminosas do tipo espectral K.	53
4.45	Projeção das estrelas da sequência principal no plano galáctico. A direção do centro galáctico aponta no sentido positivo de X. As linhas de diferentes cores (as cores correspondem aos tipos espectrais indicados na legenda do gráfico) na parte superior e no lado direito do gráfico referem-se a estimativa de densidade kernel para X e Y, respectivamente.	54

4.46	Imagens da estimativa de densidade kernel em duas dimensões, para X e Y, de cada tipo espectral para as estrelas da sequência principal. Cores mais “quentes”(avermelhado) e cores “frias”(associada à cor azul) correspondem respectivamente à maior e menor concentração de estrelas.	54
4.47	Box-plots de $v \sin i$ em função da distância estelar para estrelas da sequência principal do tipo B.	55
4.48	Idem figura 4.47, para o tipo espectral A.	56
4.49	Box-plots de $v \sin i$ em função da distância estelar para estrelas da sequência principal do tipo F. Os outliers (valores atípicos) foram ocultados.	56
4.50	Idem figura 4.49, para o tipo espectral G.	57
4.51	Idem figura 4.49, para o tipo espectral K.	57
4.52	Box-plots de $v \sin i$ em função da distância estelar para estrelas da sequência principal do tipo F em uma região completa de 0° até 360° na longitude galáctica. Para uma melhor visualização, os valores discrepantes foram ocultados	59
4.53	Idem figura 4.52, para os subtipos F0-F4 e F5-F9.	59
4.54	Histograma da distância das estrelas do tipo K.	60
4.55	Box-plots de $v \sin i$ em função da distância estelar para estrelas subgigantes do tipo B em uma região completa de 0° até 360°	61
4.56	Box-plots de $v \sin i$ em função da distância estelar para estrelas subgigantes do tipo F. Os valores atípicos forma omitidos.	61
4.57	Idem figura 4.56, para estrelas G.	62
4.58	Box-plots de $v \sin i$ em função da distância estelar para estrelas gigantes do tipo B em uma região completa de 0° até 360°	63
4.59	Idem figura 4.58, para o tipo A.	63
4.60	Box-plots de $v \sin i$ em função da distância estelar para estrelas gigantes do tipo G. Os valores atípicos forma omitidos.	64
4.61	Idem figura 4.60, para o tipo K.	64
4.62	Box-plots de $v \sin i$ em função da distância estelar para estrelas gigantes do tipo K em uma região completa de 0° até 360° . Novamente, para melhor visualização dos resultados, os valores atípico foram omitidos.	65
4.63	Idem figura 4.58, para estrelas gigantes luminosas.	65

4.64	Histograma da distância das estrelas do tipo B.	66
4.65	Box-plots de $v \sin i$ em função da distância estelar para estrelas da sequência principal do tipo B.	67
4.66	Idem figura 4.65, para uma região de 0° até 360°	67
4.67	Box-plots de $v \sin i$ em função da distância estelar para estrelas B da sequência principal no intervalo $0^\circ < l < 360^\circ$	68
4.68	Box-plots de $v \sin i$ em função da distância estelar para estrelas da sequência principal do tipo A.	69
4.69	Idem figura 4.67, para estrelas do tipo F.	69
4.70	Histogramas da distância das estrelas gigantes de tipos espectrais G e K.	70
4.71	Box-plots de $v \sin i$ em função da distância estelar para estrelas gigantes do tipo G no intervalo $0^\circ < l < 360^\circ$	71
4.72	Box-plots de $v \sin i$ em função da distância estelar para estrelas gigantes do tipo K.	71
4.73	Idem figura 4.71, para gigantes luminosas.	72
4.74	Idem figura 4.72, para gigantes luminosas.	72
4.75	Gráfico de superfície da distribuição das medianas de $v \sin i$ no plano galáctico para estrelas B da sequência principal. Resolução $80 \times 80 \text{ pc}^2$	74
4.76	Diagrama de contorno da distribuição das medianas de $v \sin i$ no plano galáctico para estrelas B da sequência principal. São mostradas várias curvas de níveis para medianas da velocidade rotacional em uma resolução de $80 \times 80 \text{ pc}^2$	74
4.77	Idem figura 4.75, para as estrelas A. Os valores da mediana de $v \sin i$ referem-se à área de $15 \times 15 \text{ pc}^2$	75
4.78	Idem figura 4.76, referente às estrelas A em uma resolução de $15 \times 15 \text{ pc}^2$	75
4.79	Idem figura 4.75, para as estrelas do tipo F0 a F4. Os valores da mediana de $v \sin i$ referem-se à área de $10 \times 10 \text{ pc}^2$	76
4.80	Idem figura 4.76, referente às estrelas com tipos F0 a F4 em uma resolução de $10 \times 10 \text{ pc}^2$	76
4.81	Idem figura 4.75, para as estrelas do tipo F5 a F9. Resolução $15 \times 15 \text{ pc}^2$	77
4.82	Idem figura 4.76, para as estrelas do tipo F5 a F9 em uma resolução de $15 \times 15 \text{ pc}^2$	77

4.83	Idem figura 4.75, para as estrelas do tipo G. Resolução 10X10 pc ²	78
4.84	Idem figura 4.76, para as estrelas do tipo G. Resolução 10X10 pc ²	78
4.85	Distribuição da mediana da velocidade rotacional no plano galáctico para as estrelas K. As medianas de $v \sin i$ foram calculadas em áreas de 7X7 pc ² .	79
4.86	Diagrama de contorno da distribuição das medianas de $v \sin i$ no plano galáctico para as estrelas K. Resolução de 7X7 pc ²	79

Capítulo 1

Introdução

A rotação estelar é um observável fundamental para compreensão de uma variedade de problemas em astrofísica, desempenhando papel importante na formação e evolução estelar. Os efeitos da rotação estão presentes em todos estágios evolutivos de uma estrela e, em alguns casos, até mesmo domina o curso da evolução. Reciprocamente, a evolução da rotação é governada por processos fundamentais que operam dentro e fora da estrela. Conseqüentemente, se a velocidade de rotação reflete o momentum angular inicial, a distribuição de velocidade rotacional pode ser usada para estudar características dos processos físicos que controlam a formação estelar e as interações com os ambientes em que nascem. Portanto, a rotação juntamente com a massa são importantes ingredientes físicos para a modelagem da estrutura, formação e evolução estelar.

As estrelas são formadas pela fragmentação de grandes nuvens moleculares, e nesse processo parte do momentum angular da nuvem é transferido para as estrelas recém-formadas. Diante disso, podemos nos perguntar: qual a distribuição das velocidades rotacionais resultante da formação estelar? Qual a relação entre o vetor momentum angular da nuvem mãe e das estrelas que se formam? A magnitude e a direção desse vetor depende da rotação local da galáxia? Assim, há uma série de razões para se querer saber como os eixos e as velocidades rotacionais estão correlacionados com o espaço, principalmente ao que concerne à compreensão da origem e redistribuição do momentum angular estelar. Estes estando entre as questões mais desafiadoras da física estelar moderna.

1.1 Sistema galáctico de coordenadas

Para determinar a localização das estrelas é necessário definir um sistema de coordenadas. No sistema de coordenadas galácticas (ver figura 1.1), a posição do astro é determinada por meio de duas coordenadas angulares:

- **Latitude galáctica (b):** distância angular medida perpendicularmente ao plano galáctico, variando de 0° a 90° para o norte e de 0° a -90° para o sul.
- **Longitude galáctica (l):** distância angular medida ao longo do plano galáctico, variando de 0° a 360° , no sentido anti-horário, a partir da direção do centro da Galáxia.

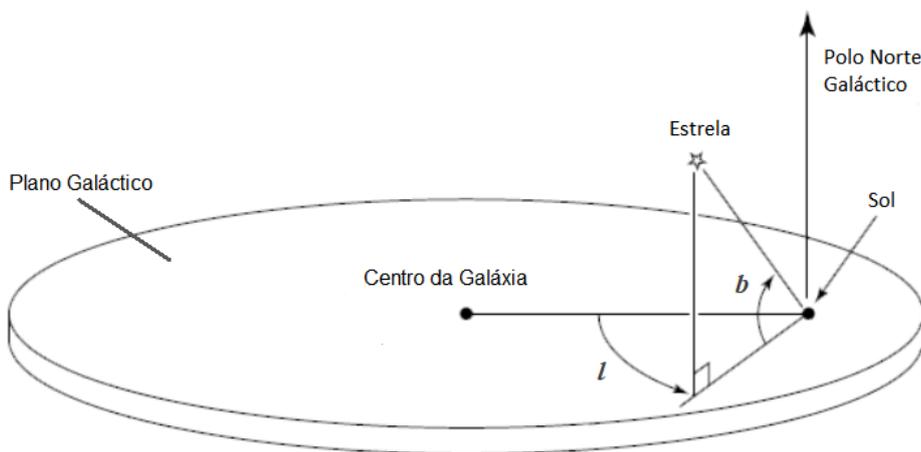


Figura 1.1: Uma imagem esquemática da localização do Sol na Galáxia, ilustrando o sistema de coordenadas galácticas. Os símbolos b e l correspondem, respectivamente, a latitude e a longitude galáctica.

Além das coordenadas galácticas, para determinar a posição das estrelas na Galáxia precisamos também da distância. A técnica mais comum para se medir distâncias grandes é a triangulação. Pelo método de triangulação (paralaxe heliocêntrica¹) é fácil mostrar que

$$d(UA) = \frac{\text{raio da órbita da terra}}{p(rad)} = \frac{1 UA}{p(rad)} \quad (1.1)$$

¹Distância obtida tendo como base o raio da órbita da terra.

Onde d é distância do objeto em unidades astronômicas (UA) e p é a paralaxe² em radianos (rad). Então, a distância de uma estrela expressa em parsec (pc) é dada por

$$d(\text{pc}) = \frac{1}{p(\prime\prime)} \quad (1.2)$$

Um parsec é a distância de um objeto cuja paralaxe anual vale $1''$ (um segundo de arco).

1.2 Rotação e coordenadas galácticas

Infelizmente, com exceção de alguns casos³, a velocidade de rotação equatorial v de uma estrela não pode ser medida diretamente, sobretudo devido à impossibilidade de se observar o ângulo de inclinação do eixo rotacional, assim sendo, temos apenas acesso à sua rotação aparente. Em vista disso, a principal técnica utilizada para medir a rotação estelar é a espectroscopia, na qual pelo alargamento das linhas espectrais da estrela se obtém a velocidade de rotação projetada $v \sin i$. No entanto, mediante o exposto, o $v \sin i$ ⁴ é afetado por um fator de projeção $\sin i$ (seno de i), onde i é o ângulo de inclinação entre o eixo rotacional e a linha de visada. Dessa maneira, a velocidade de rotação projetada, $v \sin i$, fornece apenas um limite inferior da velocidade de rotação verdadeira.

Otto Struve[1] foi o primeiro a concluir, com base nos resultados obtidos por Westgate[2, 3], que não existe correlação entre a velocidade rotacional observada de uma estrela e sua localização espacial no sistema de coordenadas galácticas. No mesmo trabalho, fundamentado na independência entre $v \sin i$ e latitude galáctica, Struve também propôs uma das mais importantes propriedades da rotação estelar ao considerar que os eixos rotacionais estão distribuídos aleatoriamente no espaço.

Resultados semelhantes também foram obtidos por Slettebak[4] ao analisar a rotação de estrelas do tipo espectral B e Be, mostrando que não há correlação entre $v \sin i$ e longitude e latitude galáctica. A implicação de tais conclusões é de grande alcance; Chandrasekhar e Münch[5], baseados na distribuição aleatória dos eixos, obtiveram a relação $\langle v \rangle = (4/\pi) \langle v \sin i \rangle$ na qual podemos determinar o valor médio verdadeiro da velocidade

²Deslocamento aparente de um objeto visto por observadores em locais distintos. Quanto menor a paralaxe, mais distante está o objeto.

³Em sistemas binários eclipsantes e estrelas próximas com manchas estelares podemos extrair informações sobre os seus períodos rotacionais.

⁴Por ser amplamente usada na literatura, usaremos a notação *sin* para representar a função seno.

rotacional das estrelas sem qualquer conhecimento da distribuição da velocidade rotacional verdadeira. Logo, a partir do valor médio de uma quantidade diretamente observável, $\langle v \sin i \rangle$, podemos inferir a média da velocidade de rotação verdadeira $\langle v \rangle$ para um grupo de estrelas.

Uma análise da rotação para estrelas de tipos espectrais O, B e F0 a F5 foi apresentada por Huang e Struve[6], na qual também não encontraram correlação entre rotação e coordenadas galácticas. Além disso, eles observaram grandes flutuações nos valores médios da rotação mostrando uma tendência para rotação rápida ou rotação lenta associada ao espaço, corroborando com a hipótese de que a velocidade de rotação estelar depende do estado local do movimento (dado por processos aleatórios), ou seja, o momentum angular das estrelas é possivelmente originado por encontros gravitacionais, colisões de nuvens moleculares e/ou turbulência do gás do meio interestelar [6, 7, 8].

Para estrelas binárias, a orientação dos planos orbitais é também muito importante para a resolução do problema da origem do momentum angular e muitas investigações foram feitas a respeito. Chang[9] e Finsen[10], com base no estudo de um pequeno número de órbitas de estrelas binárias visuais, concluíram que a orientação do plano orbital tem muito provavelmente um carácter aleatório. Resultado semelhante foi obtido por Huang e Wade[11], em que analisaram a frequência de estrelas binárias eclipsantes em função da latitude galáctica. Investigações posteriores também corroboram para as mesmas conclusões (e.g. [12, 13]). Mais recentemente, no trabalho Popovic, Pavlovic e Ninkovic[14] nenhuma evidência foi encontrada para uma orientação preferencial, mostrando-se que a distribuição das orientações observadas dos planos orbitais não difere das orientações aleatórias simuladas (para mais detalhes, ver o referido trabalho).

Burki e Maeder[15], usando os dados do catálogo de Bernacca e Perinotto[16], realizaram um estudo do processo de formação estelar baseado no comportamento da distribuição de velocidades rotacionais. Estes autores investigaram a dependência de $v \sin i$ com a localização estelar na Galáxia para estrelas do tipo espectral B da sequência principal. Burki e Maeder descobriram que para estrelas do tipo B0-B4 o $v \sin i$ depende da longitude galáctica, onde a velocidade de rotação é máxima na direção do centro galáctico e mínima na direção do anticentro. Para estrelas Be (estrelas de emissão) verificou-se o mesmo mínimo na direção do anticentro. Além disso, tanto para estrelas de campo como para estrelas em aglomerados e associações, encontraram que o $\langle v \sin i \rangle$ (correspondendo às

estrelas B0-B4) diminui com o aumento da distância galactocêntrica. Vale salientar que essas correlações de rotação com a posição são válidas somente para a região dentro de 400 pc a partir do Sol.

Tal resultado referente à dependência de $\langle v \sin i \rangle$ com a longitude galáctica foi confirmado por Wolff et al.[8], em estudo sobre rotação de estrelas precoces do tipo B. Estes autores também mostraram que a baixa rotação de um número considerável de estrelas não pode ser explicada adequadamente por perda de momentum angular devido – exceto durante os estágios iniciais da formação estelar – ao freio magnético e às interações ou troca de massa em sistemas binários. Como hipótese alternativa, consideram que as estrelas são formadas em material com baixo momentum angular e suas rotações observadas são provenientes de encontros gravitacionais dentro de nuvens genitoras.

Sob a hipótese de orientação aleatória dos eixos de rotação, uma distribuição Maxwelliana (lei de Maxwell-Boltzmann) pode ser esperada para as velocidades rotacionais projetadas [17, 18]. Como consequência da forma não-Maxwelliana da distribuição de $v \sin i$, Guthrie[19] concluiu que os eixos rotacionais das estrelas do tipo B do aglomerado aberto NGC 2516 estão, em algum grau, alinhados perpendicularmente ao plano galáctico. Contudo, em contraste com aglomerado NGC 25216, a distribuição de $v \sin i$ para a mesma classe espectral de estrelas de campo não é bimodal, levando Guthrie a concluir que os eixos de rotação para essas estrelas são, portanto, improváveis de estarem alinhados ao plano galáctico.

Com relação às estrelas evoluídas, Gray e Toner[20] sugeriram que para estrelas supergigantes Ib pode existir um alinhamento dos eixos de rotação com os polos galácticos, como possível explicação para a incomum distribuição de velocidades encontrada. Dessa forma, Gray e Toner propuseram que uma lei $\cos|b|$ poderia representar a dependência da rotação das estrelas supergigantes Ib com a latitude galáctica b .

Em princípio, conhecendo-se os valores de $v \sin i$, a inclinação do eixo rotacional pode ser derivada a partir da velocidade de rotação verdadeira v , isto é, somente em casos especiais como, por exemplo, em estrelas com manchas estelares na superfície na qual nos fornece informações sobre os períodos rotacionais. Com objetivo de verificar a validade da suposição da aleatoriedade dos eixos, Abt[21] analisou os valores individuais de $\sin i$ com base nas medidas de $v \sin i$ e nos períodos rotacionais de 102 estrelas Ap (estrelas quimicamente peculiares de tipo espectral A). Apesar dos erros intrínsecos às medidas

observacionais, Abt concluiu que a inclinação dos eixos rotacionais dessas estrelas é aleatória.

Em síntese, com base nos trabalhos aqui apresentados, existe um consenso generalizado de que os vetores de momentum angular estelar são orientados aleatoriamente e, conseqüentemente, que não há nenhum tipo de vínculo da rotação de uma estrela com sua localização na Galáxia. Mas a respeito da última proposição, ela é realmente válida? Até o momento não há uma base observacional estatisticamente forte para sustentar tal hipótese e muitos aspectos importantes ainda continuam incertos.

1.3 Objetivos

O presente trabalho tem como objetivos principais:

- Investigar a relação entre as velocidades rotacionais projetadas, $v \sin i$, e as coordenadas galácticas na vizinhança solar levando em conta os diferentes estágios evolutivos (V, IV, III e II) e um amplo intervalo espectral de B a K, com base em uma grande amostra, sem precedentes, de 15 mil estrelas simples de campo.
- Investigar a dependência entre $v \sin i$ e distância estelar em diferentes localidades da parte acessível da Galáxia, por volta de 1 kpc a partir do Sol, para cada tipo espectral e fase evolutiva estelar.
- Identificar qual é a correlação geral da distribuição das velocidades rotacionais com a região espacial onde as estrelas estão compreendidas, relacionando $v \sin i$, coordenadas galácticas e distância estelar.

Dessa forma, esta Dissertação ajuda a compreender uma variedade de problemas importantes em astrofísica, principalmente no que diz respeito à origem da rotação das estrelas e ao processo de formação estelar.

Capítulo 2

Momentum Angular

Podemos considerar a rotação um parâmetro canônico na astrofísica estelar, inúmeros fenômenos estão diretamente (ou indiretamente) ligados à rotação, tais como atividade magnética, abundâncias químicas na superfície, processos de nucleossíntese, perda de massa, distorções na gravidade e na temperatura efetiva, etc. A rotação também propicia um alternativo parâmetro de medida de tempo para estrelas de baixa massa, como propôs Skumanich[22] ao mostrar que a rotação estelar, atividade cromosférica e abundâncias de lítio para estrelas como o Sol diminui com a raiz quadrada da idade, tal declínio de rotação com o tempo é conhecido como relação de Skumanich, $v \propto t^{-1/2}$. Logo, de forma precisa, a idade de uma estrela de baixa massa pode ser calculada pela velocidade do seu giro [23]. No entanto, o que sabemos sobre a origem desse importante observável físico? Qual é a origem do momentum angular das estrelas?

2.1 Origem do momentum angular

Existem dois mecanismos pelos quais uma estrela pode adquirir seu momentum angular [6, 24]: Primeiro, quando a nuvem de gás e poeira condensa em uma estrela e herda o momentum angular local proveniente da rotação diferencial galáctica¹; segundo, por processos aleatórios que ocorrem no período pré-estelar tais como movimentos turbulentos do gás interestelar, colisões de nuvens moleculares, encontros gravitacionais na nuvem, etc.

Ambas as suposições são problemáticas. A primeira hipótese implica que o vetor momentum angular estelar deve estar, de modo geral, alinhado paralelamente com o vetor

¹A Via Láctea não gira como corpo sólido mas sim em rotação diferencial. Estrelas a diferentes distâncias do centro da Galáxia giram com diferentes velocidades.

momentum angular galáctico, em outras palavras, os eixos rotacionais das estrelas devem ser predominantemente perpendiculares ao plano galáctico. No entanto, como visto no capítulo anterior, nenhuma dependência clara da velocidade rotacional com a latitude galáctica foi encontrada, o que resulta, em princípio, na exclusão de qualquer teoria de condensação da nuvem genitora que exija a conservação do momentum angular associado à rotação galáctica [7].

No tocante à distribuição das velocidades rotacionais, várias suposições podem ser feitas a respeito, como mostrado por van Dien[17]. Este autor considerou três suposições, o qual representou a rotação por um vetor na direção do eixo e seu comprimento proporcional à velocidade rotacional v :

- Primeira suposição: Todos os vetores têm o mesmo comprimento v , mas sua orientação é completamente aleatória.
- Segunda suposição: Todos os eixos rotacionais são paralelos entre si, mas as velocidades rotacionais têm uma distribuição Gaussiana em torno de um determinado v_0 , a probabilidade de observar um valor v é

$$e^{-h^2(v_0-v)^2} + e^{-h^2(v_0+v)^2} \quad (2.1)$$

h é a constante que determina o espalhamento da distribuição.

- Terceira suposição: Os vetores de rotação têm uma distribuição Maxwelliana. Nesse caso, a probabilidade da velocidade verdadeira estar entre v e $v + dv$, e o ângulo (do eixo rotacional com a linha de visada) estar entre i e $i + di$ é:

$$\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 v^2} v^2 \sin i \, dv \, di \quad (2.2)$$

Ou como demonstrado analiticamente por Deutsch[18], a função de distribuição Maxwell-Boltzmann para um vetor velocidade angular Ω é dado por:

$$F(\Omega) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \Omega^2 e^{-\Omega^2} \quad (2.3)$$

Para o aglomerado das Plêiades, van Dien concluiu que as velocidades rotacionais eram mais compatíveis com uma distribuição Maxwelliana. Como van Dien e Deutsch, vários outros autores também sugeriram que a distribuição da rotação estelar deveria ser descrita por uma função de Maxwell-Boltzmann (e.g., [5, 25, 26, 27]). Quando incorporamos uma distribuição Maxwelliana ao nosso sistema temos que ter em mente a seguinte aproximação para o vetor velocidade angular:

- Não há nenhuma direção privilegiada e suas propriedades são as mesmas em qualquer direção investigada.

Isto é, distribuição esperada para estrelas que apresentam orientação aleatória dos eixos rotacionais ou correspondendo ao sistema que não possui memória. Todavia, muitos estudos têm mostrado que as distribuições observadas de $v \sin i$ não são ajustadas por uma função Maxwelliana (e.g., [8, 19, 20, 28, 29]).

O não alinhamento do eixo rotacional com os polos galácticos é obviamente esperado em processos completamente caóticos e aleatórios. No ambiente caótico e heterogêneo da nuvem estão presentes movimentos turbulentos que pode, em princípio, gerar vórtices independentes nos agrupamentos e filamentos de massa do gás [7, 30], e dessa forma podendo resultar, em escala macroscópica, uma rotação angular efetiva independente da rotação galáctica[31].

A relação entre o momentum angular da Galáxia e das nuvens moleculares é também obscura. Em um estudo sobre rotação de nuvens moleculares, Phillips[32] observou que nuvens isoladas apresentam orientações preferencias para os polos norte e sul galáctico, concluindo que a rotação em extensas nuvens deriva do cisalhamento galáctico, enquanto que para o vetor de rotação Ω de agrupamentos e condensações de massa é randomizado por interações magnéticas ou vórtices turbulentos. Em contraste, Blitz[33] mostrou que o momentum angular em nuvens moleculares gigantes é consistentemente menor do que observado no meio interestelar e que seu sentido de giro é oposto² ao da rotação da Galáxia, indicando que a nuvem não conserva o momentum angular local proveniente da rotação diferencial galáctica.

Além disso, mesmo se a hipótese da origem do momentum angular associada à rotação galáctica seja válida, ainda temos o problema de memória, pois existem diferentes meca-

²Porém, o movimento retrógrado e progressivo da nuvem pode depender do caráter da curva rotacional do disco galáctico na região [34].

nismos físicos que contribuem para perda gradual da memória inicial do vetor momentum angular. Em simples cenários de formação, o momentum angular da nuvem é maior em muitas ordens de magnitude do que observado em estrelas.

2.2 O Problema do momentum angular

Dentre os muitos problemas que concerne à teoria da rotação estelar, a origem e a redistribuição do momentum angular nos estágios iniciais da formação estelar são de longe os mais intrigantes. É durante este período que ocorre a transferência de momentum angular da nuvem genitora para as novas estrelas formadas. Porém, as estrelas contêm somente uma pequena parte do momentum angular inicial do gás do qual elas se formam, de modo que quase todo esse momentum angular inicial foi removido ou redistribuído.

As estrelas são formadas do colapso de densas e frias nuvens moleculares constituídas basicamente de hidrogênio. O colapso gravitacional pode ser espontâneo, quando a densidade ou massa local da nuvem atinge um valor limite por resultado de alguma perda de energia interna, ou estimulado por perturbações externas que altera o equilíbrio do gás; a maior parte da formação de estrelas na Galáxia ocorre nos braços espirais, isso indica que possivelmente parte do material do meio interestelar entra em colapso devido às ondas de choque dos braços espirais (e.g., [35, 36]), a condensação do material também pode ser estimulada por explosões de supernova e colisões com outras nuvens moleculares [37]. Espontâneo ou estimulado, esse processo de contração da nuvem eleva a sua temperatura e pressão central o que contrabalança o colapso, dando origem a um núcleo bem definido denominado de protoestrela.

Em um colapso protoestelar dado estritamente por ação gravitacional, deve-se esperar que, pela conservação do momentum angular, o giro de uma protoestrela seja próximo a velocidade crítica³. Em contraste, as primeiras medidas das velocidades rotacionais para estrelas de massa solar da pré-sequência principal revelaram que suas velocidades raramente excediam 25 km s^{-1} [38, 39]. Adicionalmente, quando consideramos a acreção de matéria com alto momentum angular específico do disco circunstelar as baixas taxas de rotação das estrelas da pré-sequência principal se revelam ainda mais intrigantes.

Uma estrela com acreção de massa de taxa \dot{M} do seu disco ganhará momentum angular

³Velocidade na qual a força centrífuga é igual a força gravitacional na superfície, $V_c = \sqrt{GM/R}$.

a uma taxa:

$$\frac{dJ}{dt} = \dot{M}R^2\Omega_k \quad (2.4)$$

Onde R é o raio da estrela e Ω_k é a velocidade Kepleriana do material do disco circunstelar. Assumindo uma rotação de corpo rígido, isto é, negligenciando a pequena variação no momento de inércia devido à acreção e lembrando que $\Omega_k = V_k/R$, a velocidade de rotação equatorial V_{eq} é

$$V_{eq} = \frac{R^2 V_k}{I} \int \dot{M} dt \quad (2.5)$$

V_k é a velocidade orbital do material circunstelar infinitesimalmente acima da superfície da estrela, logo $V_k = V_c$, onde V_c é a velocidade crítica ou de ruptura da estrela. Portanto,

$$V_{eq} = \left(\frac{R^2}{I} \int \dot{M} dt \right) \cdot V_c \quad (2.6)$$

Para uma estrela de $1 M_\odot$ com momento de inércia $I \approx 0,2M_\odot R^2$ e com taxa de acreção \dot{M} aproximadamente igual a $10^{-7}M_\odot yr^{-1}$ durante uma idade típica de $\sim 10^6$ anos, espera-se que a velocidade rotacional equatorial seja mais da metade da velocidade crítica, $V_{eq} \approx 120 \text{ km s}^{-1}$ [40].

Claramente, uma perda considerável de momentum angular deve ter ocorrido durante e/ou após o início do colapso protoestelar. De fato, ainda que se considerarmos, por exemplo, a suposição de que a nuvem protoestelar adquira seu momentum angular exclusivamente por rotação galáctica, a rotação esperada desta futura estrela é muito maior que as velocidades rotacionais encontradas em estrelas da sequência principal [24]. Para ser mais específico, como mostrado por Spitzer[41], consideremos uma nuvem interestelar com forma de filamento com comprimento de 10 pc (parsec), raio de 0,2 pc e densidade típica de 20 partículas por cm^3 , contendo aproximadamente uma massa solar. Assumindo que sua rotação angular inicial é resultado da rotação galáctica, a rotação angular Ω em torno do seu eixo é 10^{-15} rad/s. Por conservação do momentum angular ($\approx \Omega R^2$), para

formar uma estrela de densidade solar o raio deve diminuir por um fator 10^{-7} e o valor de Ω deve aumentar em 14 ordens de grandeza, $\Omega \approx 10^{-1}$ rad/s. Então, mesmo que a rotação inicial da nuvem seja insignificamente pequena, a velocidade rotacional da estrela será 20% a velocidade da luz.

Desse modo, mecanismos de perda de momentum angular devem desempenhar papéis de suma importância na formação estelar. Nesses estágios iniciais, os principais mecanismos físicos apontados como responsáveis pela perda de momentum angular são torque magnético via vento estelar [40, 30], formação de disco planetário [42, 43] e, principalmente, interação com disco de acreção (e.g., [44, 45]). No entanto, tais processos presentes nesses estágios ainda não estão totalmente elucidados.

Em suma, a origem do momentum angular é um problema complexo, podendo muito bem envolver interações concomitantes entre a rotação diferencial galáctica, movimentos aleatórios do gás interestelar, fragmentação e campos magnéticos da nuvem e da galáxia.

Capítulo 3

Os Dados Observacionais

Os dados da presente Dissertação foram obtidos de 5 trabalhos: Glebocki & Gnacinski[46], De Medeiros & Mayor[47], De Medeiros *et al.*[48], Abt, Levato e Grosso[49], e Royer *et al.*[50]. A escolha dos catálogos foi feita levando-se em consideração a quantidade de estrelas presentes com suas respectivas medidas de rotação ($v \sin i$).

Como critério de estudo, descartamos estrelas da pré-sequência principal, pós ramo AGB (Asymptotic Giant Branch ou Ramo Assimptótico das Gigantes), estrelas de sistemas binários ou múltiplos, estrelas do tipo Be e Wolf-Rayet, estrelas em aglomerados e associações. Foram excluídas também estrelas sem tipo espectral ou classe de luminosidade. Portanto, selecionamos somente estrelas simples do campo e com tipo espectral definido.

A identificação estelar (se a estrela é binária, de aglomerado, classe de luminosidade, etc.), as coordenadas galácticas e as paralaxes¹ foram todas obtidas da base de dados SIMBAD².

3.1 As amostras

O catálogo de Glebocki & Gnacinski é referente às médias ponderadas³ das velocidades rotacionais projetadas, $v \sin i$, determinadas da compilação de vários trabalhos de diferentes autores, totalizando 26565 valores de $\langle v \sin i \rangle$. Com base no critério de estudo

¹Os valores das paralaxes são da missão Hipparcos, realizada pela Agência Espacial Européia ESA (*European Space Agency*).

²Base de dados para identificação e bibliografia de objetos astronômicos do *Centre de Données astronomiques de Strasbourg* (CDS), Observatório de Estrasburgo, França.

³Pesos proporcionais a uma precisão individual estimada por métodos específicos de medição.

descrito inicialmente, selecionamos 13091 estrelas das quais 8882 são anãs V (sequência principal), 1504 subgigantes IV, 1665 gigantes III, 373 gigantes luminosas II, 274 supergigantes Ib, 81 supergigantes superluminosas Ia, 120 estrelas IV-V (estrelas entre o estágio da sequência principal e das subgigantes), 70 III-IV, 46 II-III e 66 estrelas Iab. Os dados abrangem todo o intervalo espectral de O a K, e até M para classes de luminosidade V e III. Porém, há pouquíssimas estrelas para os tipos O e M (36 estrelas do tipo O e 104 do tipo M⁴). Informações como tipo espectral e classe de luminosidade não fazem parte dos dados originais do catálogo, tais informações foram tiradas da base SIMBAD.

A amostra de Glebocki & Gnacinski inclui os trabalhos de Abt, Levato e Grosso, e Royer *et al*, no entanto, as medidas de $v \sin i$ para as estrelas encontradas em ambos os catálogos são diferentes, ver figura 3.1, pois os dados de $v \sin i$ no trabalho Glebocki & Gnacinski são médias de velocidades rotacionais.

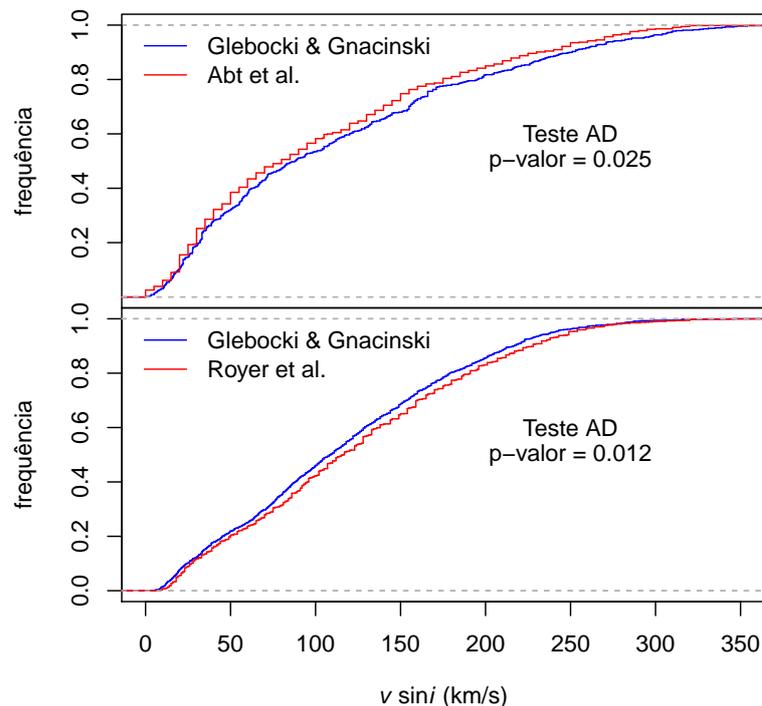


Figura 3.1: Comparação entre a distribuição acumulada de $v \sin i$ das amostras Abt, Levato e Gross, e Royer *et al* com o catálogo Glebocki & Gnacinski. As distribuições acumuladas correspondem às estrelas em comum entre os trabalhos. Em ambas as comparações feitas com o teste Anderson-Darling (teste AD), a probabilidade de que as distribuições sejam diferentes é $P \sim 98\%$.

⁴Lembrando que as 104 estrelas M são compartilhadas entre as classes de luminosidade V e III, o que torna o número de estrelas pequeno.

Em ambos os trabalhos De Medeiros & Mayor e De Medeiros *et al.* apresentam medidas da velocidade de rotação projetada para estrelas evoluídas de classes de luminosidade IV, III, II e Ib, cobrindo a região espectral F, G e K. Nos dois trabalhos, os dados de $v \sin i$ foram obtidos de observações feitas por meio do espectrômetro de correlação cruzada CORAVEL[51]. A precisão do $v \sin i$ é tipicamente 1 km s^{-1} para subgigantes IV e gigantes III, e 2 km s^{-1} para gigantes luminosas II e supergigantes Ib. Para uma análise estatística mais robusta, os dois catálogos foram unidos em uma única tabela totalizando 3139 estrelas. Depois de refinada a amostra, obtivemos uma base de dados final de 2334 estrelas simples.

O catálogo Abt, Levato e Grosso contém medidas das velocidades rotacionais projetadas de 1092 estrelas B listadas no Bright Star Catalogue (BSC; [52, 53]). Os dados de $v \sin i$ foram derivados entre os valores obtidos de $\lambda 4471$ e $\lambda 4481$, e calibrados com o sistema Sletteback *et al.*[54]. As observações foram realizadas com o telescópio 0,9 m coudé feed e o espectrógrafo de 2,1 m (ambos localizados no Kitt Peak National Observatory), equipado com uma grade de 632 ranhuras/mm dando uma resolução de $7,1 \text{ km s}^{-1}$. Das 1092 estrelas, selecionamos para o presente estudo 625 estrelas.

O catálogo Royer *et al.* é composto por outro trabalho, Abt & Morrell[55]. O trabalho de Royer *et al.* é dividido em duas partes: a primeira parte [56] possui valores de $v \sin i$ obtidas por transformadas de Fourier das linhas espectrais para 525 estrelas de tipo espectral B8 a F2 e mais brilhantes do que magnitude visual $V=8$, com erro no $v \sin i$ de 6% em média. Os dados são baseados nas observações feitas no European Southern Observatory (ESO), observatório La Silla, Chile; na segunda parte [50], as observações foram realizadas no Observatório de Haute-Provence, França, para 249 estrelas mais brilhantes do que $V=7$ e com tipos espectrais B8 a F2. As medidas da velocidade rotacional projetada, $v \sin i$, também foram determinadas por transformadas de Fourier, com erro em torno de 5%.

O segundo trabalho, Abt & Morrell, os valores de $v \sin i$ de 1700 estrelas do tipo A, com erro médio de 8 km s^{-1} , foram derivados de CCD coudé spectra e calibrados com o sistema Sletteback *et al.*[54], as observações foram feitas com o telescópio coudé feed em Kitt Peak National Observatory. Mais detalhes sobre as medidas, precisão ou instrumentos utilizados podem ser vistos no referido trabalho. Em suma, a amostra final do catálogo Royer *et al.* é composta por 2150 estrelas com tipos espectrais A, B e F. Desses dados,

selecionamos para análise 1604 estrelas.

A amostral final do presente trabalho é composta por estrelas simples do campo de classes de luminosidade V, IV, III e II e tipos espectrais B, A, F, G e K. O número de medidas de $v \sin i$ para cada estágio evolutivo estelar e tipo espectral está listado na tabela 3.1.

Tabela 3.1: Quantidade de dados de $v \sin i$ presente em cada tipo espectral e classe de luminosidade.

Painel	V	IV	III	II
B	946	202	491	81
A	1855	470	279	33
F	3558	616	213	56
G	2479	316	741	144
K	635	58	1728	149

Capítulo 4

Resultados e discussões

Neste capítulo apresentamos os resultados referentes ao confronto da rotação com as coordenadas galácticas e distância estelar para diferentes tipos espectrais e estágios evolutivos. Os resultados de cada catálogo são apresentados separadamente visando a comparação dos mesmos.

4.1 Determinação dos intervalos

Para estudar a dependência rotacional ao longo das coordenadas galácticas, dividimos as coordenadas em diversos intervalos e analisamos a rotação estelar nessas regiões separadamente. Porém, surge a seguinte questão: qual deve ser a quantidade e largura desses intervalos? Por exemplo, ao longo da latitude, devemos agrupar as estrelas em regiões de 10° em 10° ou analisar as distribuições de 5° em 5° ? A solução para tal problema é procurar relacionar o tamanho dessas regiões com a velocidade de rotação estelar. Para isso, utilizamos o teste Anderson-Darling (teste AD) para identificar os trechos (na longitude, latitude e distância estelar) em que há variações acentuadas da rotação na distribuição estelar. Desse modo, realizamos sucessivos testes sempre em dois intervalos adjacentes para verificar se as distribuições nos mesmos são oriundas de populações diferentes.

Se o teste AD apresentar a probabilidade menor que 95%¹ dos dois intervalos pertencerem à populações distintas, consideramos esses dois segmentos como sendo uma única região de mesma população. Na situação em que o nível de confiança for superior ou igual a 95%, tomamos essas duas regiões como pertencentes a diferentes populações estelares e,

¹Assumindo-se uma margem com 5% de erro para rejeitarmos a *hipótese nula* (em nosso caso, amostras de mesma população) sendo ela verdadeira.

dessa forma, delimitamos essas estrelas em dois intervalos. Como exemplo, analisemos a rotação de estrelas de um algum estágio evolutivo e tipo espectral qualquer, suponhamos que essas estrelas estejam numa região com extensão de 100 pc (parsec) a partir do Sol: iniciamos o teste para estrelas que se encontram nas regiões de 0 a 1 pc e 1 a 2 pc, se o valor-p² encontrado for *maior* que 0,05, ou seja, com nível de confiança inferior a 95%, definimos esses dois intervalos como sendo uma única região estelar com extensão de 0 a 2 pc; na situação em que o valor-p for *menor* ou *igual* a 0,05, admitimos a existência de dois grupos distintos de estrelas delimitados pelos intervalos 0-1 pc e 1-2 pc, e repetimos o mesmo procedimento para os intervalos seguintes 1-2 pc e 2-3 pc, e assim por diante até 100 pc. Portanto, a extensão e a quantidade de intervalos apresentados nos gráficos não foram definidos arbitrariamente e sim por um procedimento estatístico extremamente eficaz que revela o comportamento da rotação estelar com o espaço.

Para ilustrar a aplicação desse método, construímos uma situação hipotética em que numa região de 100 pc a média da rotação estelar varia em 3 km s^{-1} a cada 20 pc, como mostrado no primeiro gráfico da figura 4.1. Existem 5 grupos de estrelas representados por diferentes cores e delimitados em regiões de 20 pc, então, o nosso objetivo é identificar tais grupos estelares e suas delimitações no espaço utilizando apenas a metodologia estatística descrita no parágrafo anterior. Definido uma quantidade mínima de 5 estrelas para aplicação do teste AD, a cada 1 parsec analisamos a rotação estelar, se no intervalo de 1 pc o número de estrelas é menor que 5 aumentamos o comprimento desse intervalo em mais 1 pc até que a quantidade mínima de estrelas seja alcançada. Após analisar toda a região, construímos gráficos de box-plot (diagrama de caixa) para os grupos de estrelas encontrados, como mostrado no gráfico à direita na figura 4.1.

Como podemos ver, empregando esse método, conseguimos identificar os grupos de populações distintas e determinar, com boa precisão, suas respectivas extensões, relacionando-se diretamente a rotação com a variável investigada. Ressaltamos que os resultados do exemplo acima foram obtidos por meio da aplicação do teste AD em **pares de intervalos adjacentes de comprimento de 1 pc**, ou seja, analisamos a amostra em passos de 1 pc (de 1 em 1 pc). Porém, para melhorar ainda mais a precisão dos resultados, analisamos os dados da presente Dissertação em diferentes passos, isto é, não nos limitamos somente em aplicar o teste AD em intervalos de tamanho 1 pc ou 1° para a longitude e latitude

²O valor-p é a probabilidade de se obter um valor da estatística de teste igual ou mais extremo ao que foi observado assumindo que a *hipótese nula* seja verdadeira.

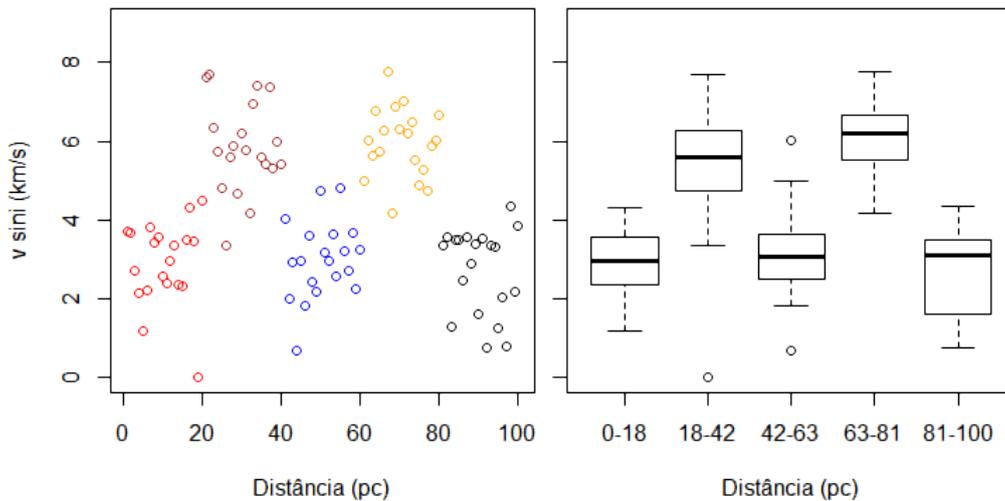


Figura 4.1: Plano $v \sin i$ em função da distância. Os dados de $v \sin i$ são valores aleatórios de distribuições normais com médias (aproximadamente) 3, 6, 3, 6 e 3 para os grupos de dados em vermelho, marrom, azul, laranja e preto, respectivamente. No segundo gráfico, à direita, os valores hipotéticos de $v \sin i$ são representados por box-plots em regiões determinadas pelas análises do teste Anderson-Darling.

galáctica, mas também utilizar o teste AD em amostras de comprimentos 2, 3, 4, 5, 10, 20, ..., 50.

Então, ao estudar a rotação estelar em função, por exemplo, da longitude galáctica selecionamos uma amostra de estrelas que estão entre 0° e 1° e outra amostra compreendida entre 1° e 2° , se essas estrelas pertencerem a mesma população realizamos outro teste para os intervalos $0^\circ - 2^\circ$ e $2^\circ - 3^\circ$, e assim por diante de 1° em 1° . Depois repetimos a mesma análise agora em intervalos de 2° , aplicamos o teste AD para estrelas nas regiões longitudinais $0^\circ - 2^\circ$ e $2^\circ - 4^\circ$, se essas estrelas não pertencerem a mesma população realizamos outro teste para os intervalos $2^\circ - 4^\circ$ e $4^\circ - 6^\circ$, e assim sucessivamente até 360° . Desse modo, continuamos analisando essas mesmas estrelas considerando outros intervalos com tamanhos 3° , 4° , 5° , 10° , 20° , 30° , 40° e 50° , e, ao final de toda a análise, comparamos todos os resultados obtidos para construção do gráfico de $v \sin i$ em função da longitude galáctica.

Inicialmente, utilizamos apenas o teste Kolmogorov-Smirnov (teste KS) no estudo e, em razão disso, a quantidade mínima de estrelas em cada passo ou intervalo foi definida em 36 para a fórmula assintótica dos p-valores [57, 58]. No entanto, passamos a usar o teste Anderson-Darling como alternativa ao Kolmogorov-Smirnov, pois o KS tende a ser mais sensível ao valor mediano da função de distribuição e menos sensível nas caudas [59].

Consequentemente, em situações em que duas distribuições têm medianas próximas, a precisão do teste cai. De qualquer forma teríamos que definir uma quantidade mínima de dados para a aplicação do teste AD, diante disso, estabelecemos o mínimo de 36 estrelas em cada intervalo para amostras com mais de 72 estrelas e mínimo³ 10 para amostras menores.

4.2 Rotação e longitude galáctica

Nesta seção nos limitamos ao estudo do comportamento da velocidade rotacional em função da longitude galáctica, analisando separadamente cada amostra de $v \sin i$.

4.2.1 Catálogo Glebocki & Gnacinski

A amostra de Glebocki & Gnacinski propicia um estudo estatístico extremamente robusto, pois, além da enorme quantidade de dados, os valores de $v \sin i$ na amostra correspondem às médias rotacionais determinadas por pesos proporcionais a uma precisão individual de técnicas específicas de medição. A figura 4.2 mostra a distribuição de $v \sin i$ de cada tipo espectral para estrelas da sequência principal. Nitidamente, vemos que a forma da distribuição depende do tipo espectral, no qual encontramos velocidades altas em estrelas precoces (O, B, A e as F mais quentes) e velocidades baixas em estrelas tardias (F mais frias, G, K e M), e essa dependência é também verificada em outros estágio evolutivos. Dentro de um mesmo tipo espectral, as estrelas tendem a ter velocidades rotacionais semelhantes com exceção as estrelas do tipo F, mais especificamente em torno de F5, correspondendo à linha divisória entre estrelas de alta e baixa rotação, ver figura 4.3. Esta relação observacional reproduz uma das principais características da distribuição da velocidade rotacional, a queda acentuada da taxa de rotação para estrelas com profundas envoltórias convectivas. Essa conexão foi interpretada por Schatzman[62] como resultado da perda de momentum angular causada por ventos magnéticos. Vale ressaltar que a espessura da envoltória convectiva e radiativa varia com a massa estelar, ou seja, podemos encontrar estruturas internas muito distintas de acordo com a classe espectral.

A relação entre quantidade de estrelas e longitude também parece depender do tipo espectral, a figura 4.4 mostra a forma da distribuição do número de estrelas ao longo da

³Alguns autores sugerem $n \geq 5$ (e.g., [60, 61]), porém escolhemos o limite mínimo de 10 estrelas para não ficar com poucos dados nas análises.

longitude galáctica l . Estrelas de tipos espectrais F, G e K apresentam distribuições bem semelhantes, a concentração dessas estrelas é predominante na direção do centro galáctico, $220^\circ < l < 40^\circ$, e mínima no anticentro, $80^\circ < l < 180^\circ$. Para os tipos B e A, o cenário se inverte, a região de maior concentração estelar está localizada na direção do anticentro galáctico, $40^\circ < l < 220^\circ$.

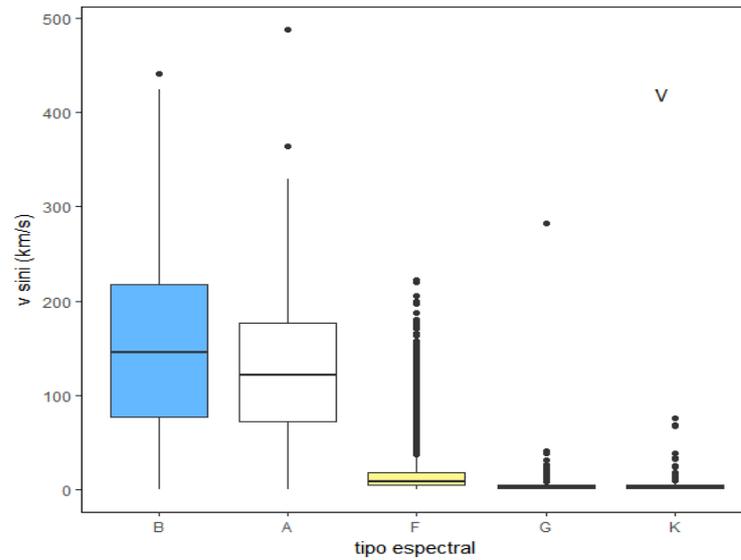


Figura 4.2: Box-plots de v_{sini} em função do tipo espectral para estrelas da sequência principal. Para as estrelas G e K, o valor da mediana de v_{sini} é $2,7 \text{ km s}^{-1}$ e 3 km s^{-1} , respectivamente.

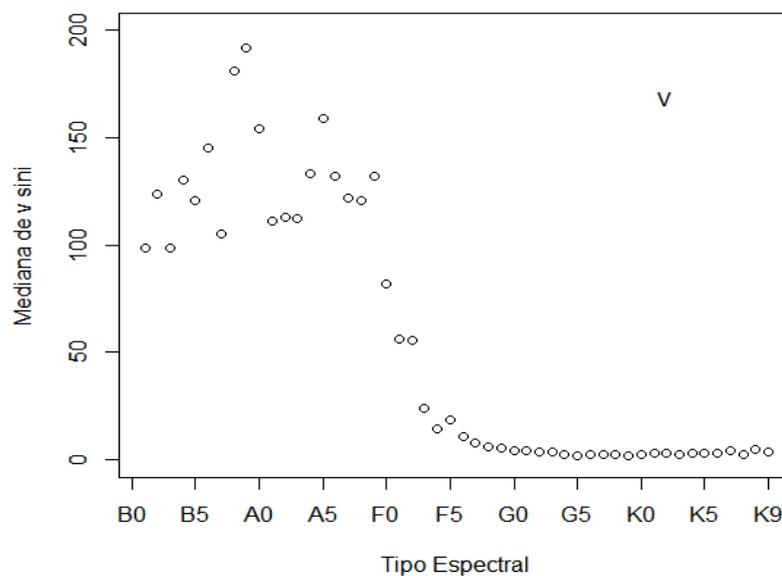


Figura 4.3: Mediana de v_{sini} em função do tipo espectral para estrelas da sequência principal.

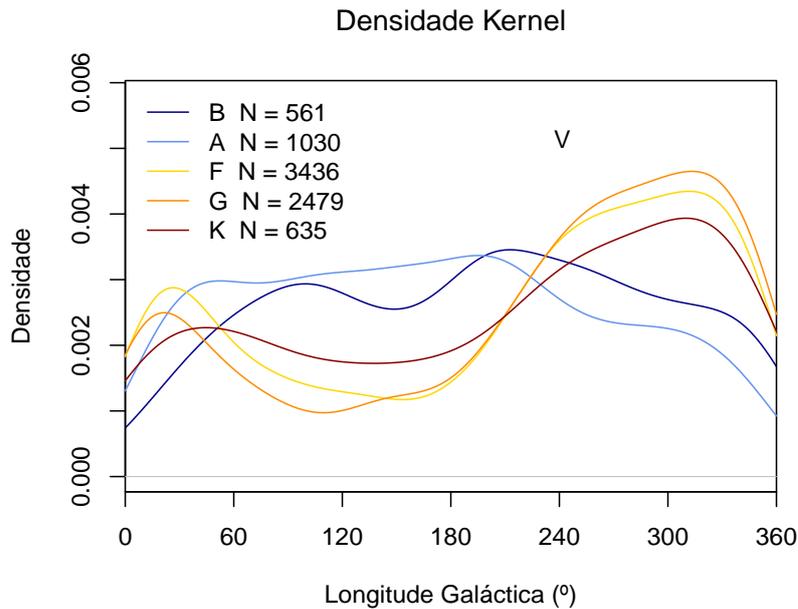


Figura 4.4: Densidade kernel da longitude galáctica. No gráfico é apresentado a forma da distribuição estelar de cada tipo espectral ao longo da longitude galáctica para classe de luminosidade V. A letra N é o número de estrelas em cada classe espectral. O declínio das linhas nos valores extremos do gráfico (em 0 e 360) resulta do efeito de suavização do estimador de densidade kernel, e não está relacionado ao número de estrelas nesses extremos.

A figura 4.5 mostra a distribuição dos valores do 1° quartil (25% dos dados), 3° quartil (75% dos dados) e da mediana de $v \sin i$ em função da longitude galáctica l para estrelas da sequência principal. Para cada tipo espectral construímos gráficos polares de $v \sin i$ e l , onde o raio corresponde aos valores da velocidade rotacional e a circunferência representa a coordenada longitudinal. Para estrelas do tipo espectral B, gráfico (a), observa-se uma nítida assimetria na velocidade rotacional, onde encontramos rotações altas nas regiões do centro, $305^\circ < l < 0^\circ$, e rotações baixas no anticentro galáctico, $125^\circ < l < 165^\circ$. A mediana da velocidade rotacional na direção do centro galáctico corresponde a 184 km s^{-1} , enquanto no anticentro a mediana de $v \sin i$ é somente 90 km s^{-1} , tanto para o 1° e 3° quartil encontramos rotações mais altas em $305^\circ < l < 0^\circ$. Ressaltamos que todos os intervalos aqui apresentados foram determinados por testes estatísticos com mais de 95% de confiança.

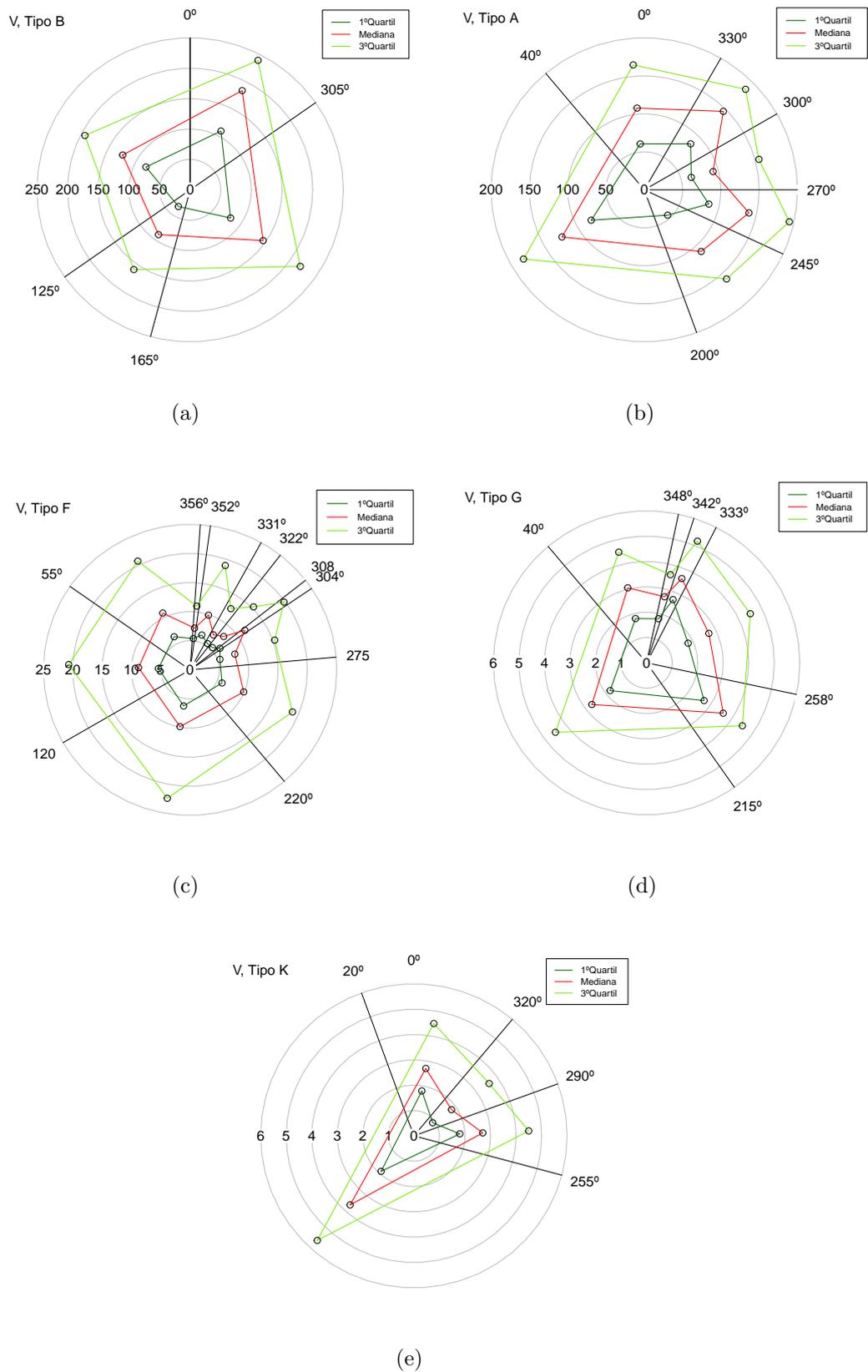


Figura 4.5: Gráficos polares de $v \sin i$ em função da longitude galáctica para estrelas da classe de luminosidade V e tipos espectrais B, A, F, G e K. Em cada gráfico está plotado os valores do 1°, 2° (mediana) e 3° quartil pertencentes a um dado intervalo de longitude. O raio dos círculos corresponde à velocidade de rotação, $v \sin i$, e a circunferência refere-se à longitude galáctica.

Para o tipo espectral A, as estrelas com rotações mais altas concentram-se nos intervalos $245^\circ < l < 270^\circ$ e $300^\circ < l < 330^\circ$, enquanto na região $270^\circ < l < 300^\circ$ há uma maior frequência de valores baixos de $v \sin i$. Para ambas as estrelas do tipo F e G, na direção do centro galáctico encontramos máximos e mínimos na distribuição de velocidades. Nos gráficos (c) e (d), podemos observar que existe uma região de mínimo em comum, mais precisamente dentro do intervalo longitudinal $342^\circ < l < 356^\circ$.

Ainda na figura 4.5, gráfico (e), o comportamento da distribuição de $v \sin i$ das estrelas K com a longitude é totalmente oposto ao encontrado nas estrelas de tipo espectral B. As estrelas do tipo K apresentam rotações altas em uma ampla região de $20^\circ < l < 255^\circ$, e rotações mais baixas na direção $290^\circ < l < 320^\circ$.

Diferente da distribuição rotacional, as estrelas de tipo B e K apresentam intervalos longitudinais semelhantes. Podemos observar que entre as regiões de máximo e mínimo de $v \sin i$ há dois intervalos simétricos com rotações parecidas: $0^\circ < l < 125^\circ$ e $165^\circ < l < 305^\circ$ para as estrelas B; $320^\circ < l < 20^\circ$ e $255^\circ < l < 290^\circ$ para as estrelas K.

Outro aspecto importante a ser sublinhado, para os tipos espectrais A, F, G e K, na direção do centro galáctico concentra-se uma maior frequência de intervalos com diferentes distribuições de $v \sin i$, enquanto para a faixa longitudinal $\sim 40^\circ < l < 220^\circ$ encontramos poucos intervalos delimitados, o que significa que dentro dessa região $\sim 40^\circ < l < 220^\circ$ as velocidades rotacionais projetadas são bastante homogêneas.

Para as estrelas subgigantes (classe IV), a figura 4.6 mostra a distribuição dessa classe na longitude galáctica. Em geral, de acordo com a figura, a maior concentração de estrelas é na região $200^\circ < l < 340^\circ$, como também evidenciado na figura 4.7.

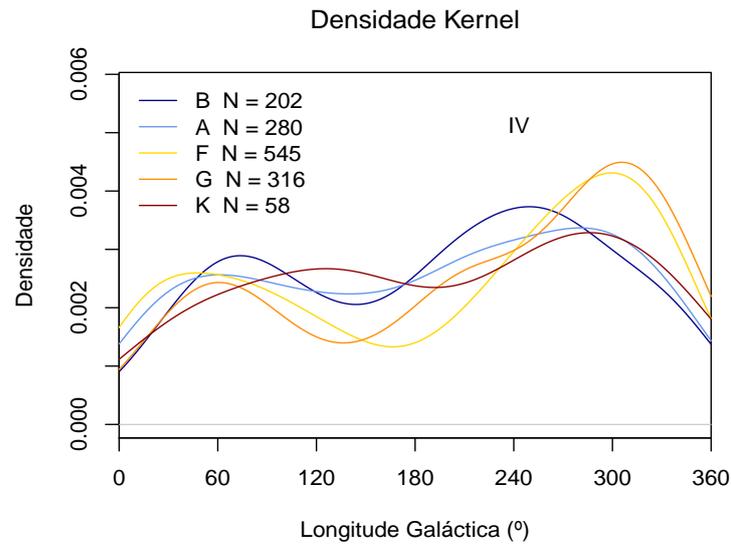


Figura 4.6: Densidade kernel da longitude galáctica. No gráfico é apresentada a forma da distribuição estelar de cada tipo espectral ao longo da longitude galáctica para estrelas subgigantes.

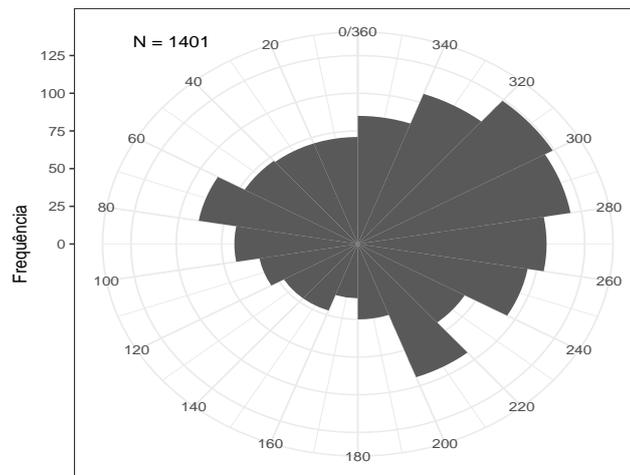


Figura 4.7: Histograma em coordenadas polares do número de estrelas subgigantes ao longo da longitude.

Na figura 4.8 é mostrado o comportamento da rotação com a longitude galáctica para estrelas subgigantes. Nos tipos espectrais A e G, não foi encontrada nenhuma região longitudinal com grupos de estrelas de velocidades rotacionais contrastantes, indicando que a distribuição rotacional ao longo da longitude é uniforme. Como observado nas estrelas da sequência principal do tipo B, as estrelas subgigantes de tipo espectral B apresentam rotações baixas na direção do anticentro, $80^\circ < l < 200^\circ$, e rotações altas na direção oposta, $200^\circ < l < 80^\circ$, gráfico (a).

Para as estrelas F, gráfico (b), as três regiões $0^\circ < l < 25^\circ$, $80^\circ < l < 112^\circ$ e $210^\circ < l < 240^\circ$ apresentam tamanhos e velocidades similares, com a maior mediana de $v \sin i$ em $0^\circ < l < 25^\circ$. O intervalo $210^\circ < l < 240^\circ$ apresenta o maior 3º quartil, onde é contrastado pela baixa rotação no intervalo imediatamente oposto $25^\circ < l < 80^\circ$. No gráfico (c), como também observado na sequência principal, as estrelas subgigantes de tipo K apresentam alta rotação em $30^\circ < l < 280^\circ$ e velocidades baixas na direção do centro galáctico, $280^\circ < l < 30^\circ$.

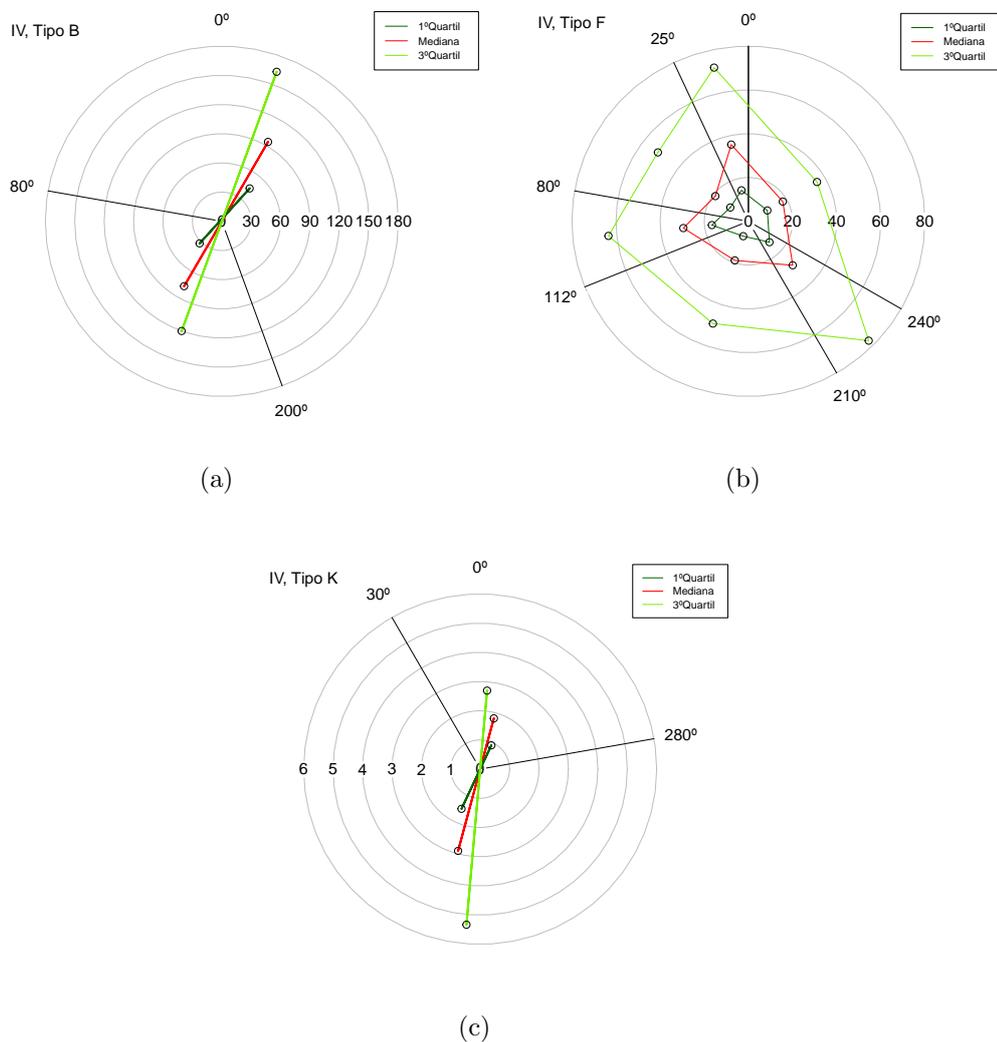


Figura 4.8: Gráficos polares da distribuição de $v \sin i$ em função da longitude galáctica para estrelas subgigantes (classe IV) com tipos espectrais B, F e K. O raio dos círculos corresponde à velocidade de rotação, $v \sin i$, e a circunferência refere-se à longitude galáctica.

Referente às estrelas gigantes (classe III), a figura 4.9 mostra como está distribuída essas estrelas com a longitude. O comportamento da rotação como função da coordenada

longitudinal l das estrelas gigantes é mostrado na figura 4.10. Em geral, as estrelas do tipo B mantêm a mesma correlação de $v \sin i$ e longitude encontrada nos outros estágios evolutivos, as velocidades rotacionais mais altas encontram-se no intervalo $245^\circ < l < 5^\circ$.

Para as estrelas do tipo A, gráfico (b), a alta rotação predomina em uma grande região de $255^\circ < l < 170^\circ$. Quanto às estrelas do tipo F, as rotações mais altas correspondem a uma região menor que vai de 85° a 205° . Em relação ao tipo espectral G, gráfico (d), as estrelas de rotações mais altas localizam-se no intervalo $200^\circ < l < 250^\circ$, correspondendo também a região de velocidades altas nas estrelas do tipo G da sequência principal. Por fim, as estrelas K, gráfico (e), apresentam rotações maiores no intervalo $200^\circ < l < 295^\circ$ e velocidades mais baixas em $140^\circ < l < 170^\circ$, o que remete a um comportamento rotacional diferente do observado em outros estágios evolutivos de mesmo tipo espectral.

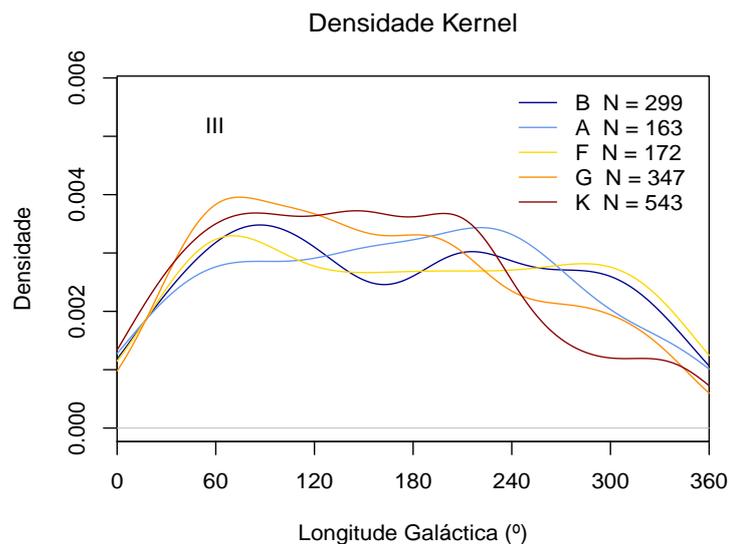


Figura 4.9: Densidade kernel da longitude galáctica em cada tipo espectral para estrelas gigantes. A concentração de estrelas, todas as classes espectrais, é menor na faixa $\sim 230^\circ < l < 30^\circ$.

Para a última classe de luminosidade da amostra Glebocki & Gnacinski, a figura 4.11 mostra a forma da distribuição do número de gigantes luminosas (classe II) ao longo da longitude galáctica. Em razão da pouca quantidade de dados presente em cada tipo espectral, o número mínimo de estrelas nos intervalos foi definido em 10 para aplicação do teste Anderson-Darling, e obviamente o comprimento e a quantidade de intervalos é influenciado pela proporção entre o número total de estrelas e quantidade mínima para os testes.

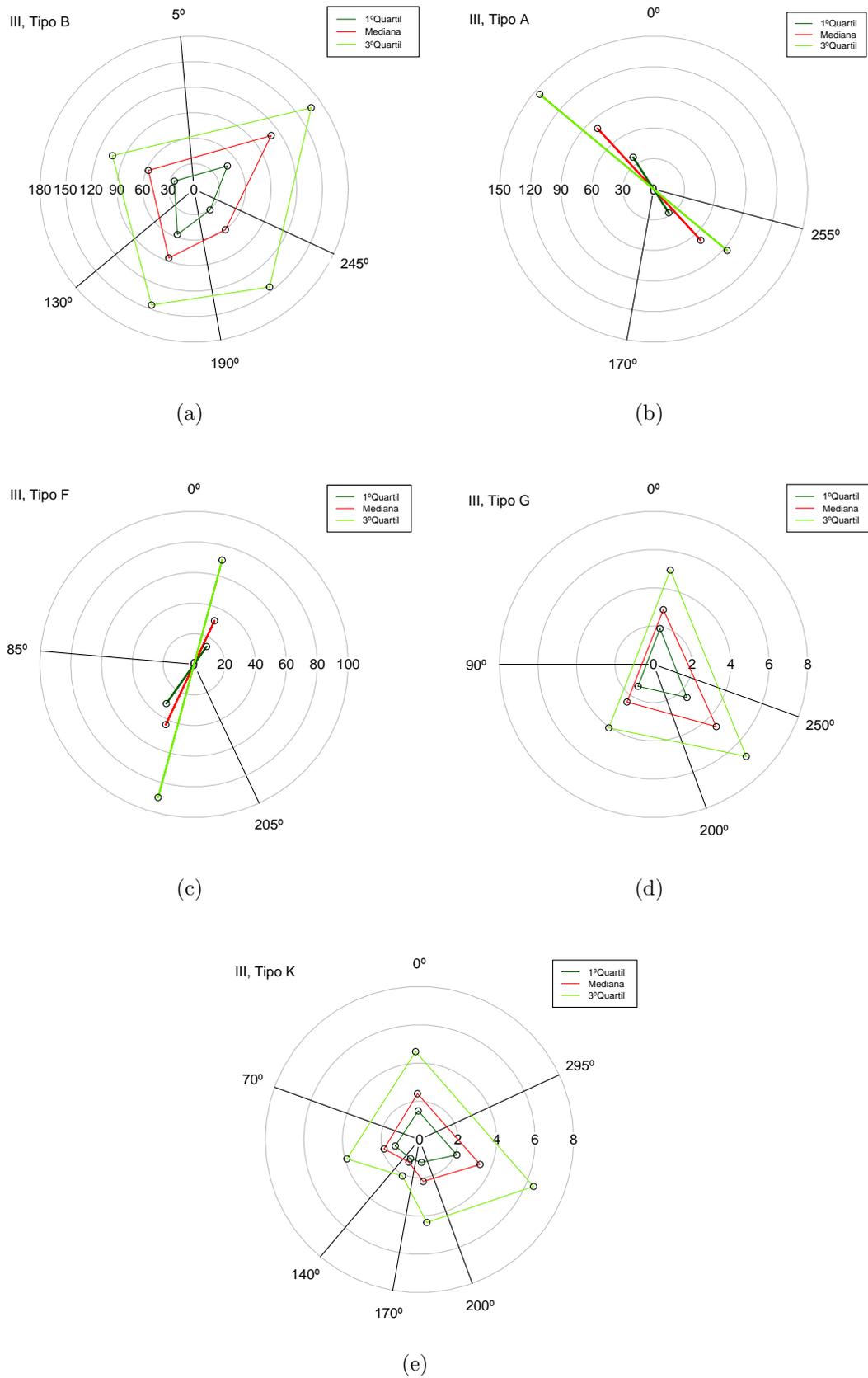


Figura 4.10: Gráficos polares da distribuição de $v \sin i$ em função da longitude galáctica para estrelas gigantes (classe III) com tipos espectrais B, A, F, G e K. O raio dos círculos corresponde à velocidade de rotação, $v \sin i$, e a circunferência refere-se à longitude galáctica.

A figura 4.12 mostra a dependência de $v \sin i$ com a longitude em cada classe espectral para as estrelas gigantes luminosas. No gráfico (a), as estrelas do tipo B apresentam o mesmo comportamento rotacional observado em outras fases evolutivas, os altos valores de $v \sin i$ localizam-se na direção do centro galáctico, $320^\circ < l < 70^\circ$. Para o tipo espectral A, gráfico (b), o intervalo $0^\circ < l < 180^\circ$ (com 10 estrelas) a mediana de $v \sin i$ é 64 km s^{-1} , valor 3 vezes maior do que encontrado na outra parte da circunferência.

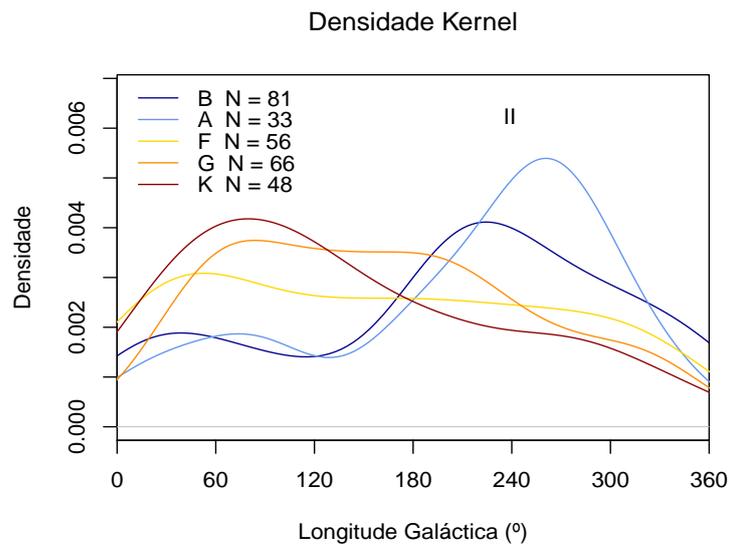


Figura 4.11: Estimativa de densidade kernel da longitude galáctica em cada tipo espectral para estrelas gigantes luminosas (classe II).

Nas estrelas F e G, gráficos (c) e (d), os altos valores de $v \sin i$ concentram-se na mesma região longitudinal $\sim 205^\circ < l < 340^\circ$. Para o tipo F, o intervalo $205^\circ < l < 340^\circ$ (com 18 estrelas) contém distribuição rotacional negativamente assimétrica (dispersão em $v \sin i$ maior entre os valores do 1º quartil e mediana) e variabilidade acentuada nas rotações, enquanto no intervalo $340^\circ < l < 205^\circ$ (com 38 estrelas) configura-se uma distribuição positivamente assimétrica (maior dispersão nos valores de $v \sin i$ entre a mediana e o 3º quartil).

Por fim, nas estrelas do tipo K as altas velocidades rotacionais estão localizadas em uma grande região de $270^\circ < l < 160^\circ$ com 38 estrelas, onde o 1º quartil de $v \sin i$ nesse intervalo é maior do que a mediana encontrada no intervalo $160^\circ < l < 270^\circ$ (com 10 estrelas), no entanto, isso pode ser efeito da baixa quantidade de dados.

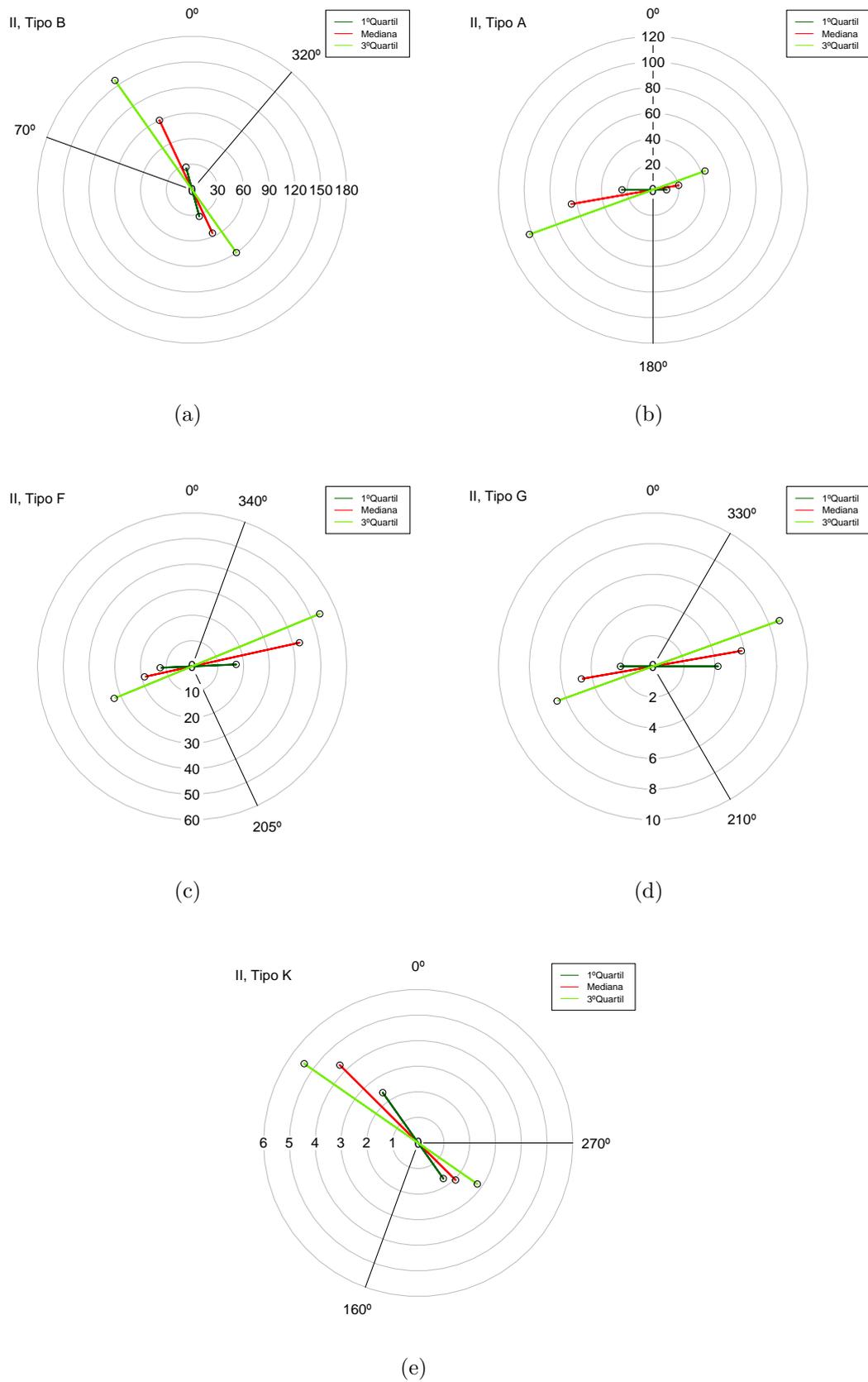


Figura 4.12: Idem figura 4.10, para as estrelas gigantes luminosas (classe II).

4.2.2 Catálogo Abt, Levato e Grosso

A amostra de Abt, Levato e Grosso é composta por estrelas da sequência principal e estrelas gigantes de tipo espectral B. A figura 4.13 mostra o número de estrelas da sequência principal em cada setor da coordenada longitudinal.

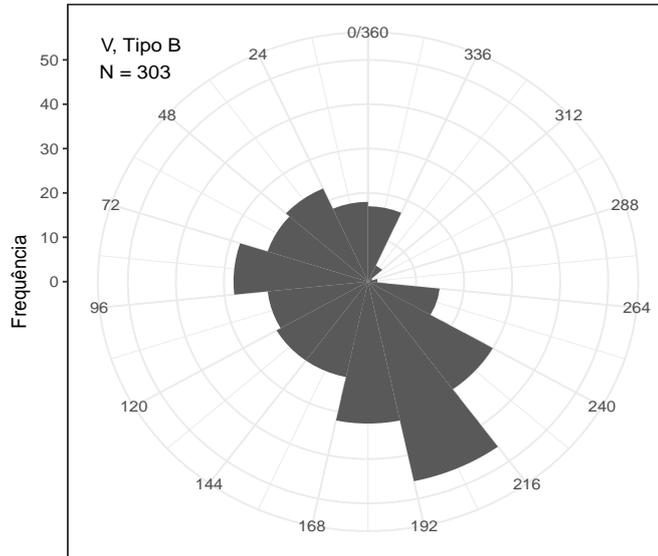


Figura 4.13: Histograma em coordenadas polares do número de estrelas anãs (classe V) ao longo da longitude.

O comportamento rotacional das estrelas B da sequência principal é mostrado na figura 4.14. Baixos valores de $v \sin i$, com mediana de 95 km s^{-1} , concentram-se na região $125^\circ < l < 180^\circ$ com cerca de 47 estrelas, na qual 75% apresentam rotações acima de 38 km s^{-1} , essa região de baixas velocidades também foi identificada no catálogo de Glebocki & Gnacinski. O extenso intervalo $180^\circ < l < 125^\circ$ é caracterizado por estrelas de altas velocidades com mediana de 128 km s^{-1} , onde 75% da amostra tem velocidades acima de 69 km s^{-1} .

Nas estrelas gigantes do tipo B não foi encontrado nenhum setor na longitude galáctica com distribuições rotacionais significativamente (de probabilidade igual ou superior a 95%) distintas, o que indica algum grau de homogeneidade nas rotações ao longo da coordenada.

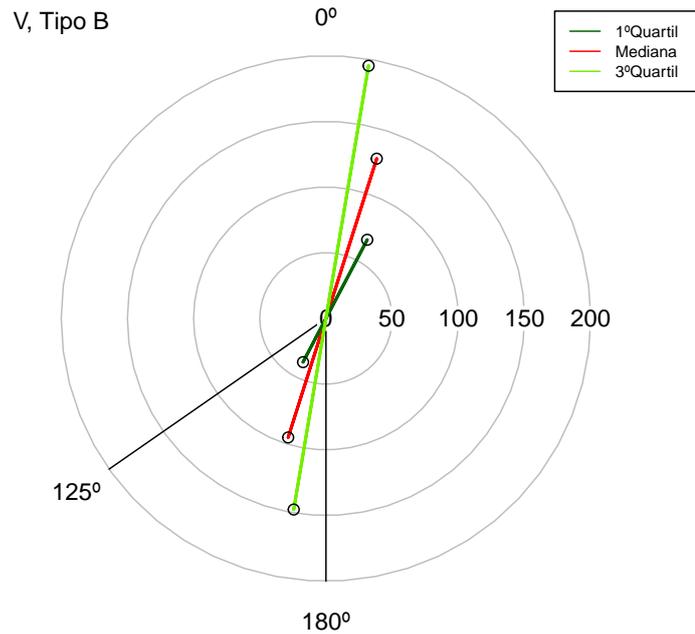


Figura 4.14: Gráfico em coordenadas polares da distribuição de $v \sin i$ em função da longitude galáctica para estrelas do tipo B da sequência principal.

4.2.3 Catálogo Royer *et al.*

A amostra do trabalho Royer *et al.* abrange estrelas de classes de luminosidades V, IV e III com tipos espectrais B, A e F. Para uma melhor visualização da distribuição do número de estrelas ao longo da coordenada longitudinal, a figura 4.15 mostra a estimativa de densidade kernel da longitude galáctica das estrelas da sequência principal.

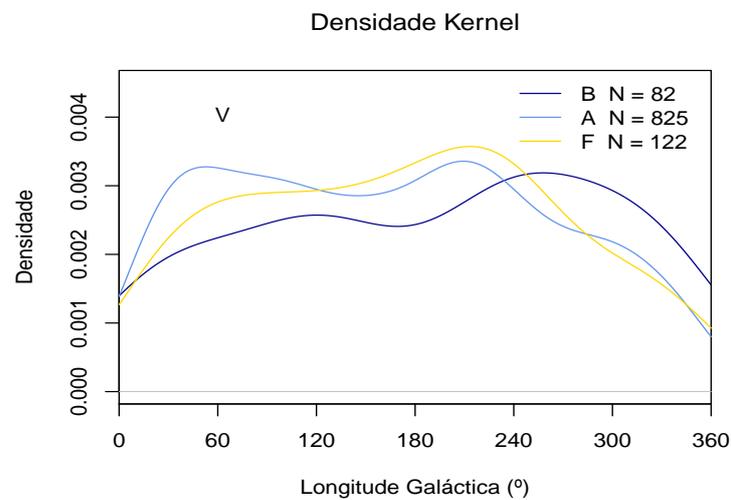


Figura 4.15: Estimativa de densidade kernel da longitude galáctica para os tipos espectrais B, A e F da sequência principal.

No gráfico (a), figura 4.16, levando-se em conta o 1º, 2º e 3º quartil, a distribuição das velocidades no intervalo $195^\circ < l < 360^\circ$ (com 38 estrelas) é aproximadamente 56% maior do que encontrado no intervalo $0^\circ < l < 195^\circ$.

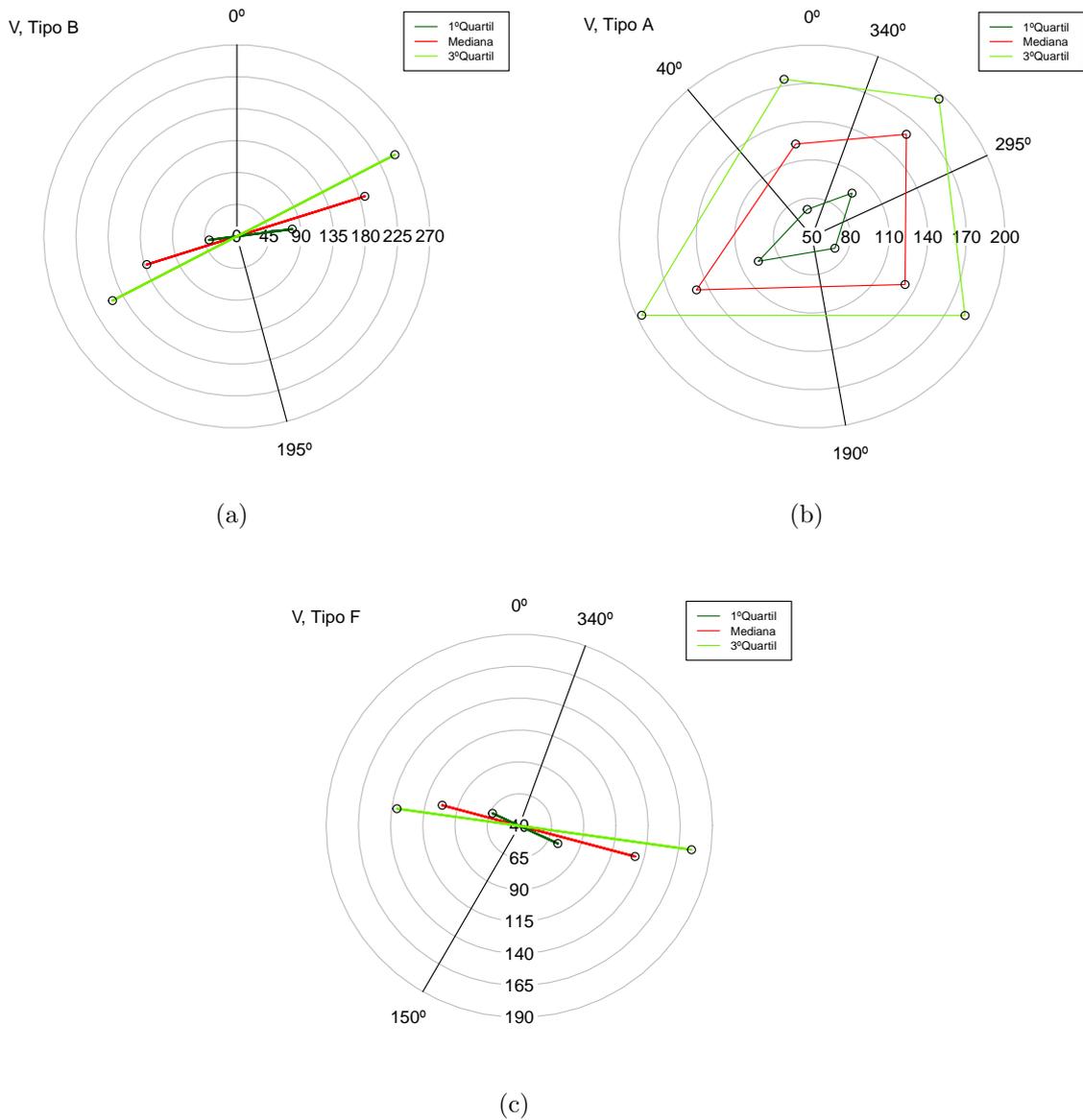


Figura 4.16: Gráficos em coordenadas polares da distribuição de $v \sin i$ em função da longitude galáctica para estrelas de tipos espectrais B, A e F pertencentes à sequência principal.

Para o tipo espectral A, gráfico (b), as duas regiões $40^\circ < l < 190^\circ$ e $295^\circ < l < 340^\circ$ se destacam pelos altos valores de $v \sin i$ e apresentam distribuições de velocidades similares. Os intervalos $340^\circ < l < 40^\circ$ e $190^\circ < l < 295^\circ$, caracterizados por valores de $v \sin i$ mais baixos, também apresentam distribuições quase idênticas com probabilidade igual a 86% de serem iguais.

Refente às estrelas do tipo F, na região $150^\circ < l < 340^\circ$ (com 65 estrelas) identifica-se altas velocidades rotacionais e uma maior variabilidade nas rotações, com a faixa interquartil (gama de pontos do 1º ao 3º quartil) 40% maior do que observado no intervalo $340^\circ < l < 150^\circ$.

Concernente às estrelas subgigantes, o tipo espectral B contém dados insuficientes. Para as estrelas do tipo A, nenhum intervalo na longitude galáctica foi encontrado. A figura 4.17 mostra o número de estrelas do tipo F em cada setor da longitude galáctica.

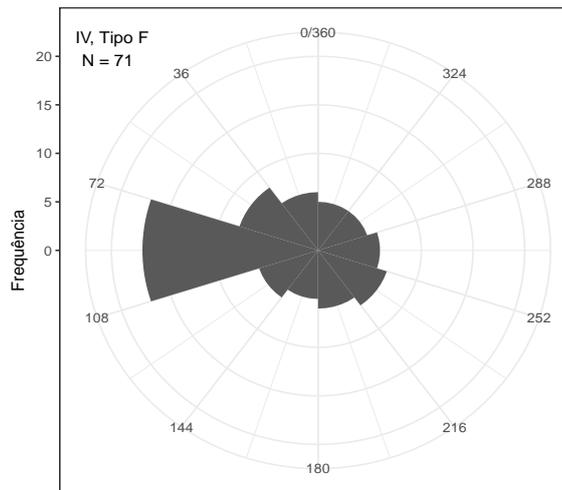


Figura 4.17: Histograma em coordenadas polares do número de estrelas subgigantes de tipo espectral F ao longo da longitude.

No tipo espectral F, realizando testes em pares de 10 em 10 estrelas no mínimo, foram identificados dois intervalos com distribuições rotacionais diferentes, ver figura 4.18. O intervalo $230^\circ < l < 90^\circ$ (com 46 estrelas) é constituído por estrelas de alta rotação, onde 75% da distribuição corresponde a valores de $v \sin i$ acima de 86 km s^{-1} , valor esse maior do que a mediana rotacional da região $90^\circ < l < 230^\circ$.

Para as estrelas gigantes do tipo A, não foi encontrada nenhuma região com distribuições rotacionais diferentes. Os tipos espectrais B e F contém estrelas insuficientes.

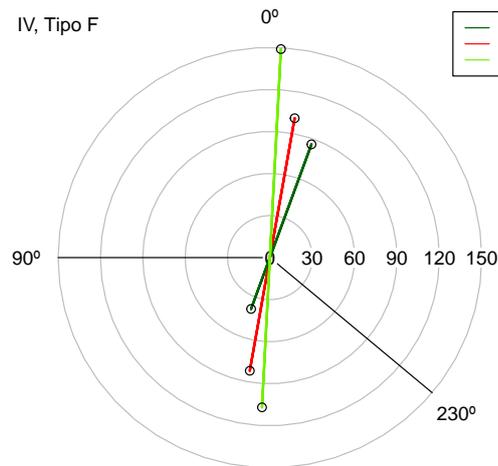


Figura 4.18: Gráfico em coordenadas polares da distribuição de $v \sin i$ em função da longitude galáctica para estrelas subgigantes do tipo F.

4.2.4 Catálogos De Medeiros *et al.*

Nesta subseção estudaremos os trabalhos de De Medeiros *et al.* e De Medeiros & Mayor, nos quais foram unidos em uma única amostra. Ambos os trabalhos incluem estrelas evoluídas de classes III e II com tipos espectrais G e K.

A figura 4.19 mostra o número de estrelas gigantes ao longo da longitude galáctica.

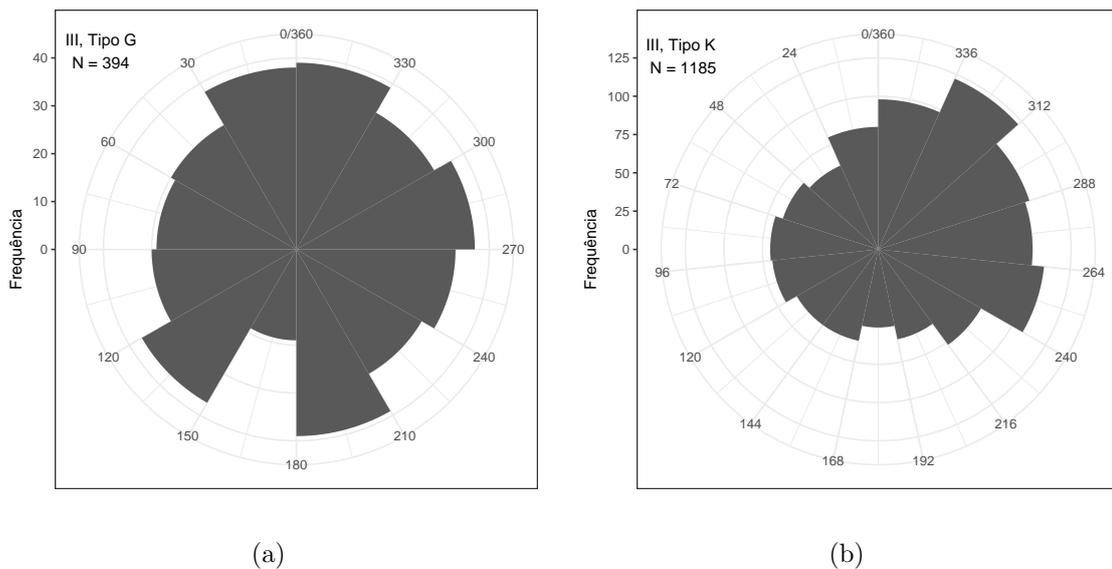


Figura 4.19: Histogramas da longitude galáctica para as estrelas gigantes. Os painéis (a) e (b) correspondem aos espectros G e K, respectivamente.

Para as estrelas do tipo G, gráfico (a) na figura 4.20, o intervalo $55^\circ < l < 175^\circ$

apresenta a menor faixa interquartil, isto é, baixa variabilidade nos valores de $v \sin i$, correspondendo também o menor 3º quartil, assim como constatado nas estrelas de mesma classe e tipo espectral na amostra de Glebocki & Gnacinski (ver gráfico (d) na figura 4.10). Tendo em conta o 1º, 2º e 3º quartil, a região $345^\circ < l < 55^\circ$ é formada por estrelas de rotações mais elevadas e com grande dispersão nas velocidades rotacionais.

Referente ao tipo espectral K, gráfico (b), configura-se um ampla região que vai de 35° a 205° com estrelas de mesmo comportamento rotacional. Em contraste, a outra parte da região longitudinal é caracterizada por estrelas com diferentes distribuições rotacionais. Nos intervalos $340^\circ < l < 350^\circ$ (com 48 estrelas) e $20^\circ < l < 35^\circ$ (com 39 estrelas), 50% da distribuição consiste de velocidades rotacionais exatamente iguais a 1 km s^{-1} .

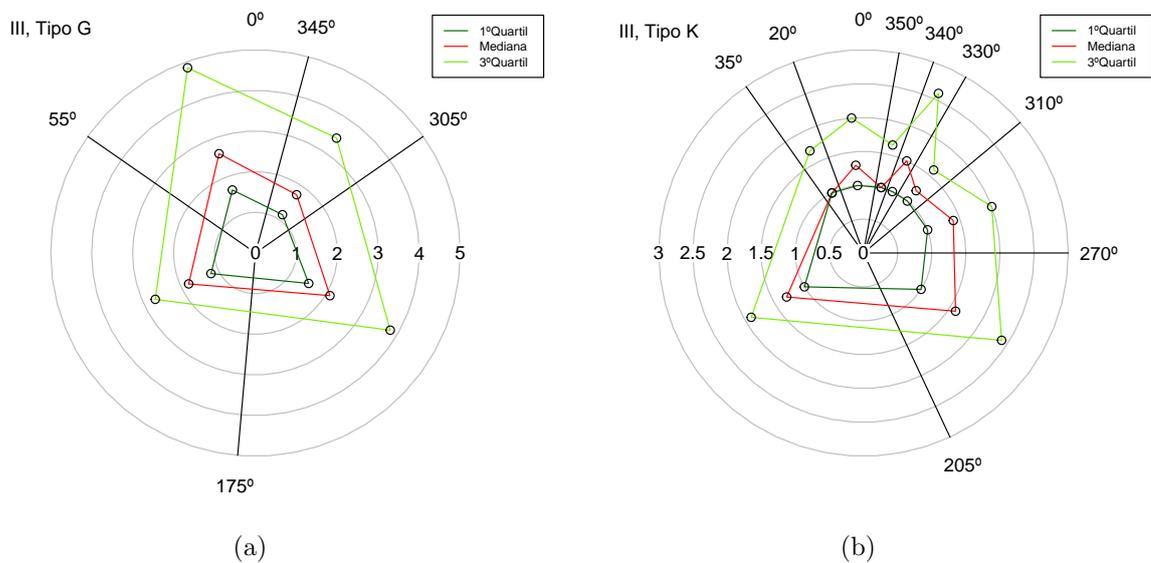


Figura 4.20: Gráfico em coordenadas polares da distribuição de $v \sin i$ em função da longitude galáctica para estrelas gigantes de tipos espectrais G e K.

Para as estrelas gigantes luminosas do tipo K não foi identificada nenhuma região com distribuições de $v \sin i$ diferentes. Assim como observado na classe de luminosidade III, as estrelas gigantes luminosas com tipo espectral G de baixa rotação estão delimitadas no intervalo $25^\circ < l < 180^\circ$ (com 45 estrelas), onde 50% dessa distribuição apresenta rotações abaixo de $1,7 \text{ km s}^{-1}$, ver figura 4.21. Na região $180^\circ < l < 25^\circ$ (com 33 estrelas), 75% da amostra exibe rotações acima de $3,7 \text{ km s}^{-1}$.

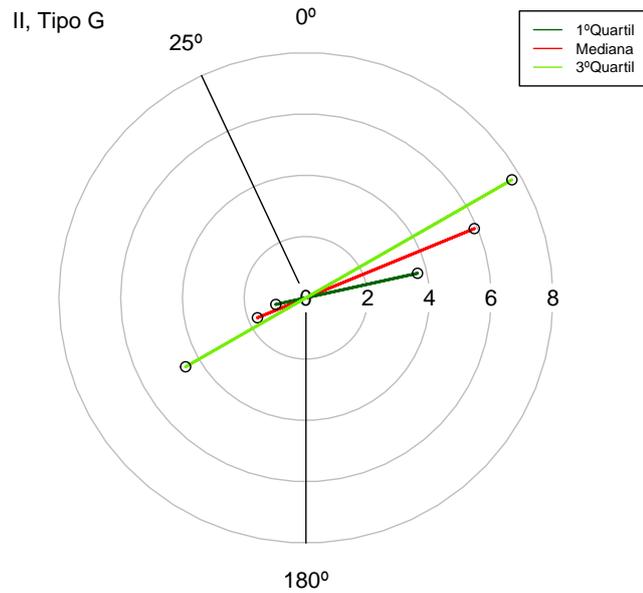


Figura 4.21: Idem figura 4.20, para as estrelas gigantes luminosas de tipo espectral G.

Em síntese, como foi observado em todas as amostras, estrelas de tipo espectral B em qualquer fase evolutiva apresentam alta rotação em intervalos longitudinais delimitados próximo à direção do centro galáctico e/ou baixas rotações em regiões localizadas na direção do anticentro. Esse resultado é consistente com os obtidos por Burki & Maeder, em 1977, e Wolff *et al.* em 1982. Em contraste com a classe espectral B, as estrelas sub-gigantes e da sequência principal de tipo K exibem velocidades rotacionais menores em regiões na longitude próximas ao centro da Galáxia. Referente ao tipo espectral G, essas estrelas, em todos os estágios evolutivos analisados, apresentam altos valores de $v \sin i$ no 3° quadrante do plano longitudinal, $\sim 200^\circ < l < 300^\circ$. Para as outras classes espectrais, A e F, é difícil definir algum padrão sólido no comportamento rotacional com a longitude galáctica.

4.3 Rotação e latitude galáctica

Nesta seção abordaremos a dependência de $v \sin i$ com a latitude galáctica, em que analisamos o comportamento rotacional com a latitude em diferentes setores (quatro regiões com abertura angular de 90°) da longitude galáctica.

4.3.1 Catálogo Glebocki & Gnacinski

A figura 4.22 exibe a forma da distribuição de estrelas anãs (sequência principal) com a latitude galáctica b . Distintamente, como esperado, as estrelas do tipo B tendem a se aglomerar no plano galáctico, pois a espessura do disco da Galáxia depende da idade das estrelas que estão sendo examinadas, onde populações estelares mais antigas têm alturas maiores [63]. Exceto para as estrelas A, a concentração estelar é um pouco maior abaixo do plano galáctico, onde em média 57% das estrelas estão localizadas em $b < 0$.

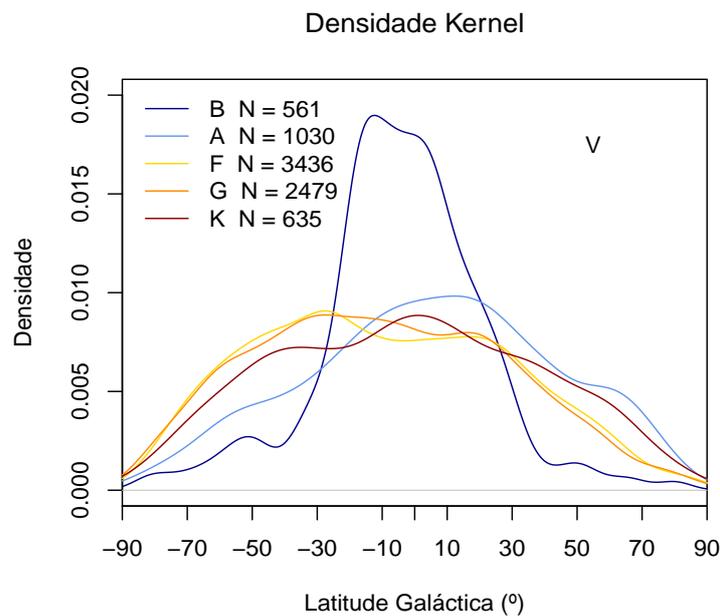


Figura 4.22: Estimativa de densidade kernel da latitude galáctica de diferentes tipos espectrais para as estrelas da sequência principal.

Para a sequência principal, as figuras 4.23, 4.24, 4.25, 4.26 e 4.27 mostram a distribuição da rotação estelar de cada tipo espectral em função da latitude galáctica em quatro regiões da longitude.

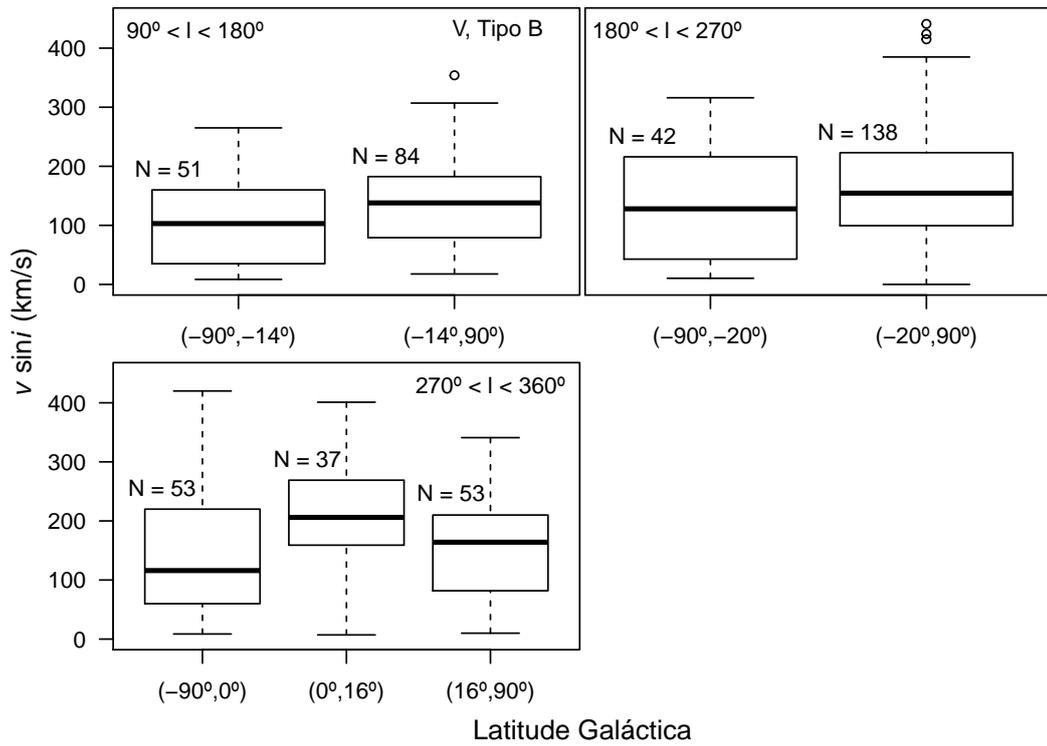


Figura 4.23: Box-plots de $v \sin i$ em função da latitude galáctica para estrelas anãs do tipo espectral B. Cada painel corresponde a uma região de 90° na longitude galáctica.

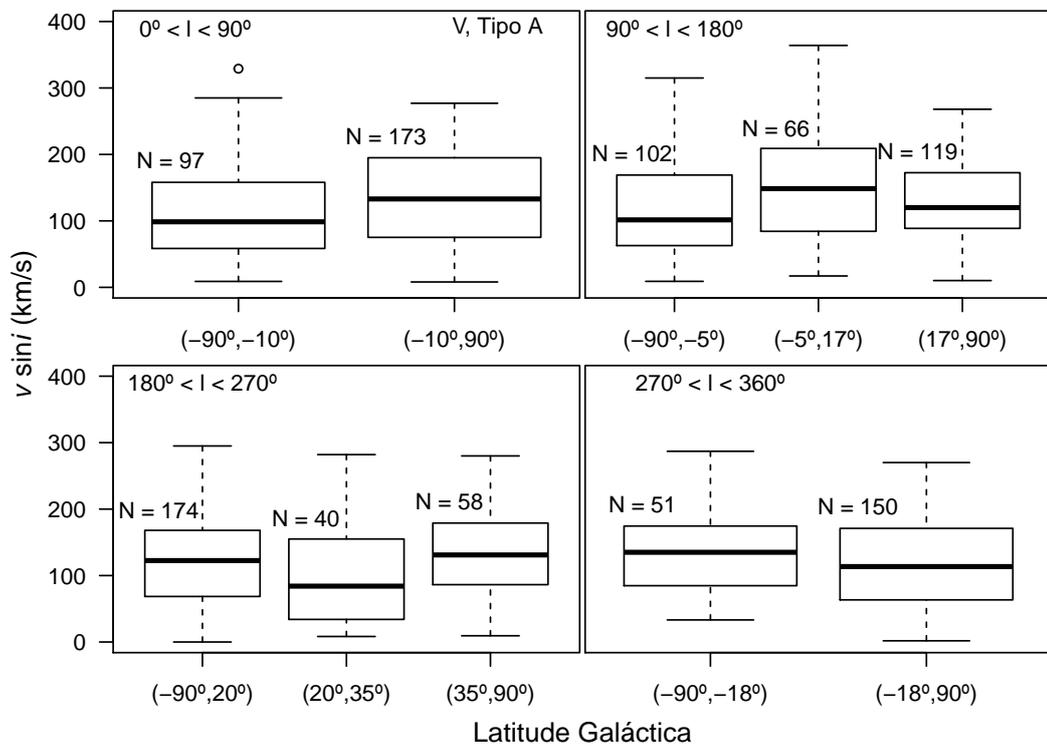


Figura 4.24: Idem figura 4.23, para o tipo espectral A.

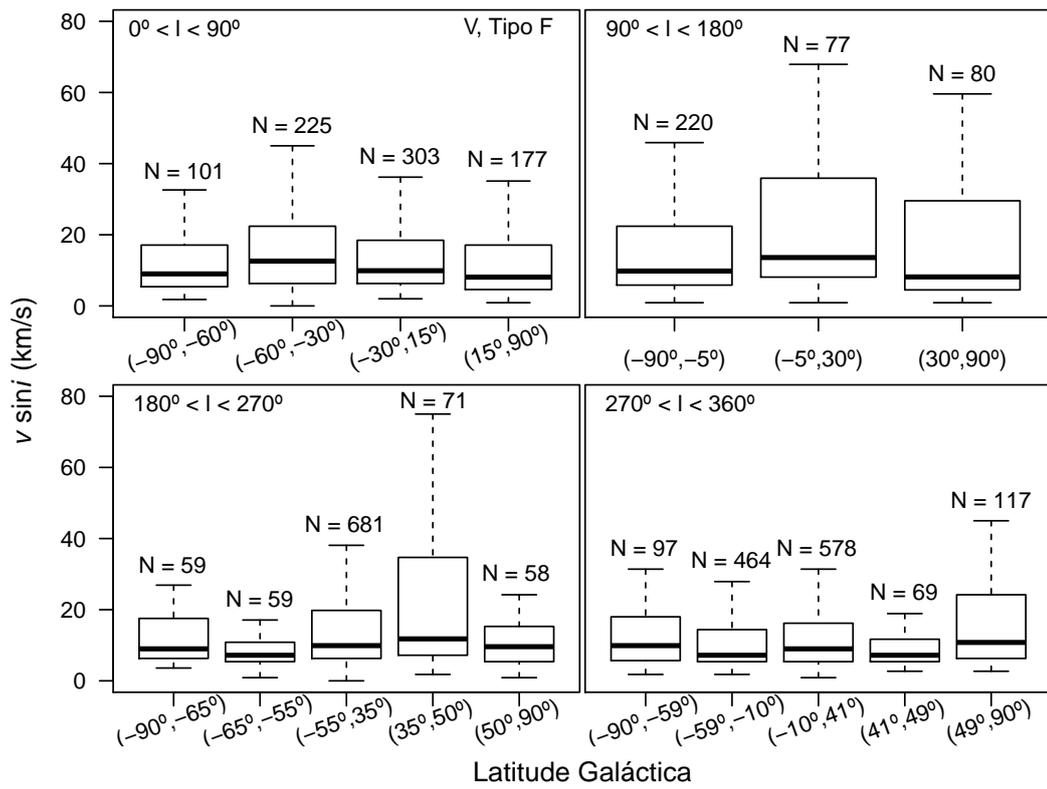


Figura 4.25: Box-plots de $v \sin i$ em função da latitude galáctica para estrelas anãs do tipo espectral F. Para uma melhor visualização, os valores atípicos foram ocultados.

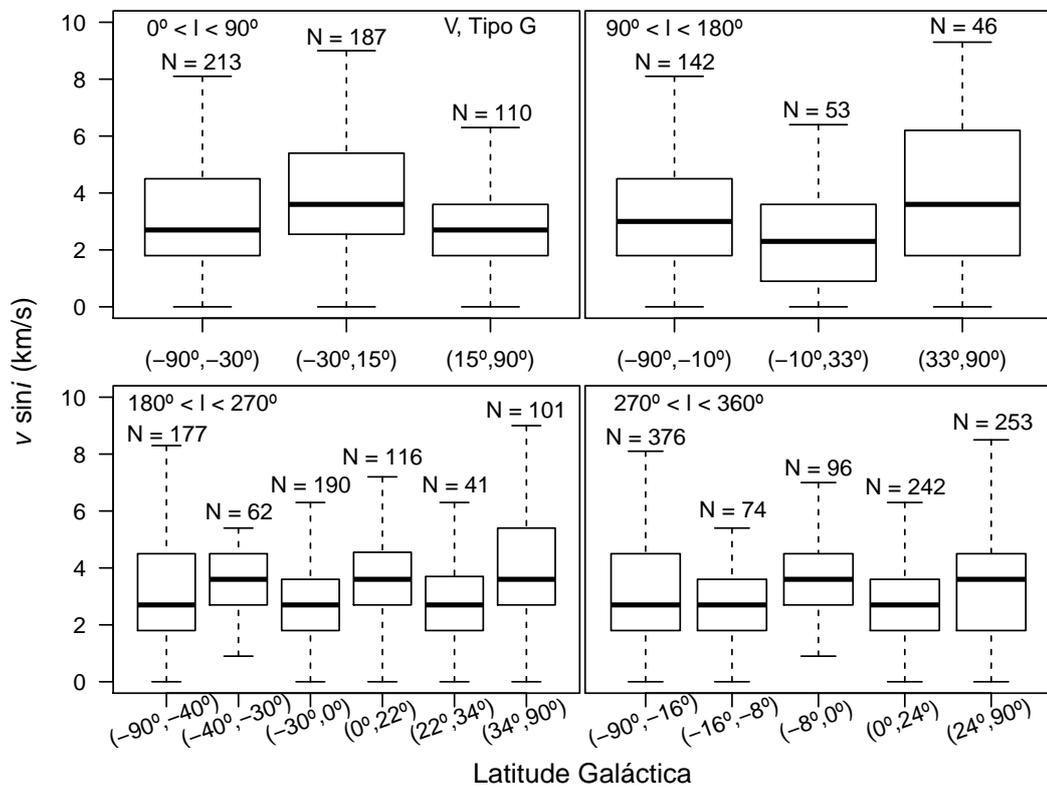


Figura 4.26: Idem figura 4.25, para o tipo espectral G.

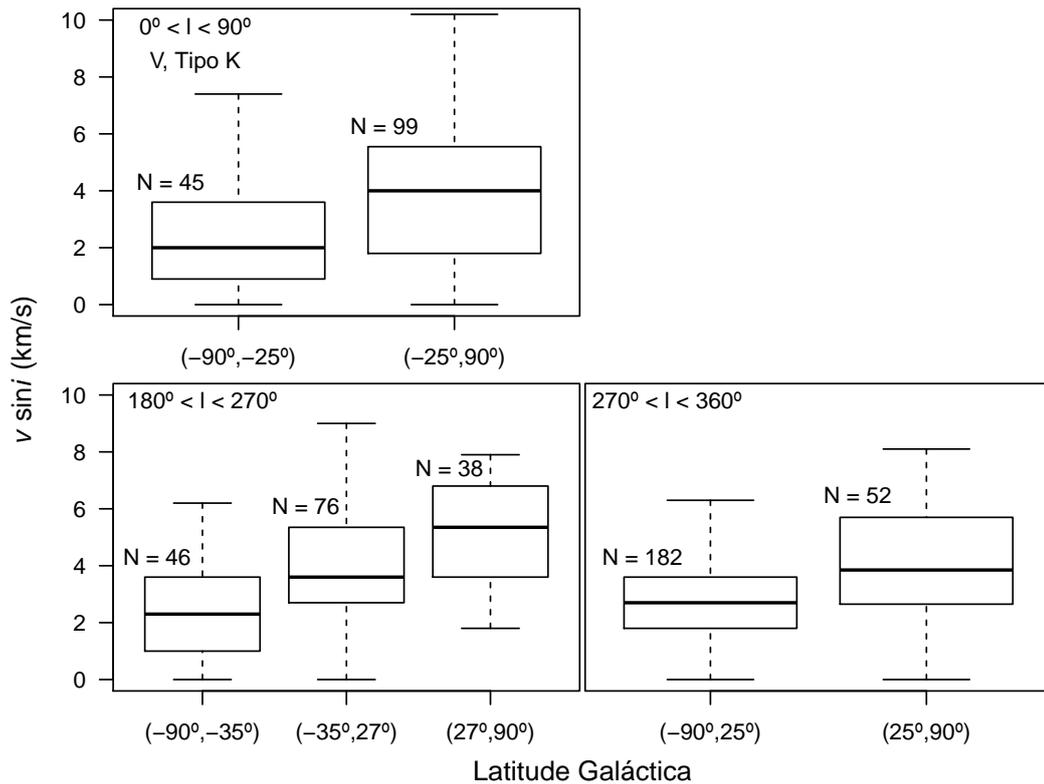


Figura 4.27: Idem figura 4.25, para o tipo espectral K.

Estudar o comportamento rotacional com a latitude galáctica é investigar a orientação espacial dos eixos rotacionais. Em um alinhamento perfeito de 90° com o plano galáctico, a forma da distribuição de $v \sin i$ em função da latitude seria descrita por uma lei de $\cos b$ ($v \cos b$), onde o pico da distribuição das velocidades estaria situado em torno de $b = 0$ e mínimos nos extremos, $b = \pm 90^\circ$.

Para as estrelas B e K, figuras 4.23 e 4.27, nas regiões $0^\circ < l < 90^\circ$ e $90^\circ < l < 180^\circ$, respectivamente, não foi encontrado nenhum intervalo com distribuições de velocidades rotacionais significativamente distinguíveis. Nessas estrelas, em qualquer direção que olharmos, as velocidades rotacionais projetadas, $v \sin i$, são maiores na região acima do plano galáctico, mais especificamente para $b > -20^\circ$ (em média). Esse fato também é observado levemente nas estrelas do tipo A, figura 4.24, com exceção no setor $270^\circ < l < 360^\circ$.

As estrelas F e G, figuras 4.25 e 4.26, não obstante o intervalo $90^\circ < l < 180^\circ$ para o tipo espectral G, apresentam comportamentos rotacionais semelhantes entre si, em que podemos observar picos de velocidades próximos ao plano galáctico. Possivelmente, isso pode ser resultado do alinhamento local (regiões próximas de $b = 0$) do eixo rotacional

com os polos galácticos.

As figuras 4.28, 4.29, 4.30, 4.31 e 4.32 mostram a dependência de $v \sin i$ com a latitude para as estrelas subgigantes. Regiões longitudinais faltantes nas figuras concernem às estrelas nas quais não foram identificadas distribuições de velocidades com probabilidade igual ou superior a 95% de serem diferentes.

Para as estrelas do tipo B, figura 4.28, apenas a região $180^\circ < l < 270^\circ$ mantém o mesmo comportamento rotacional observado no estágio evolutivo precedente, em que os valores de $v \sin i$ são maiores para $b > -20^\circ$. No tipo espectral A foi identificado somente o intervalo $0^\circ < l < 90^\circ$ com grupos estelares de distribuições rotacionais dissemelhantes.

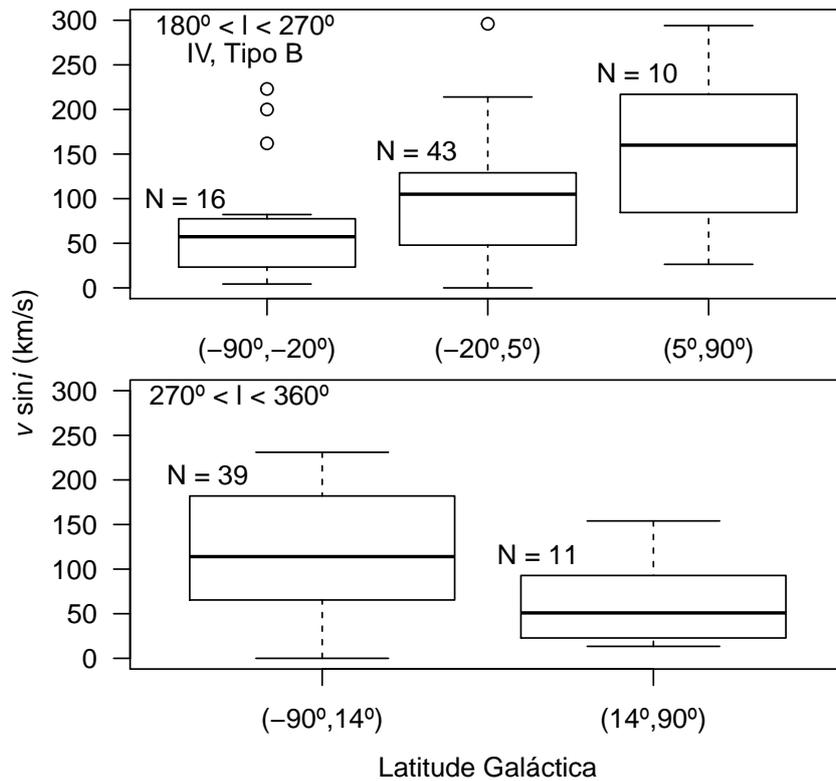


Figura 4.28: Box-plots de $v \sin i$ em função da latitude galáctica para estrelas subgigantes do tipo espectral B.

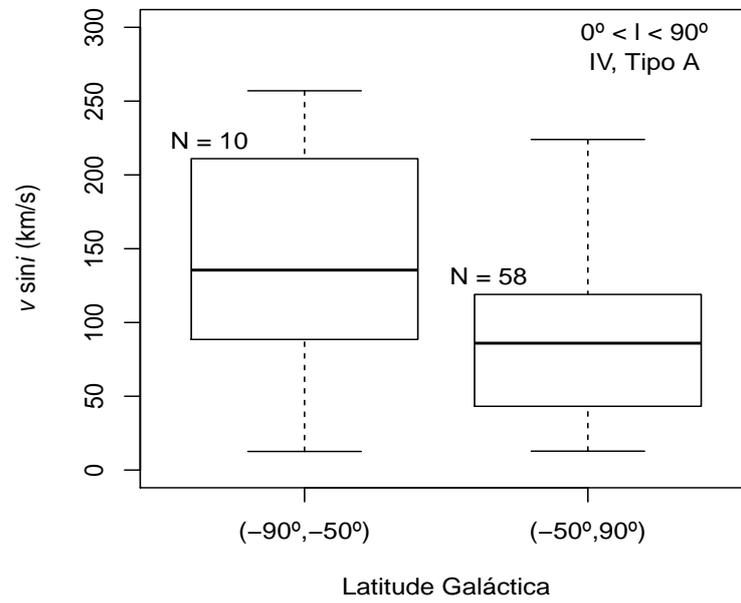


Figura 4.29: Idem figura 4.28, para o tipo espectral A.

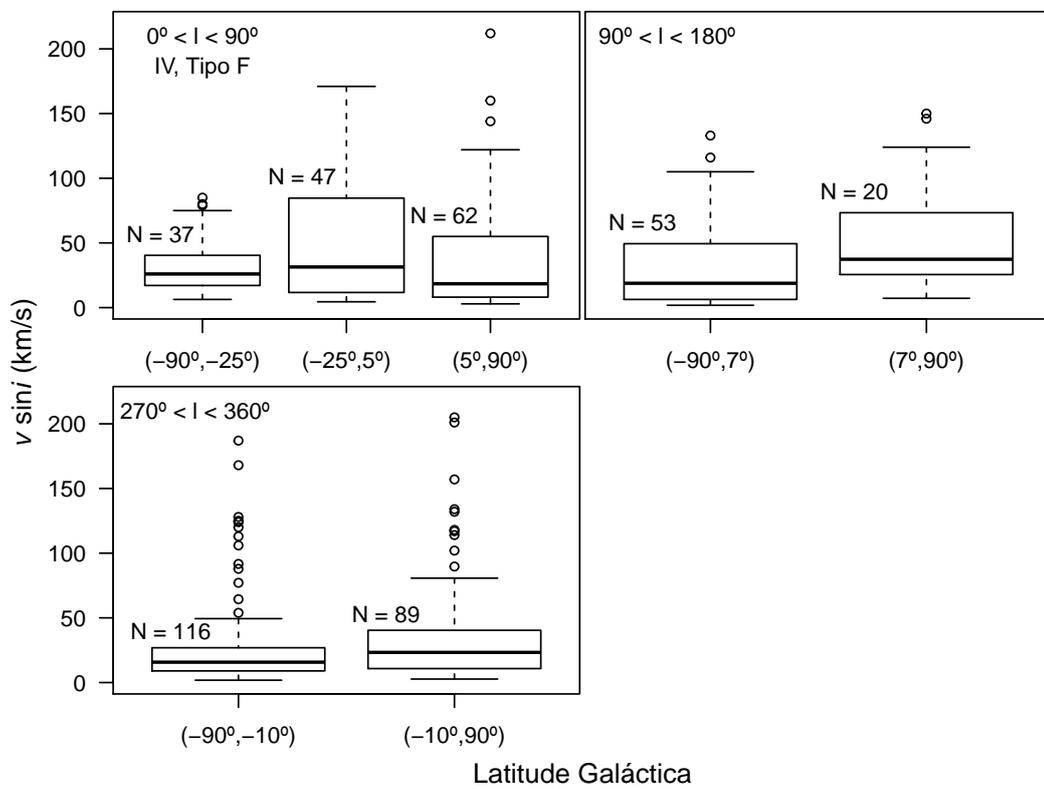


Figura 4.30: Idem figura 4.28, para o tipo espectral A.

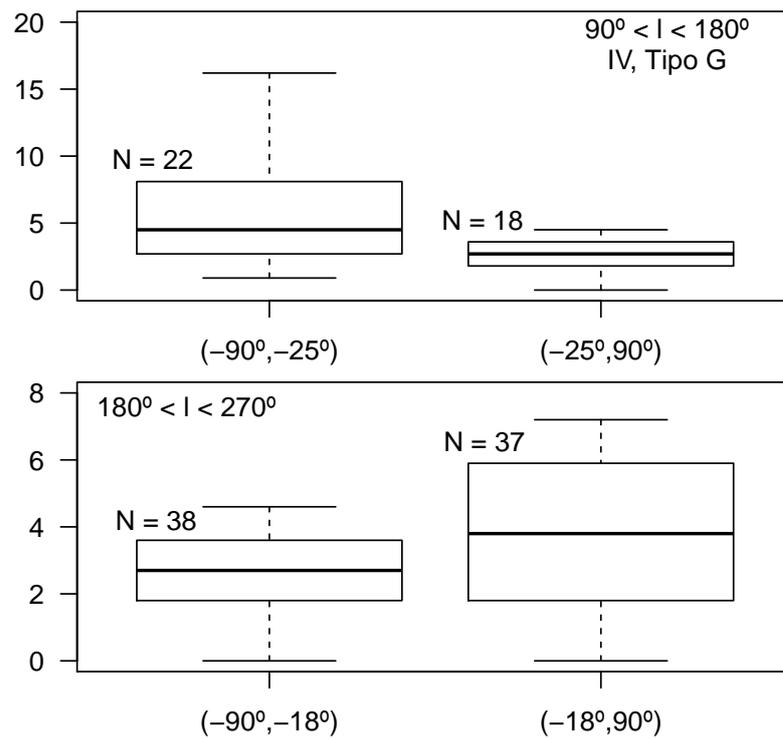


Figura 4.31: Box-plots de $v \sin i$ em função da latitude galáctica para estrelas subgigantes do tipo espectral G. Aqui os valores atípicos, por serem muito extremos, foram ocultados.

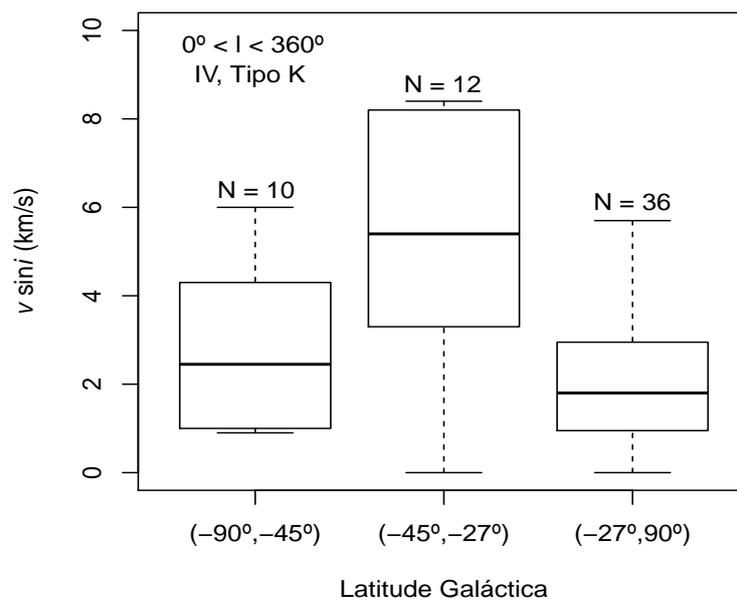


Figura 4.32: Idem figura 4.31, para o tipo espectral K. Em razão do baixo número de estrelas nessa classe espectral, as mesmas não foram divididas em intervalos de 90° na longitude galáctica.

As estrelas do tipo F, figura 4.30, apresentam o mesmo comportamento rotacional identificado nas classes espectrais B, A e K da sequência principal, isto é, alta rotação em valores positivos da latitude galáctica. Além disso, o setor $0^\circ < l < 90^\circ$ sinaliza um possível alinhamento perpendicular (ou quase) com disco galáctico: velocidade de rotação máxima no plano e mínima nos polos galácticos. Para o tipo espectral G, figura 4.31, não é possível extrair alguma relação de dependência entre $v \sin i$ e latitude. Para as estrelas K, devido à pouca quantidade de dados, não foi possível agrupar as mesmas em diferentes partes na longitude galáctica. Nessa classe espectral, ver figura 4.32, as estrelas localizadas em $b > -27^\circ$ apresentam baixa rotação, comportamento rotacional divergente ao encontrado na sequência principal, porém a pouca quantidade de estrelas (somada a ampla área analisada de 0° a 360°) torna essa observação um tanto frágil.

Quanto às estrelas gigantes, as figuras 4.33, 4.34, 4.35 e 4.36 mostram o comportamento de $v \sin i$ em função da latitude galáctica para os tipos espectrais B, A, G e K. Os valores atípicos foram ocultados. Refente às estrelas F, não foram encontradas distribuições de $v \sin i$ significativamente diferentes em qualquer direção investigada. Como podemos observar nas figuras, apesar da região $90^\circ < l < 180^\circ$ no tipo espectral A, as estrelas gigantes localizadas em latitude mais baixas (valores negativos de b) apresentam rotações mais elevadas.

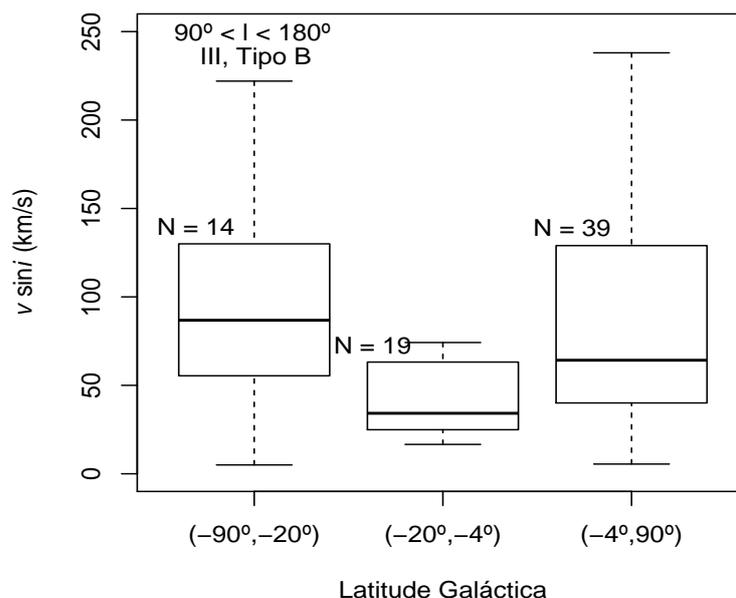


Figura 4.33: Box-plots de $v \sin i$ em função da latitude galáctica para estrelas subgigantes do tipo espectral B.

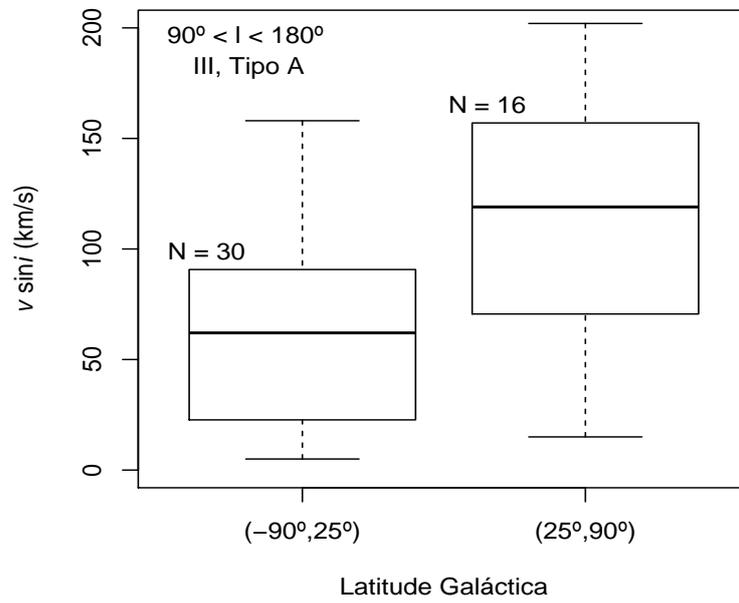


Figura 4.34: Idem figura 4.33, para o tipo espectral A.

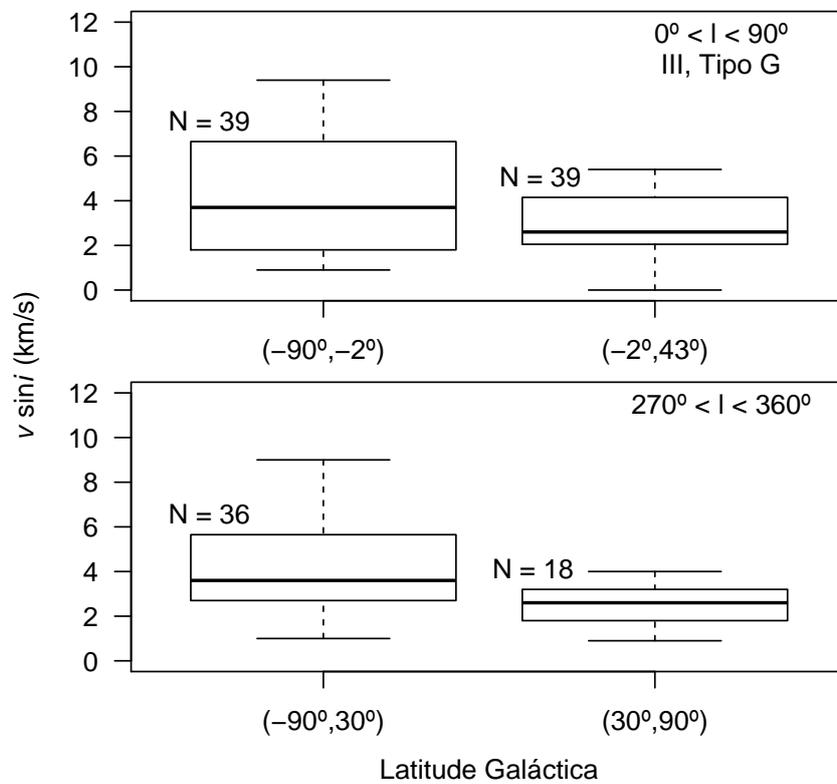


Figura 4.35: Idem figura 4.33, para o tipo espectral G.

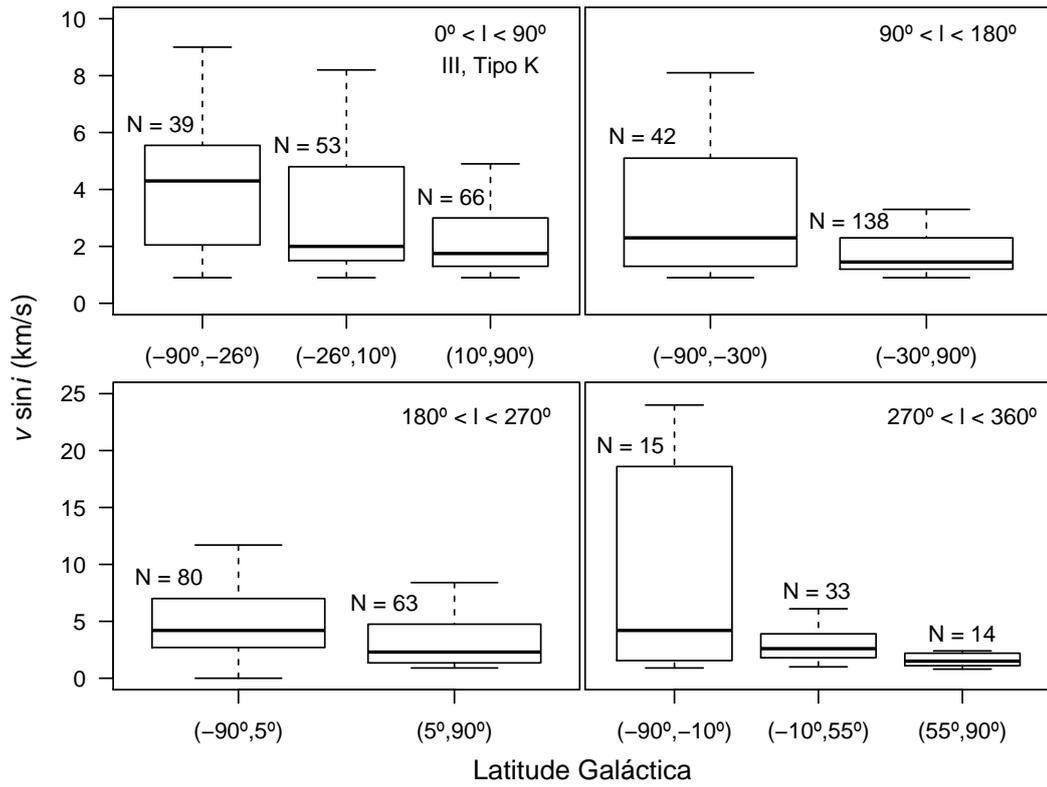


Figura 4.36: Idem figura 4.33, para o tipo espectral K.

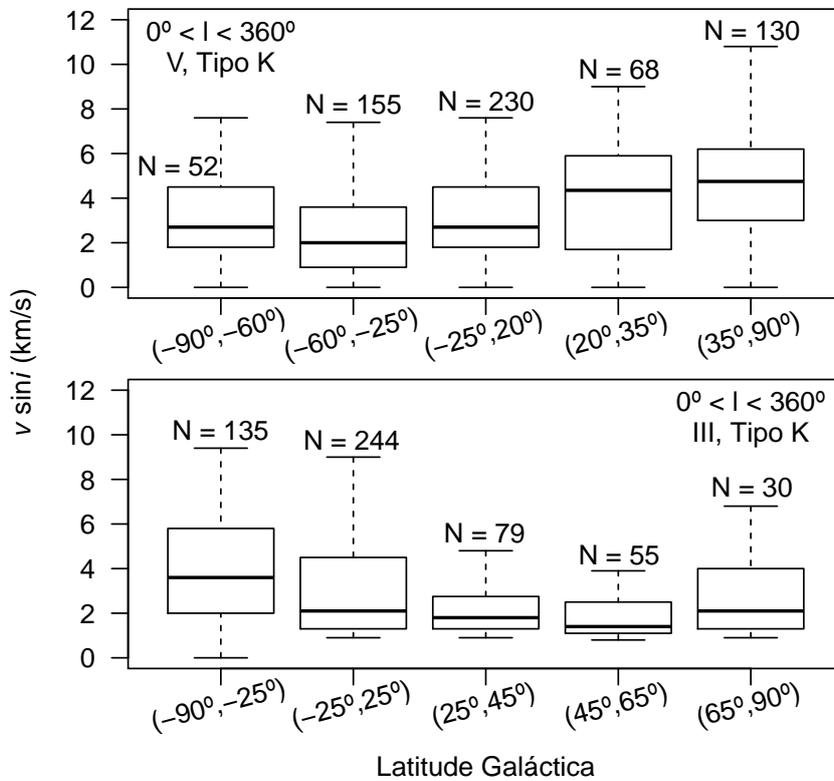


Figura 4.37: Box-plots de $v \sin i$ em função da latitude galáctica para as estrelas gigantes e da sequência principal do tipo K para região completa de 0° a 360° na longitude. Novamente, para uma melhor visualização dos resultados, os valores atípicos foram ocultados.

Nitidamente, o comportamento rotacional das estrelas gigantes do tipo K, figura 4.36, é totalmente oposto ao encontrado nas estrelas da sequência principal para o mesmo tipo espectral, ver figura 4.27, em que temos um gradiente positivo com a latitude nas estrelas anãs e gradiente negativo nas estrelas gigantes, como melhor explicitado na figura 4.37. Importante notar, de acordo com a figura 4.37, que esses dois estágios evolutivos comportam-se como “espelhos invertidos”: apresentam intervalos na latitude análogos, porém distribuições rotacionais assimétricas. Tal resultado exterioriza que a rotação dessas estrelas depende fortemente da latitude galáctica e que essa dependência está correlacionada com a fase evolutiva.

Referente à classe de luminosidade II, o número de estrelas é insuficiente para uma análise mais detalhada de $v \sin i$ com a latitude galáctica em diferentes direções da vizinhança solar ou até mesmo para a região completa $0^\circ < l < 360^\circ$, o que impossibilita qualquer resultado expressivo.

4.3.2 Catálogo Abt, Levato e Grosso

Para as estrelas B da sequência principal, encontramos grupos estelares de velocidades rotacionais contrastantes apenas na região $90^\circ < l < 180^\circ$, ver figura 4.38, dessa forma podemos concluir que existem poucas ou fracas variações de $v \sin i$ com a latitude galáctica na vizinhança solar. Contudo, não foi possível analisar as rotações no intervalo $270^\circ < l < 360^\circ$ devido à pequena quantidade de dados, ver novamente figura 4.13. Como também visto na amostra de Glebocki & Gnacinski, as estrelas do tipo B situadas acima do plano galáctico ($b > 0$) são caracterizadas por rotações mais altas.

Quanto às estrelas gigantes, figura 4.39, o padrão de velocidades com a latitude não mantém constância quando olhado em diferentes direções, em cada região do espaço configura-se comportamentos rotacionais distintos. Entretanto, para valores positivos da latitude as estrelas tendem apresentar valores de $v \sin i$ mais elevados, mostrando-se uma clara dependência com a latitude seja na sequência principal ou no ramo das gigantes.

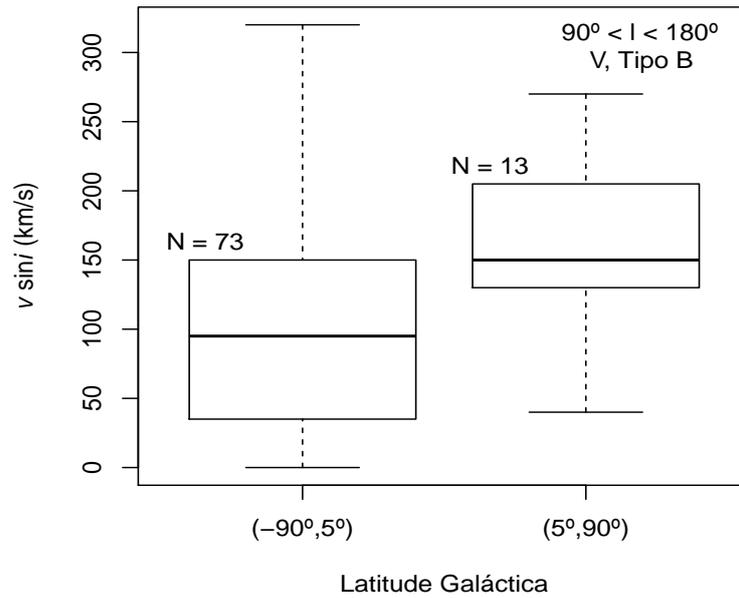


Figura 4.38: Box-plots de $v \sin i$ em função da latitude galáctica para estrelas anãs do tipo espectral B.

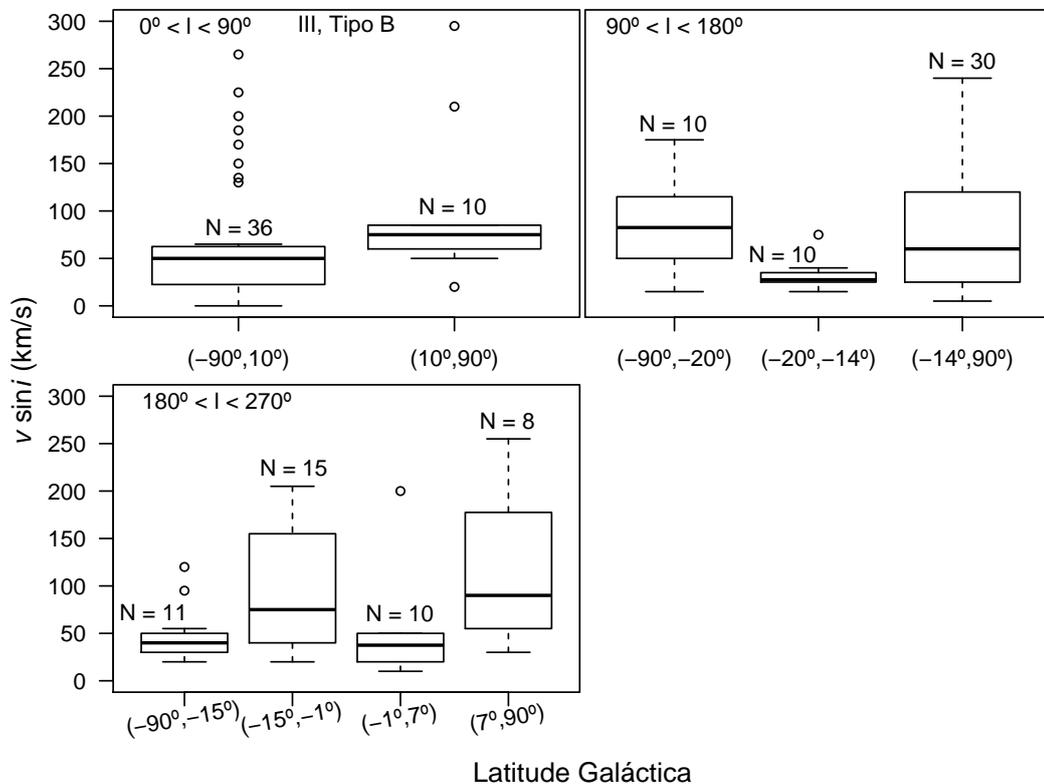


Figura 4.39: Box-plots de $v \sin i$ em função da latitude galáctica para estrelas gigantes do tipo espectral B. O intervalo $270^\circ < l < 360^\circ$ contém dados insuficientes.

4.3.3 Catálogo Royer *et al.*

Apesar da amostra de Glebocki & Gnacinski conter 40% mais estrelas e valores de $v \sin i$ diferentes, as estrelas do tipo A da sequência principal do catálogo Royer *et al.* apresentam a mesma dependência rotacional com a latitude, como pode ser visto nas figuras 4.24 e 4.40. Em ambas as amostras, os intervalos delimitados na latitude são praticamente os mesmos. Como observado no tipo espectral B, as estrelas do tipo A exibem velocidades mais elevadas no plano superior galáctico.

O mesmo comportamento rotacional também tangem às estrelas gigantes, como indicado na figura 4.41. A respeito da classe de luminosidade IV, não foi encontrado nenhum grupo estelar com velocidades rotacionais significativamente diferentes.

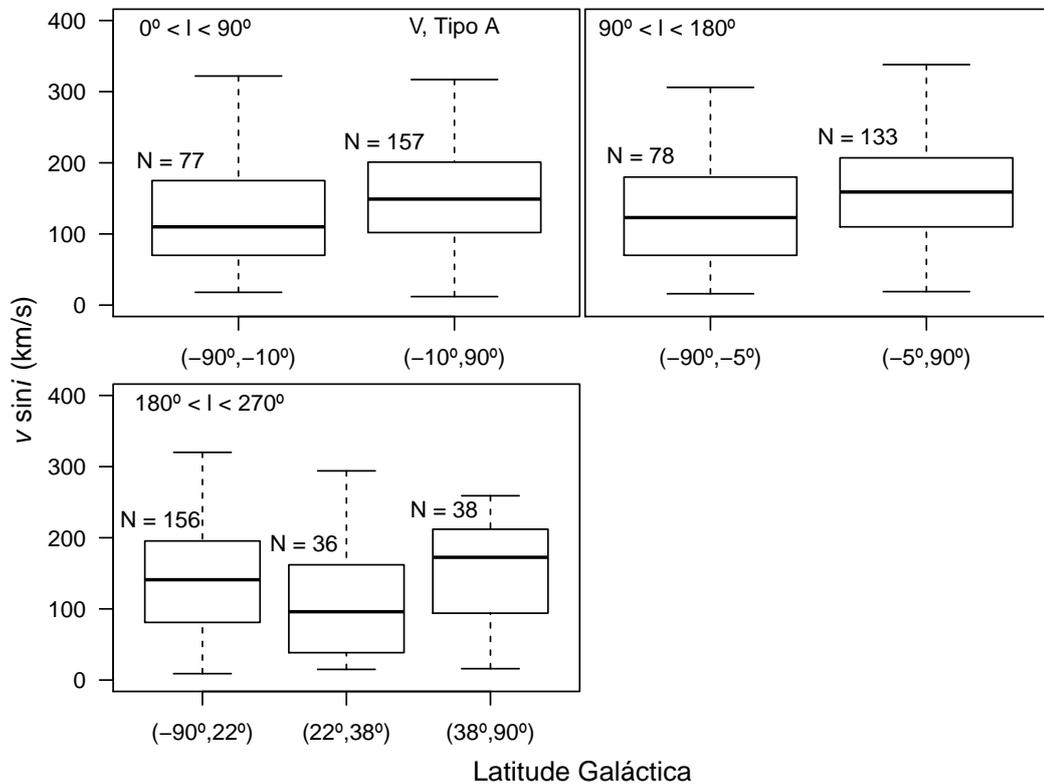


Figura 4.40: Box-plots de $v \sin i$ versus latitude galáctica para as estrelas A da sequência principal.

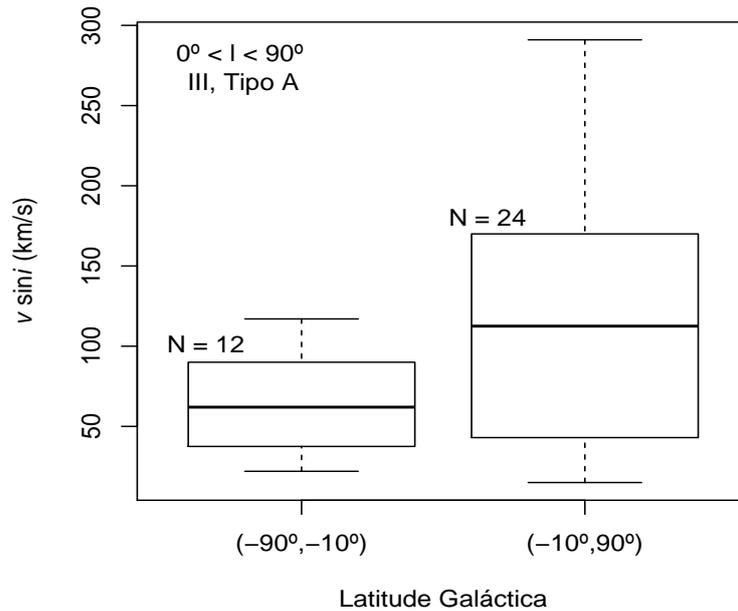


Figura 4.41: Idem figura 4.40, para as estrelas gigantes. Distribuições rotações distintas identificadas somente no intervalo $0^\circ < l < 90^\circ$.

4.3.4 Catálogos De Medeiros *et al.*

A figura 4.42 mostra a distribuição de $v \sin i$ versus latitude galáctica para as estrelas gigantes do tipo G. Distribuições de velocidades rotacionais diferentes foram identificadas somente na região $180^\circ < l < 270^\circ$. Dois importantes aspectos se exteriorizam nessa figura, alta rotação no plano médio galáctico e baixa rotação para valores mais elevados da latitude. Isso evidencia, como constatado na amostra de Glebocki & Gnacinski, que o perfil de rotação dessas estrelas depende da latitude galáctica.

Tocante às estrelas gigantes do tipo K, não é possível estabelecer algum vínculo claro entre a rotação e a latitude galáctica, salienta-se ainda que o comportamento rotacional varia de acordo com longitude galáctica, ver figura 4.43. Por fim, a figura 4.44 apresenta a dependência de $v \sin i$ com a latitude para as estrelas gigantes luminosas do tipo K. Nos intervalos $-90^\circ < b < -10^\circ$ e $10^\circ < b < 90^\circ$ tanto a mediana quanto o 1º quartil equivalem a 1 km s^{-1} . Apesar da impossibilidade de analisar a rotação em diferentes pontos da vizinhança solar devido à limitação numérica da amostra, a figura expõe um resultado notório, em que observamos velocidade de rotação mínima para valores mais altos da latitude, $-90^\circ < b < -10^\circ$ e $10^\circ < b < 90^\circ$, e velocidade rotacional máxima no plano médio galáctico, $-10^\circ < b < 10^\circ$.

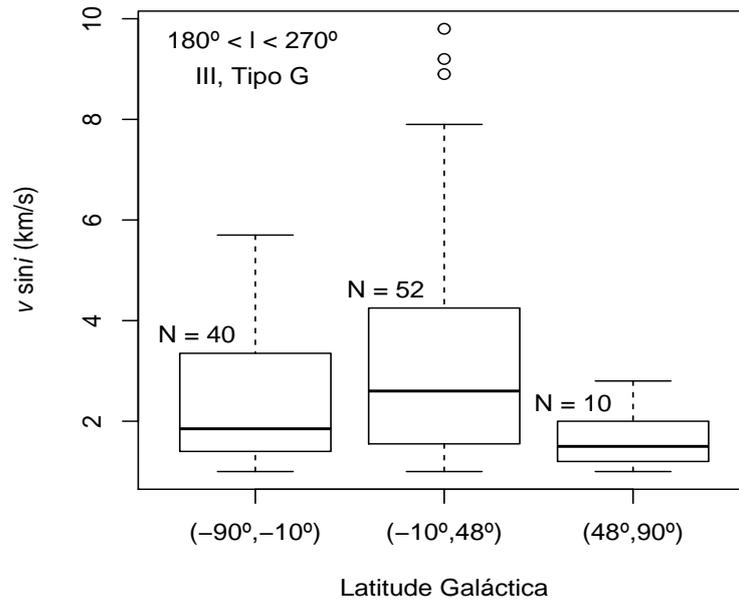


Figura 4.42: Box-plots de $v \sin i$ em função da latitude galáctica para as estrelas gigantes do tipo G.

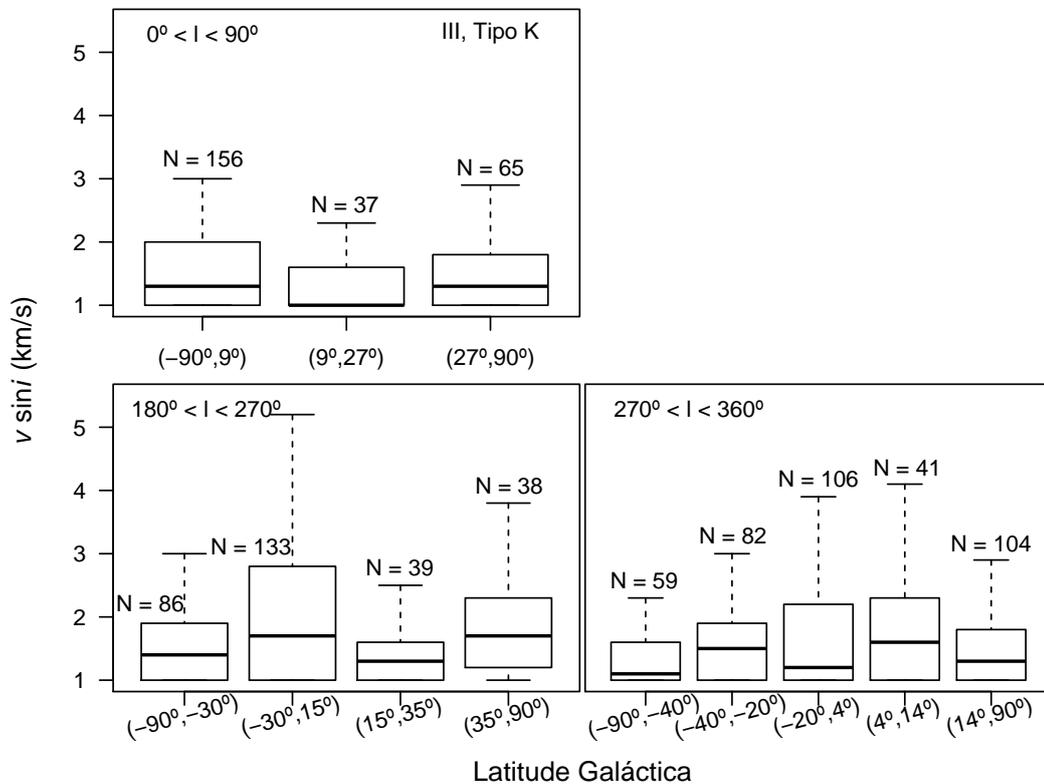


Figura 4.43: Idem figura 4.42, para as estrelas K. Na região $90^\circ < l < 180^\circ$ não foi encontrado qualquer intervalo na latitude com distribuições de $v \sin i$ contrastantes. Por serem muito extremos, os valores atípicos foram omitidos.

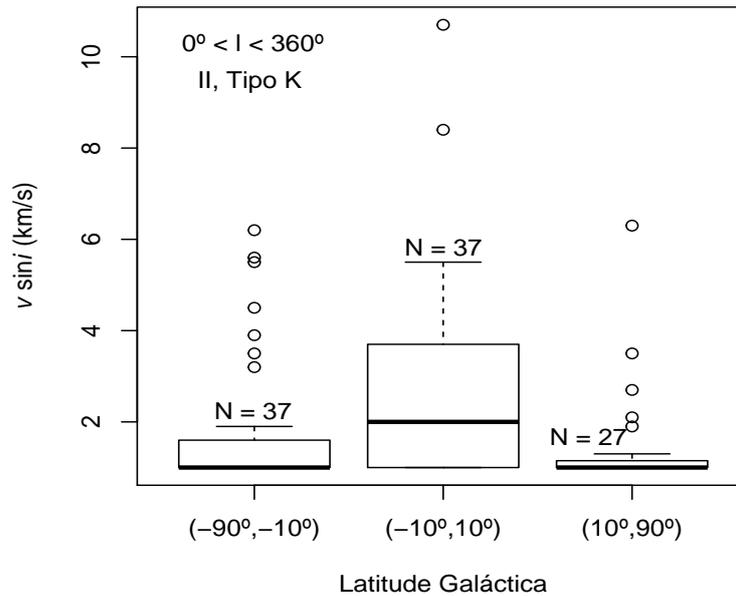


Figura 4.44: Box-plots de $v \sin i$ em função da latitude galáctica para estrelas gigantes luminosas do tipo espectral K.

4.4 Rotação e distância estelar

Estudar a rotação em função da posição estelar na Galáxia é relevante para uma variedade de problemas, principalmente para compreensão dos processos intrínsecos da Galáxia e da própria formação estelar. Aqui estudaremos a ligação entre $v \sin i$ e distância estelar (a partir do Sol) em diferentes direções da vizinhança solar. Para tanto, como feito na seção anterior, dividimos em quatro intervalos de 90° a coordenada l e analisamos a rotação nessas regiões separadamente.

4.4.1 Catálogo Glebocki & Gnacinski

A figura 4.45 apresenta a projeção da distribuição espacial no plano galáctico das estrelas da sequência principal. Na figura 4.46 é mostrado a estimativa de densidade kernel em duas dimensões (para X e Y, projeções da distância no plano) de cada tipo espectral. Como podemos ver, estrelas mais quentes se estendem por uma área maior, isso é devido ao fato das mesmas serem mais luminosas (o raio da estrela também contribui para a luminosidade) e, conseqüentemente, mais distante podemos observá-las.

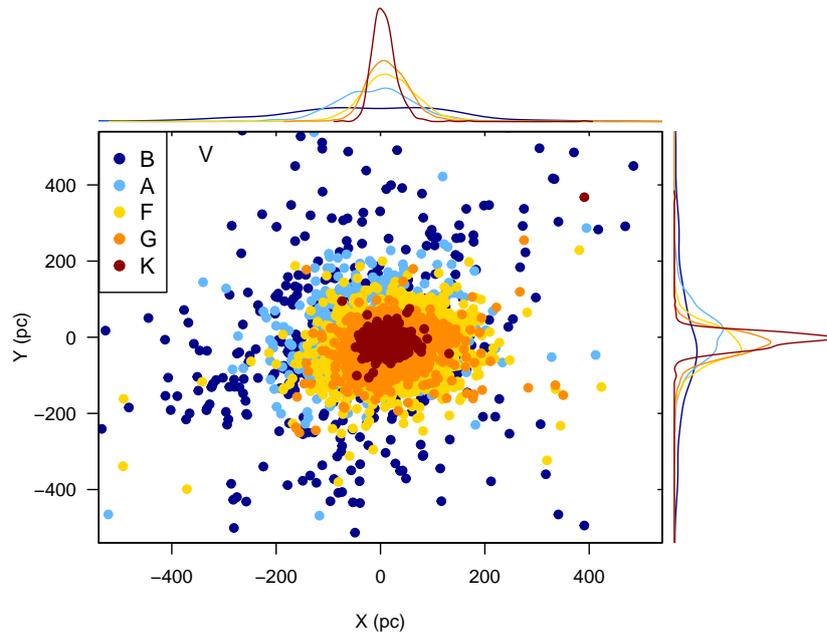


Figura 4.45: Projeção das estrelas da sequência principal no plano galáctico. A direção do centro galáctico aponta no sentido positivo de X. As linhas de diferentes cores (as cores correspondem aos tipos espectrais indicados na legenda do gráfico) na parte superior e no lado direito do gráfico referem-se a estimativa de densidade kernel para X e Y, respectivamente.

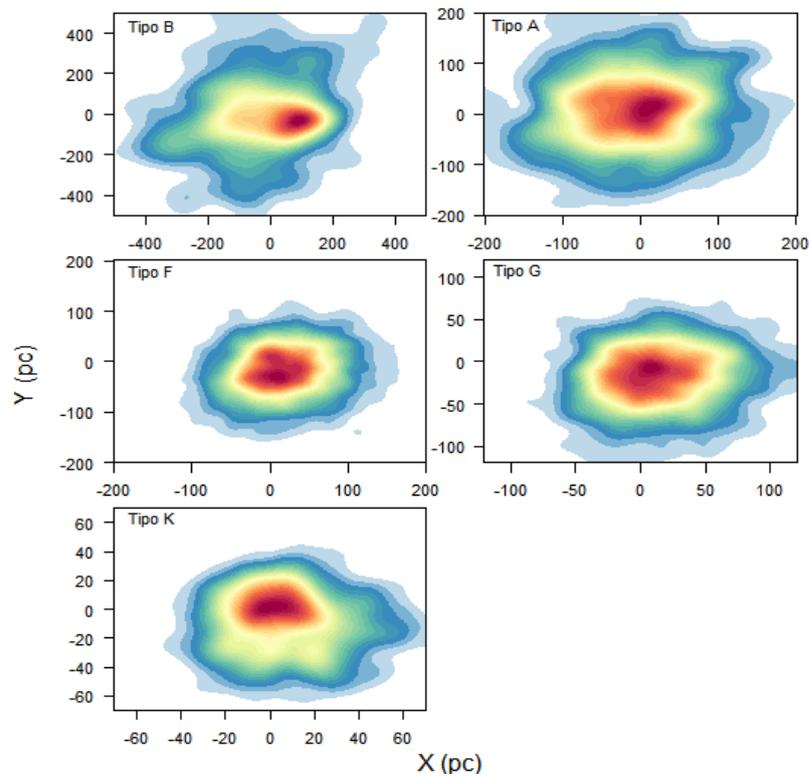


Figura 4.46: Imagens da estimativa de densidade kernel em duas dimensões, para X e Y, de cada tipo espectral para as estrelas da sequência principal. Cores mais “quentes”(avermelhado) e cores “frias”(associada à cor azul) correspondem respectivamente à maior e menor concentração de estrelas.

Para os tipos espectrais B, A, F, G e K, as figuras 4.47, 4.48, 4.49, 4.50 e 4.51 mostram a distribuição de $v \sin i$ versus distância estelar d (dada pela transformação d (em parsec) = $1000/p$, p é a paralaxe em milissegundo de arco). Claramente, como expresso nas figuras, existem dois regimes distintos na velocidade rotacional com a distância: queda da rotação com o aumento da distância a partir do Sol para estrelas quentes e, em contraste, gradiente positivo da velocidade rotacional com a distância estelar nas estrelas frias.

Tanto as estrelas B quanto o tipo A exibem decaimento da rotação com a distância em três das quatro regiões longitudinais, nas respectivas regiões $180^\circ < l < 270^\circ$ e $0^\circ < l < 90^\circ$ não foi identificada distribuições rotacionais com probabilidades iguais ou superiores a 95% de serem diferentes. Nas estrelas A, a velocidade de rotação começa a cair de forma expressiva aproximadamente a partir de 100 pc, enquanto nas estrelas do tipo B a queda se inicia em intervalos subsequentes, mais ou menos a partir de 150 pc.

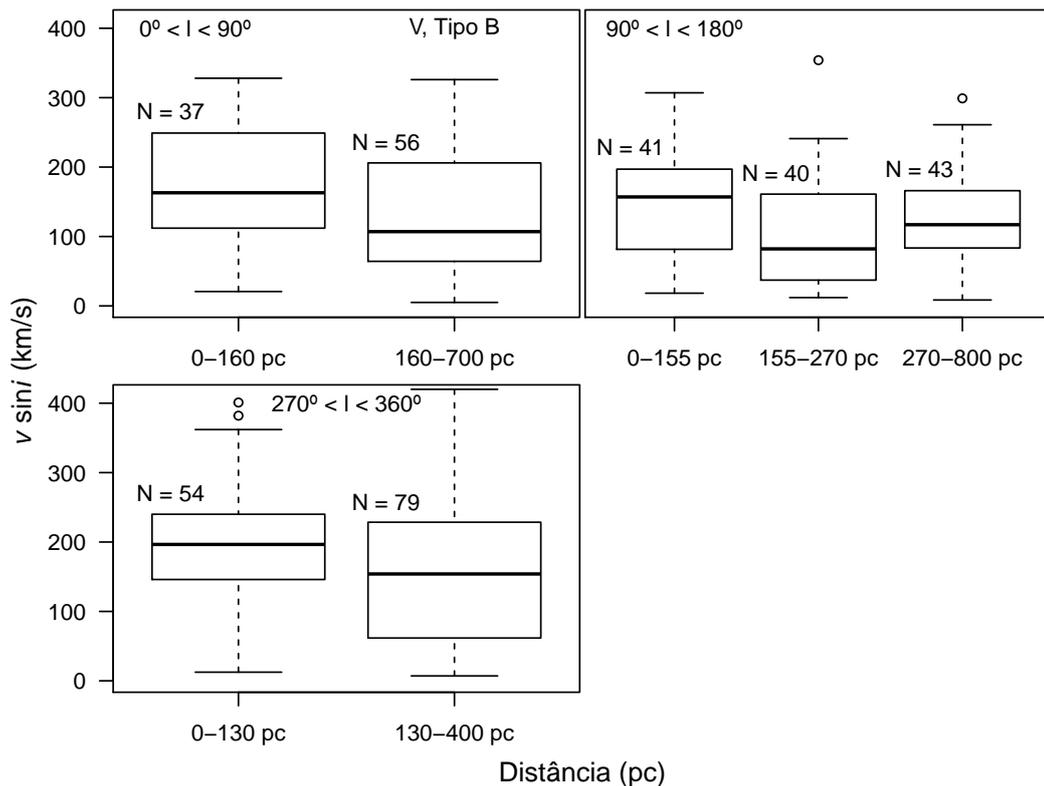


Figura 4.47: Box-plots de $v \sin i$ em função da distância estelar para estrelas da sequência principal do tipo B.

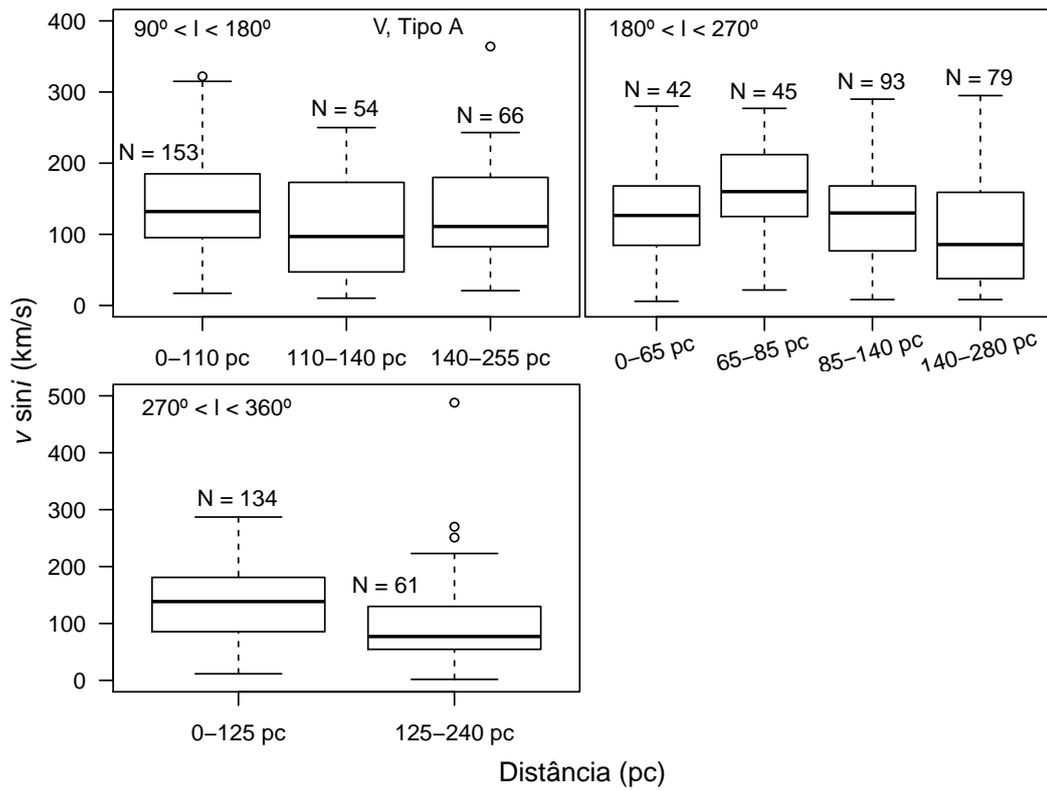


Figura 4.48: Idem figura 4.47, para o tipo espectral A.

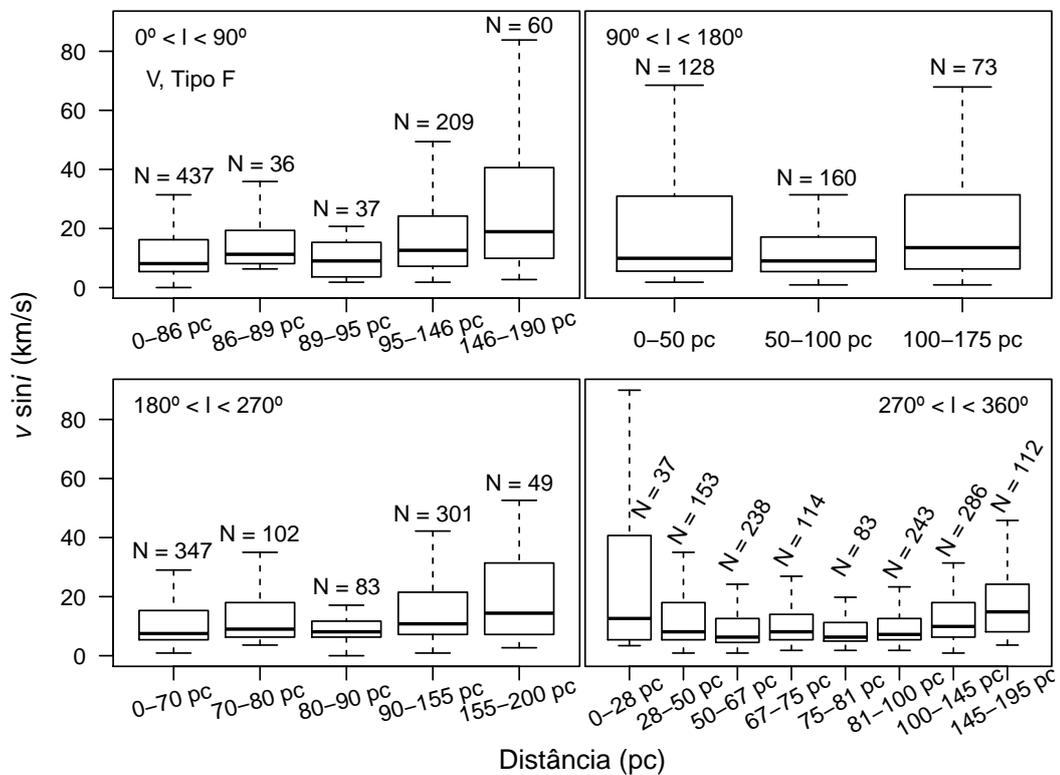


Figura 4.49: Box-plots de $v \sin i$ em função da distância estelar para estrelas da sequência principal do tipo F. Os outliers (valores atípicos) foram ocultados.

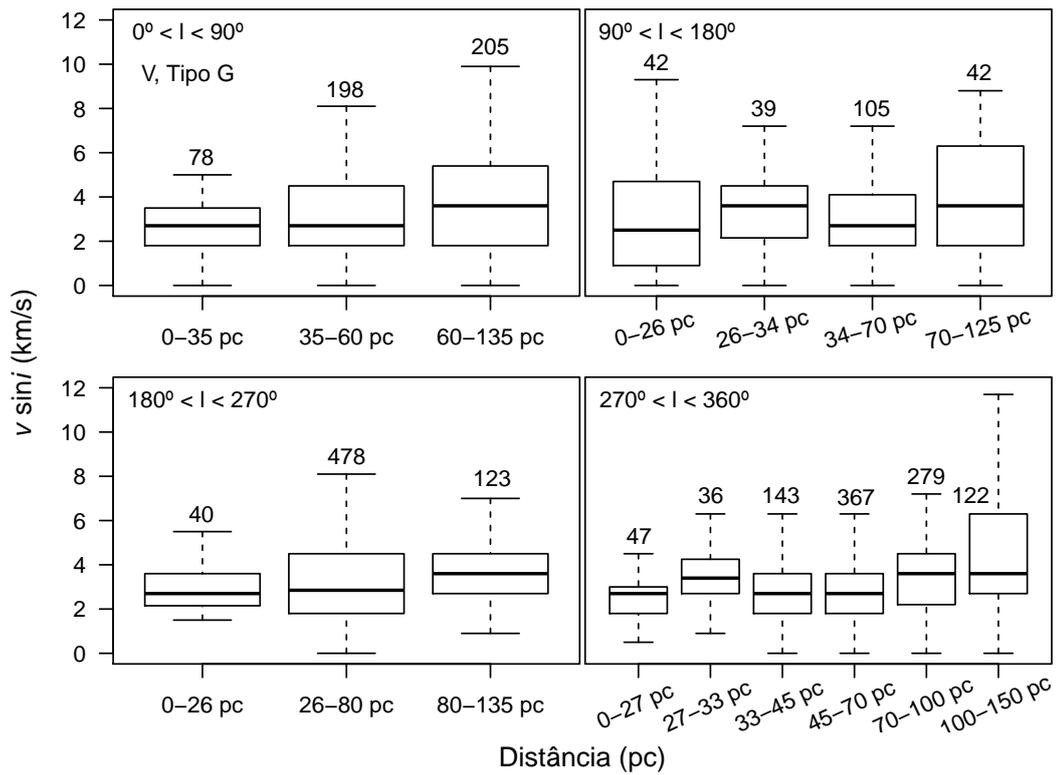


Figura 4.50: Idem figura 4.49, para o tipo espectral G.

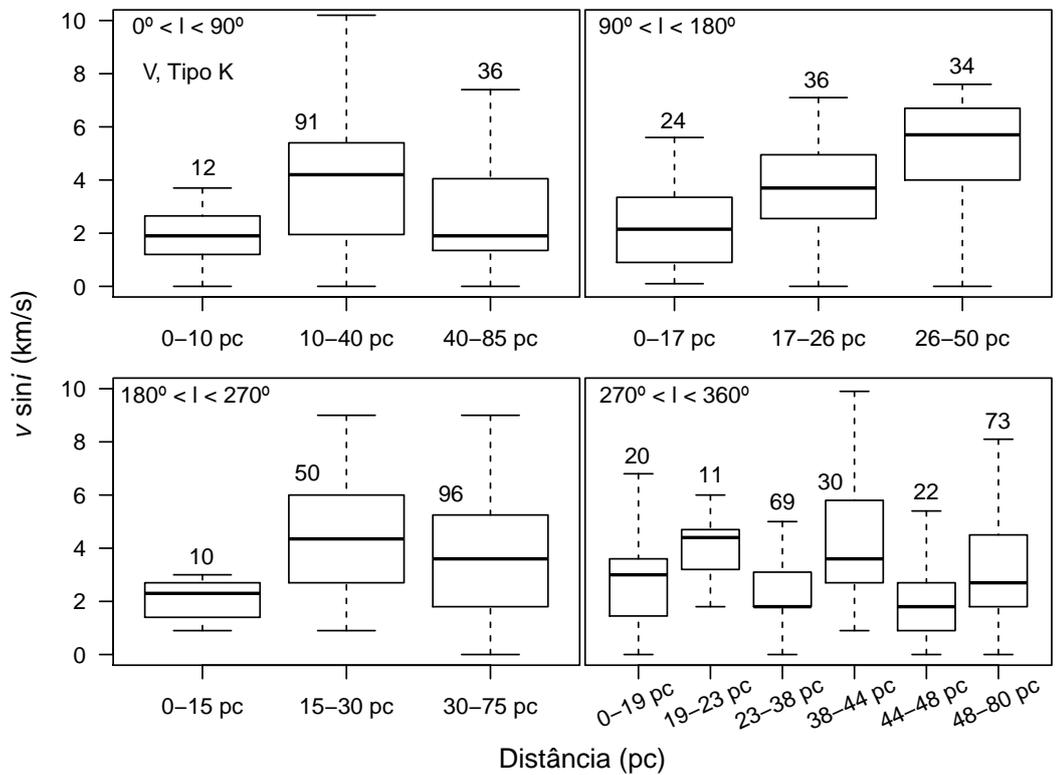


Figura 4.51: Idem figura 4.49, para o tipo espectral K.

Nas estrelas do tipo F, figura 4.49, os quatro gráficos apresentam distribuições de velocidades mínimas na região $\sim 80 \text{ pc} < d < 90 \text{ pc}$. Além da elevação da rotação com d , outra característica importante é mostrada no gráfico inferior direito, em $270^\circ < l < 360^\circ$, onde há tanto aumento quanto queda de $v \sin i$ com a distância: inicia-se com decréscimo da mediana (a partir de $12,6 \text{ km s}^{-1}$) e da dispersão de $v \sin i$, atingindo o mínimo de velocidades no intervalo $80 \text{ pc} < d < 90 \text{ pc}$ com mediana de $6,3 \text{ km s}^{-1}$; nos intervalos subsequentes, correspondendo às estrelas mais distantes, verifica-se um aumento gradual das velocidades com d , alcançando o pico máximo no último intervalo $145 \text{ pc} < d < 195 \text{ pc}$ com mediana igual a $14,85 \text{ km s}^{-1}$. Deve-se salientar também que as duas regiões $0^\circ < l < 90^\circ$ e $180^\circ < l < 270^\circ$ apresentam intervalos (que delimitam distribuições de $v \sin i$) quase idênticos, apesar de que as mesmas foram analisadas de forma independente, portanto, isso demonstra que o método empregado na presente Dissertação na determinação de intervalos é extremamente preciso e efetivo na exteriorização dos possíveis vínculos rotacionais com o espaço.

Quando analisadas as distribuições das velocidades rotacionais das estrelas F em função da distância em uma circunferência completa de $0^\circ < l < 360^\circ$, nota-se que não há mais um padrão comportado de $v \sin i$ com d , ver figura 4.52. No entanto, a figura 4.53 mostra um resultado surpreendente, onde analisamos a rotação nas subclasses espectrais F0-F4 e F5-F9 separadamente. No tipo espectral F com subtipos que vai de F0 a F4, as estrelas mais próximas exibem velocidades rotacionais maiores, em que a velocidade e a dispersão da rotação cai gradualmente com aumento da distância a partir do Sol. Já nos subtipos F5-F9 a velocidade de rotação é diretamente proporcional a distância estelar, de modo que estrelas localizadas em regiões mais distantes apresentam rotações mais elevadas. Portanto, em estrelas quentes mais precoces que o tipo espectral F5 (B, A e F0-F4) a velocidade de rotação cai à medida que se distanciam do Sol, enquanto para estrelas frias (mais tardias que F5, isto é, F5-F9, G e K) a alta rotação se dar com o aumento da distância. Na figura 4.50, como já sublinhado para os tipos espectrais tardios, estrelas do tipo G em regiões mais distantes também tendem apresentar distribuições com alta rotação, ao passo que estrelas próximas exibem distribuições de baixa rotação.

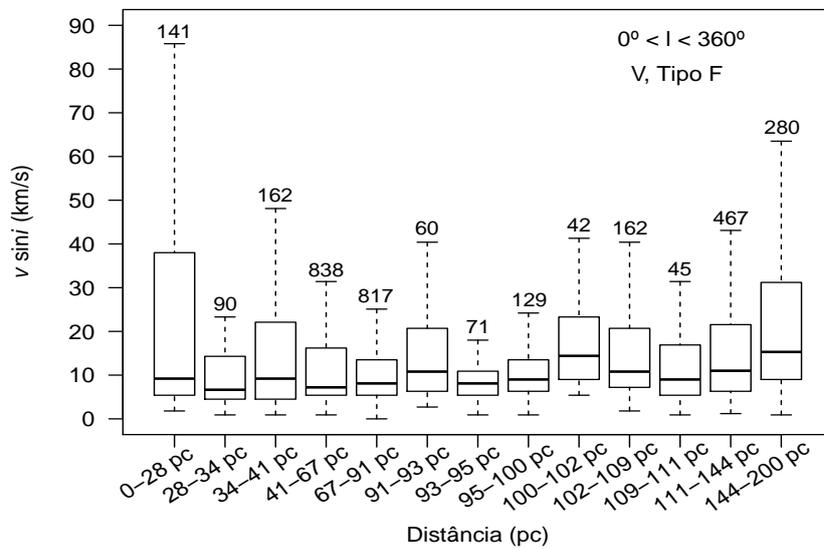


Figura 4.52: Box-plots de $v \sin i$ em função da distância estelar para estrelas da sequência principal do tipo F em uma região completa de 0° até 360° na longitude galáctica. Para uma melhor visualização, os valores discrepantes foram ocultados

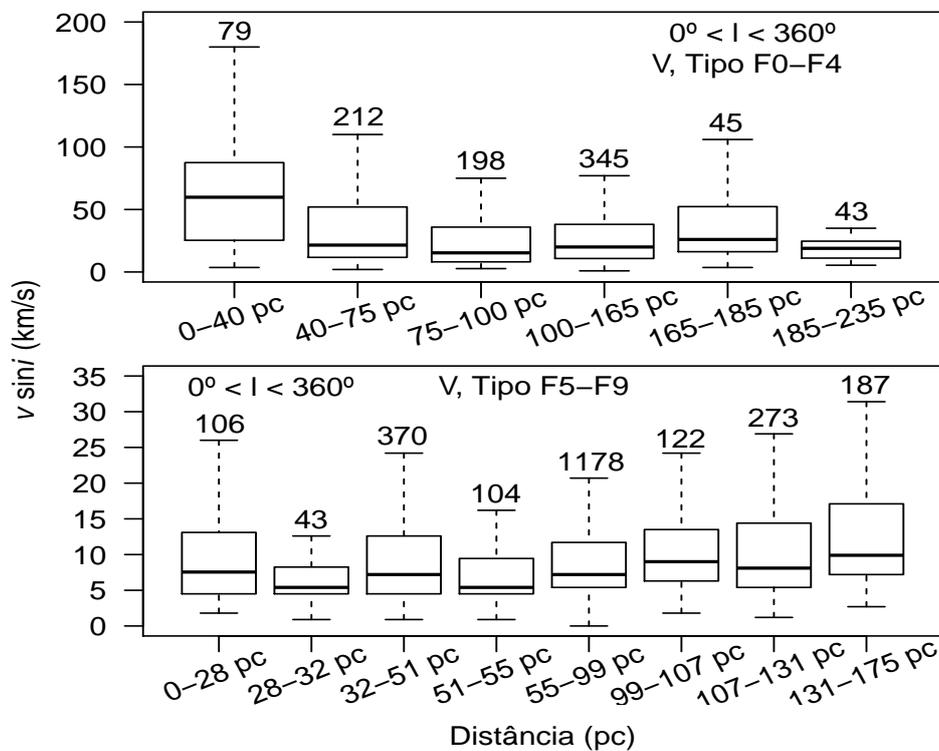


Figura 4.53: Idem figura 4.52, para os subtipos F0-F4 e F5-F9.

Nas estrelas do tipo K, as análises para determinação dos intervalos apresentados na figura 4.50 foram feitas com no mínimo 10 estrelas em invés de 36, pois a área efetiva onde estão localizadas é relativamente pequena, ver figuras 4.46 e 4.54. Nessa classe espectral, as estrelas nas imediações (~ 15 pc) exibem aumento brusco da velocidade um tanto intrigante nas quatro regiões da longitude, onde também é acompanhado de uma queda considerável nos intervalos seguintes. Porém, as estrelas na região $90^\circ < l < 180^\circ$ mantêm o aumento da rotação com d , como manifestado nos tipos F5-F9 e G.

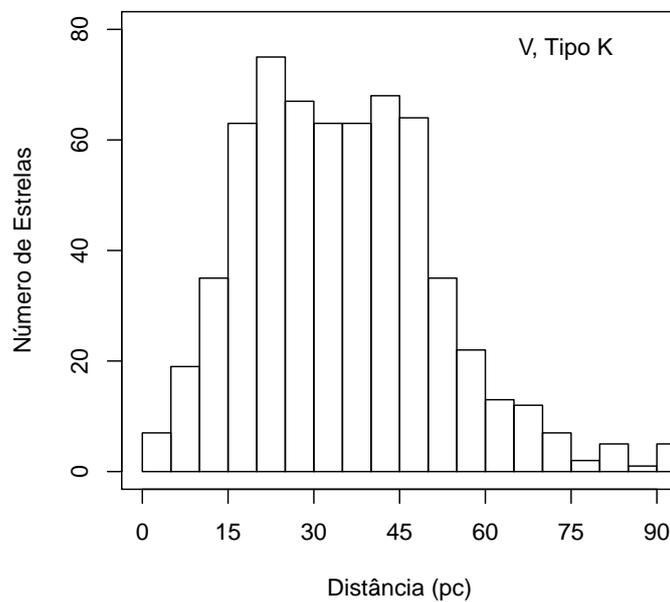


Figura 4.54: Histograma da distância das estrelas do tipo K.

Tocante ao estágio das subgigantes, as figuras 4.55, 4.56 e 4.57 mostram os resultados obtidos para os tipo espectrais B, F e G, respectivamente. Com exceção das estrelas do tipo K da sequência principal, na determinação dos intervalos para o estudo da rotação com a distância, as análises estatísticas com o teste AD foram realizadas sempre entre duas subamostras com no mínimo de 36 estrelas cada, portanto, tipos espectrais ou regiões da longitude galáctica contendo menos de 72 estrelas não foram analisados. Mediante o exposto, com relação às estrelas B, as mesmas foram ponderadas em um único intervalo de $0^\circ < l < 360^\circ$, pois os quatro setores de 90° na longitude pertencentes a essa classe espectral contém em média 50 estrelas cada.

Nas estrelas do tipo A não foi identificada nenhuma região com distribuições rotacionais diferentes. Em relação às estrelas G, os intervalos $0^\circ < l < 90^\circ$ e $90^\circ < l < 180^\circ$ contém

dados insuficientes, paralelamente, em $180^\circ < l < 270^\circ$ e $270^\circ < l < 360^\circ$ também não foram identificadas distribuições rotacionais diferentes. No tipo espectral K há apenas 58 estrelas.

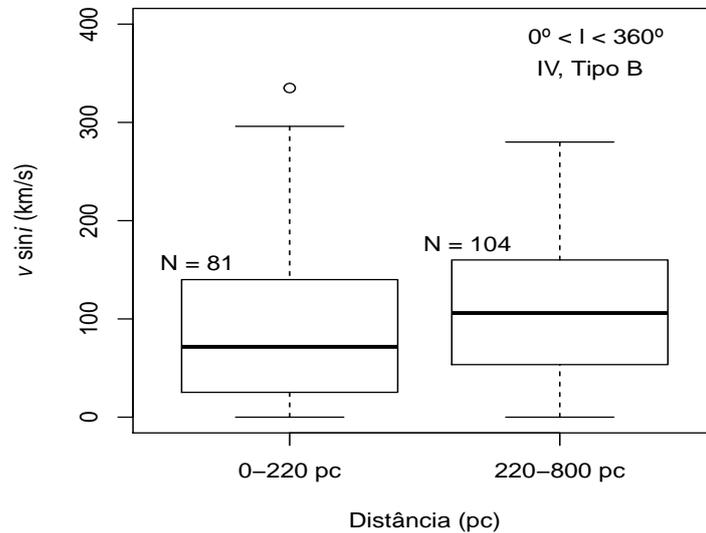


Figura 4.55: Box-plots de $v \sin i$ em função da distância estelar para estrelas subgigantes do tipo B em uma região completa de 0° até 360° .

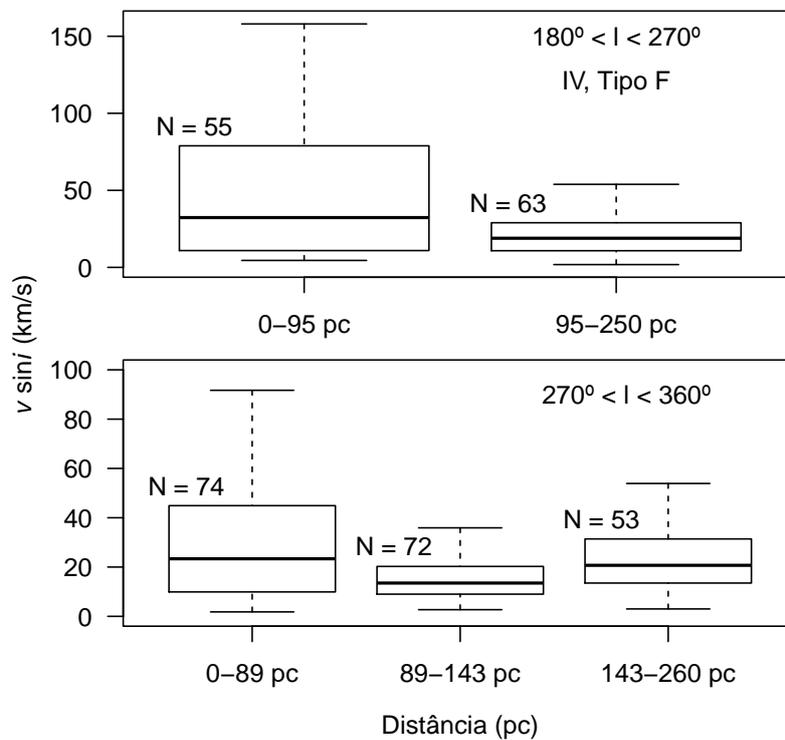


Figura 4.56: Box-plots de $v \sin i$ em função da distância estelar para estrelas subgigantes do tipo F. Os valores atípicos foram omitidos.

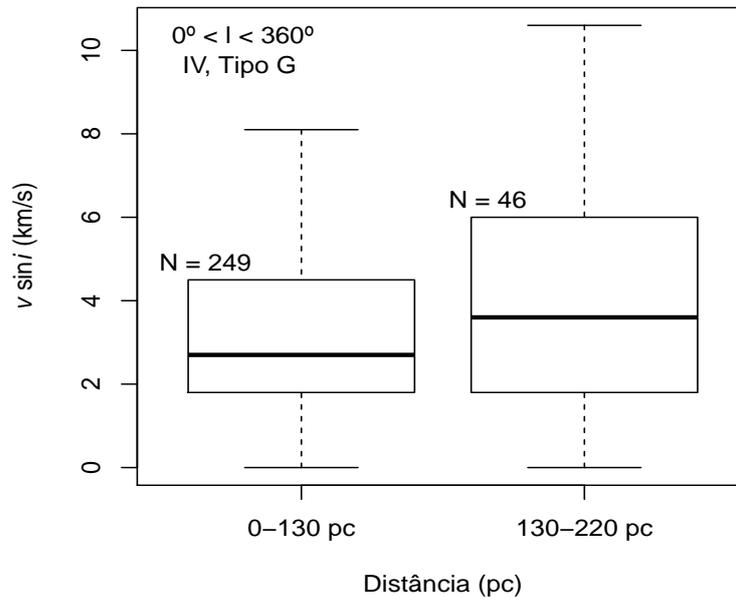


Figura 4.57: Idem figura 4.56, para estrelas G.

Nas estrelas subgigantes do tipo B se verifica um comportamento rotacional inverso das estrelas da sequência principal, para regiões mais distantes a rotação aumenta ao invés de cair. Já para as estrelas F, ver figura 4.56, o comportamento rotacional reflete o resultado obtido nas subclasses F0-F4 da sequência principal. Isso pode ser reflexo do número de estrelas precoces presentes nessa amostra. De fato, excluindo o tipo espectral F5, há 85% mais estrelas precoces (146 subtipos F0-F4) do que estrelas tardias (79 subtipos F6-F9) no ramo das subgigantes. Para o tipo G a velocidade de rotação é maior em regiões mais distantes, como também observado nas estrelas anãs.

As figuras 4.58, 4.59, 4.60 e 4.61 mostram a distribuição de $v \sin i$ das estrelas gigantes para os tipos espectrais B, A, G e K. A característica mais importante nessas figuras diz respeito à evidência do mesmo padrão rotacional observado nos estágios evolutivos precedentes nas estrelas G e K, porém, no tipo K esse padrão tornou-se mais pronunciado nas estrelas longínquas. O setor $270^\circ < l < 360^\circ$ na coordenada de longitude não há dados suficientes ($N < 60$). Outro aspecto importante é mostrado na figura 4.62, referente à rotação do tipo espectral K no intervalo completo $0^\circ < l < 360^\circ$. Como pode ser visto, há uma diminuição expressiva na rotação nos intervalos situados em $50 \text{ pc} < d < 123 \text{ pc}$ seguida do aumento da velocidade rotacional nos intervalos seguintes. Tal resultado implica que a queda da rotação observada nas estrelas K da sequência principal (mais ou

menos em $d > 30$ pc, ver figura 4.51) pode ser reflexo da correlação direta das baixas taxas rotacionais com essa região do espaço.

Assim como as subgigantes, as estrelas gigantes do tipo B apresentam um crescimento rotacional com a distância. Já para as estrelas A, figura 4.59, verifica-se resultado inverso, sinalizando o mesmo comportamento rotacional constatado nas estrelas da sequência principal de mesmo tipo espectral.

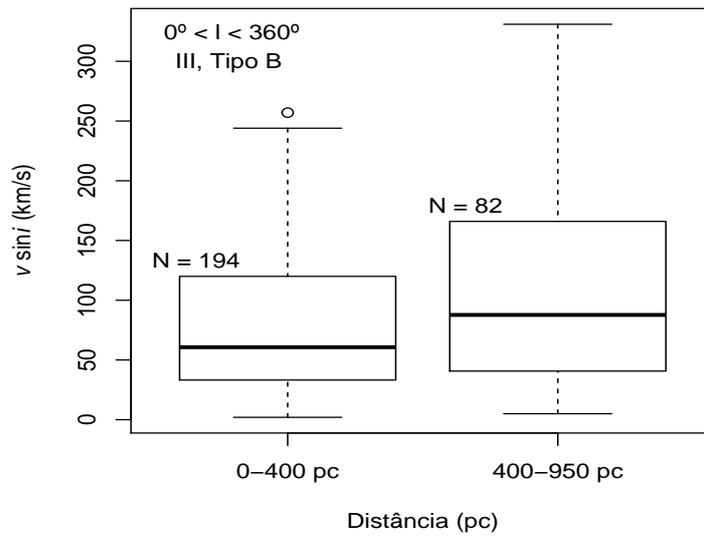


Figura 4.58: Box-plots de $v \sin i$ em função da distância estelar para estrelas gigantes do tipo B em uma região completa de 0° até 360° .

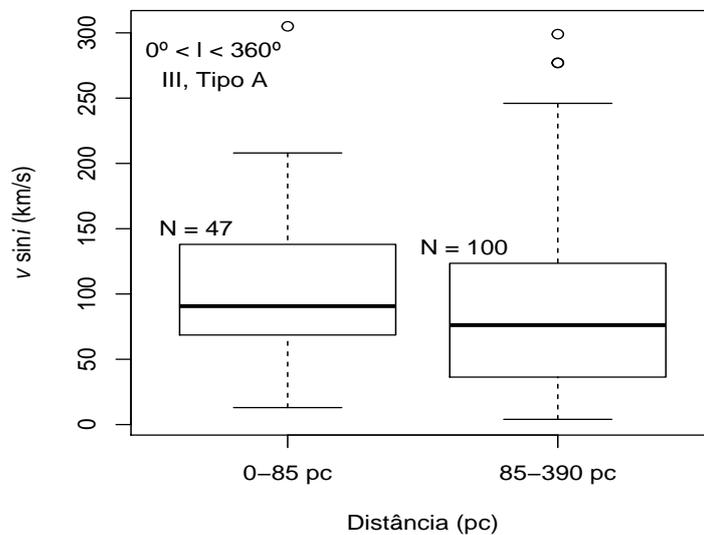


Figura 4.59: Idem figura 4.58, para o tipo A.

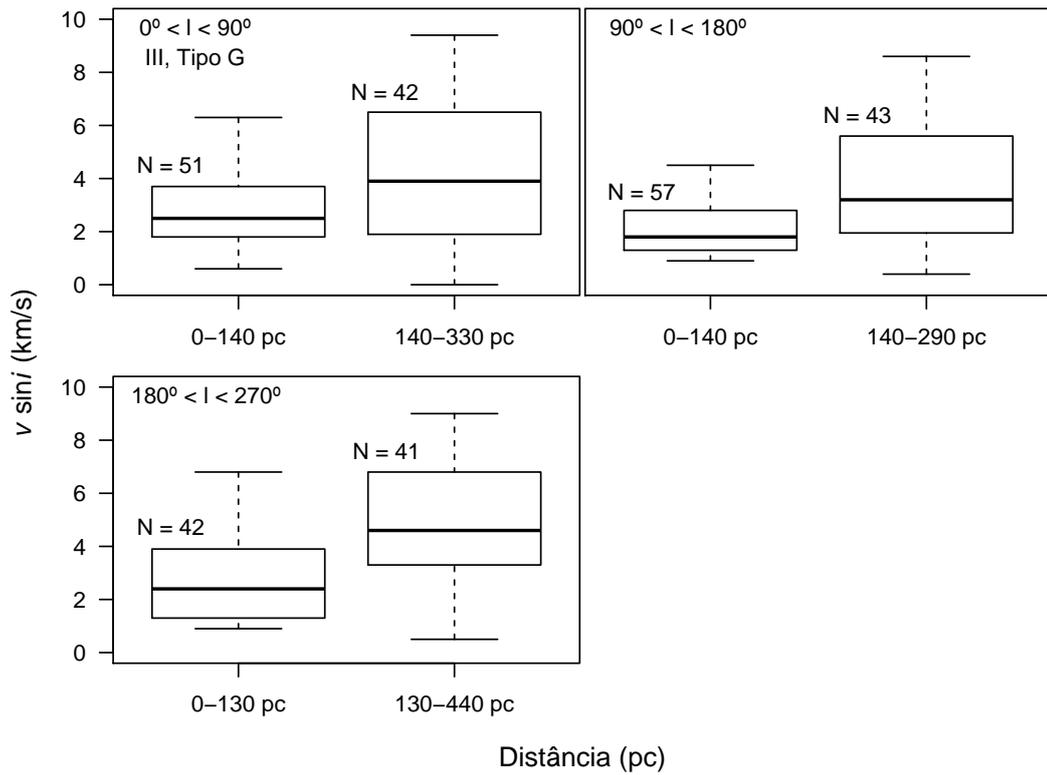


Figura 4.60: Box-plots de $v \sin i$ em função da distância estelar para estrelas gigantes do tipo G. Os valores atípicos forma omitidos.

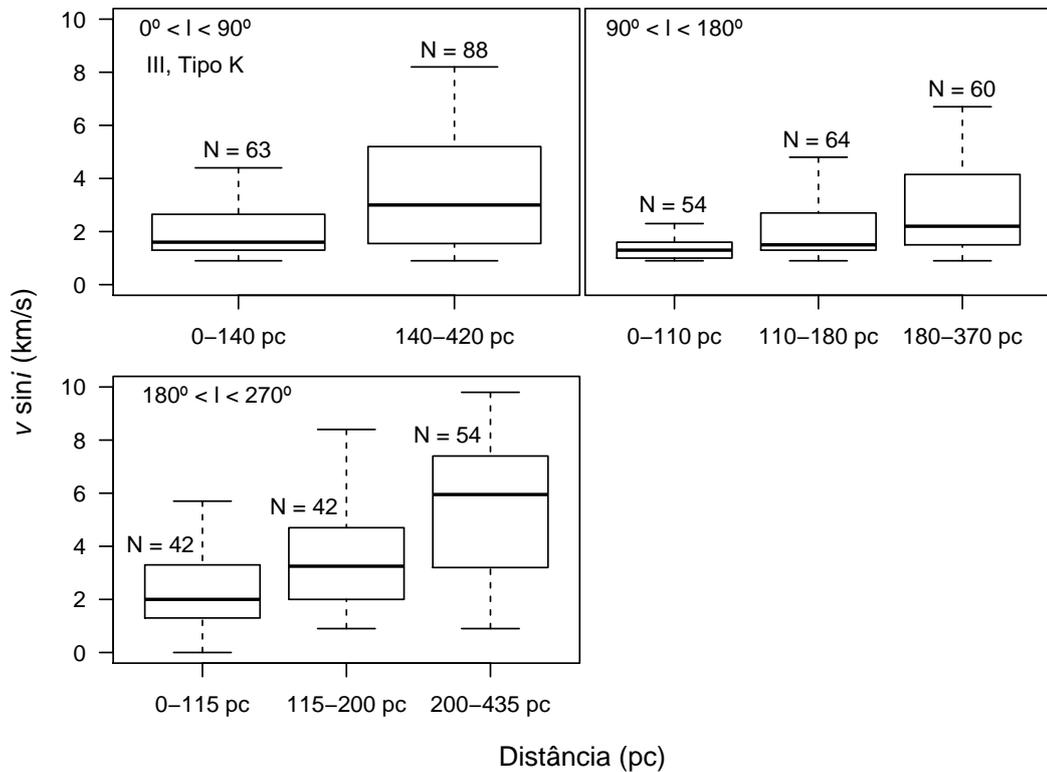


Figura 4.61: Idem figura 4.60, para o tipo K.

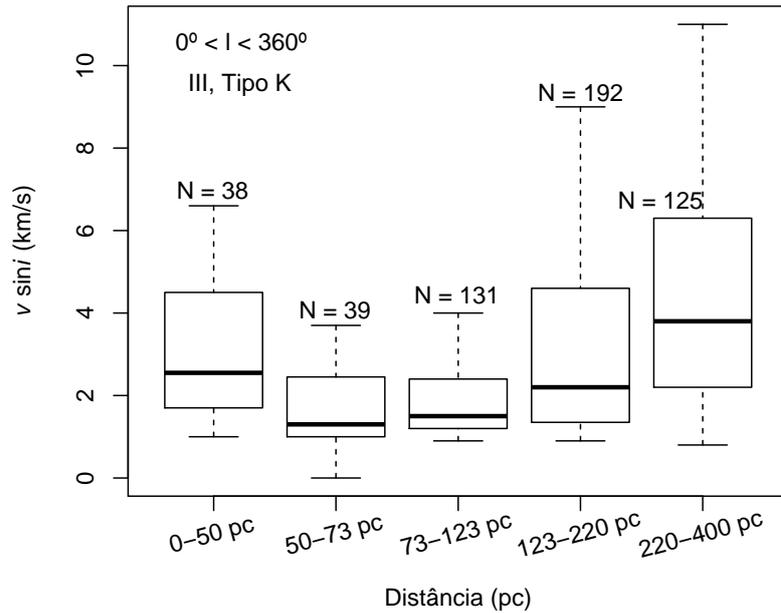


Figura 4.62: Box-plots de $v \sin i$ em função da distância estelar para estrelas gigantes do tipo K em uma região completa de 0° até 360° . Novamente, para melhor visualização dos resultados, os valores atípico foram omitidos.

Para gigantes luminosas (classe II), somente o tipo espectral B tem o número de estrelas aceitável ($N \geq 72$). Na figura 4.63 é mostrado a velocidade de rotação dessas estrelas em função da distância. Novamente, como observado nas gigantes e subgigantes, estrelas de alta rotação estão localizadas em regiões mais distantes do Sol.

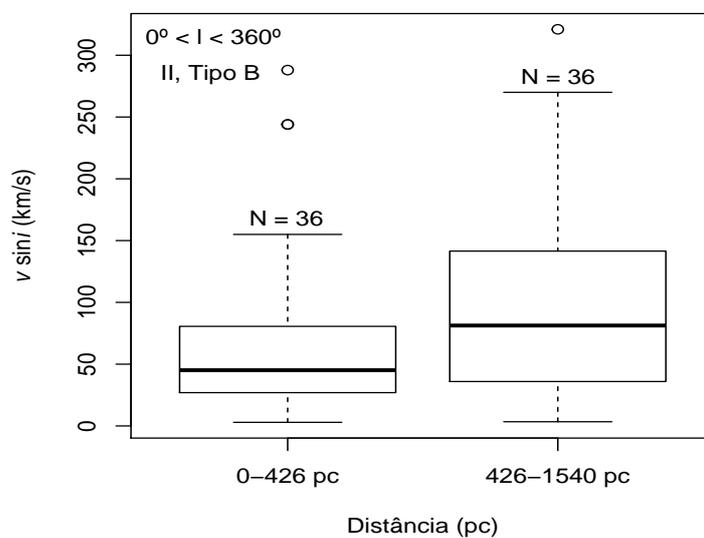


Figura 4.63: Idem figura 4.58, para estrelas gigantes luminosas.

4.4.2 Catálogo Abt, Levato e Grosso

A figura 4.64 mostra o número de estrelas B da sequência principal ao longo da distância. Então, para essa classe espectral, as análises foram feitas em uma região de até 600 pc. Essas estrelas apresentam dependência direta de $v \sin i$ com o espaço, na qual há redução da velocidade de rotação projetada em ambientes mais distantes, como pode ser visto nas figuras 4.65 e 4.66. No intervalo $0^\circ < l < 90^\circ$ não foi encontrada nenhuma distribuição de velocidade rotacionais significativamente diferentes e no intervalo $270^\circ < l < 360^\circ$ há apenas 24 estrelas. Nas estrelas gigantes não foi identificado nenhum grupo de estrelas com distribuições de $v \sin i$ diferentes.

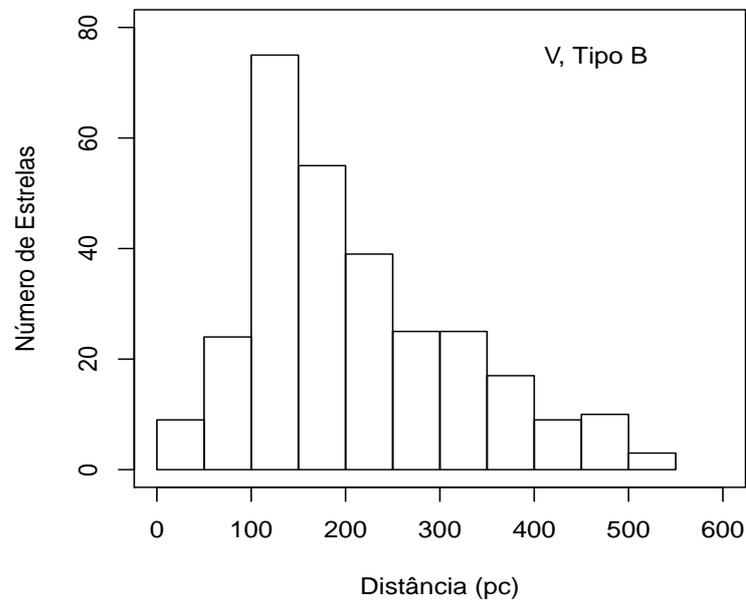


Figura 4.64: Histograma da distância das estrelas do tipo B.

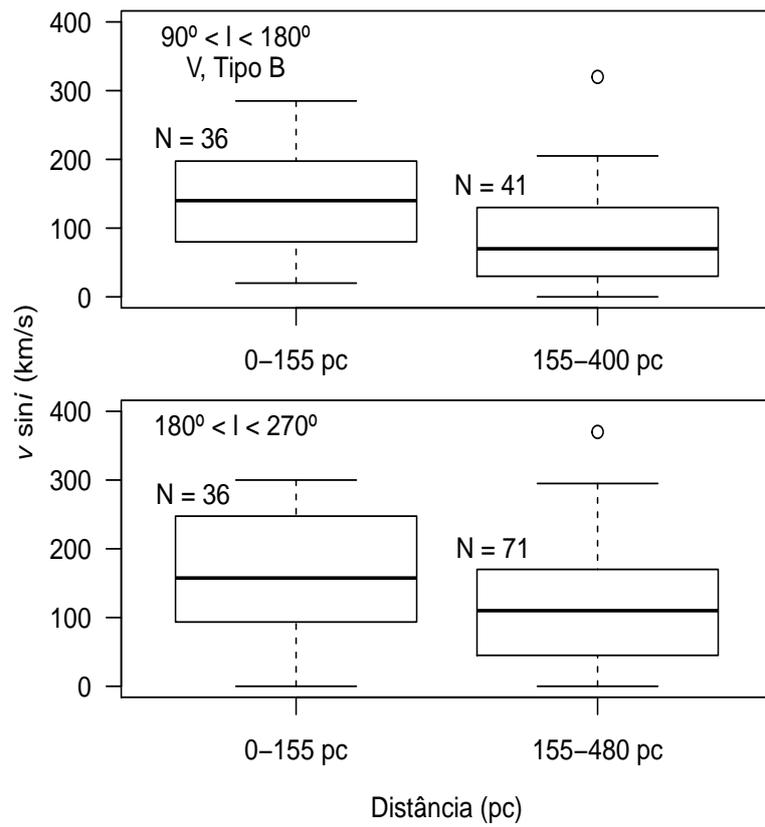


Figura 4.65: Box-plots de $v \sin i$ em função da distância estelar para estrelas da sequência principal do tipo B.

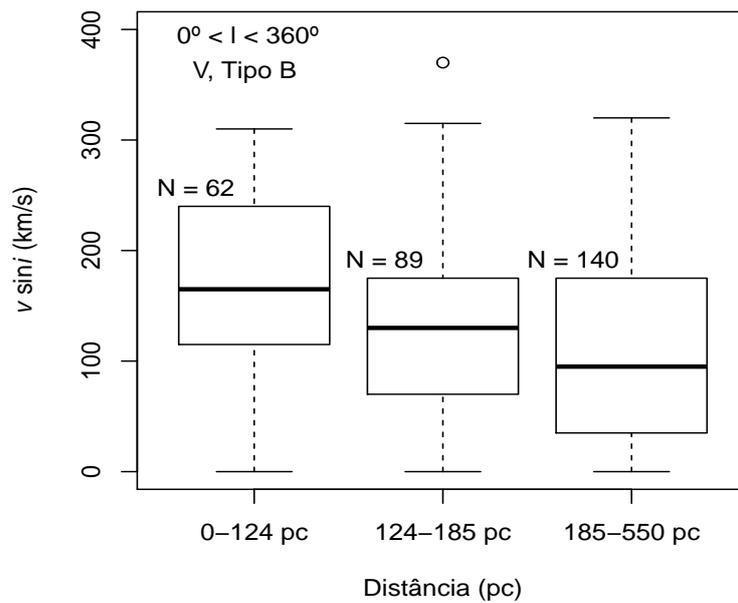


Figura 4.66: Idem figura 4.65, para uma região de 0° até 360° .

4.4.3 Catálogo Royer *et al.*

Os resultados obtidos para as estrelas da classe de luminosidade V da amostra de Royer *et al.* são apresentados nas figuras 4.67, 4.68 e 4.69. No tipo espectral B existem poucas estrelas o que impede uma análise em diferentes direções, porém a investigação da rotação englobando toda a região de 0° até 360° pode refletir o comportamento rotacional efetivo ou predominante do ambiente estelar. Para esse tipo espectral, as estrelas apresentam uma expressiva redução nas velocidades a partir de 130 pc, de 188 km s^{-1} para 123 km s^{-1} na mediana. Relação inversa é observada nas estrelas F, a mediana de $v \sin i$ sai de 84 km s^{-1} para 138 km s^{-1} em $d > 45 \text{ pc}$.

Para as estrelas do tipo A, além da visível redução da rotação com distanciamento, destaca-se também o pico da distribuição de $v \sin i$ nas estrelas restritas entre 66 pc e 90 pc nas regiões $90^\circ < l < 180^\circ$ e $180^\circ < l < 270^\circ$ correspondendo à direção do antcentro galáctico. Sublinha-se ainda que os intervalos e distribuições definidos ao longo da distância d em $90^\circ < l < 180^\circ$ assemelham-se bastante aos intervalos identificados em $180^\circ < l < 270^\circ$ na amostra de Glebocki & Gnacinski, ver figuras 4.68 e 4.48. Isso pode significar que realmente a relação entre rotação e distância para as estrelas anãs do tipo A é dada como mostrado nas regiões $90^\circ < l < 180^\circ$ e $180^\circ < l < 270^\circ$ da figura 4.68.

Nas gigantes e subgigantes do tipo A não foi encontrado nenhum intervalo com estrelas de rotações distintas pelo teste Anderson-Darling. Os tipos espectrais B e F contém dados insuficientes para análise.

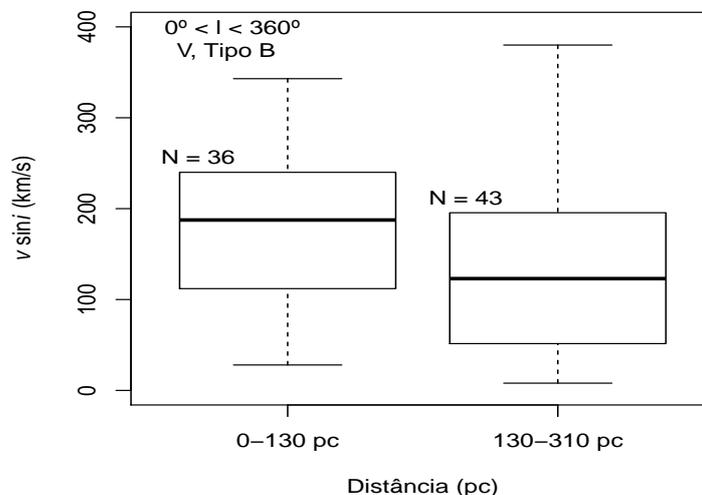


Figura 4.67: Box-plots de $v \sin i$ em função da distância estelar para estrelas B da sequência principal no intervalo $0^\circ < l < 360^\circ$.

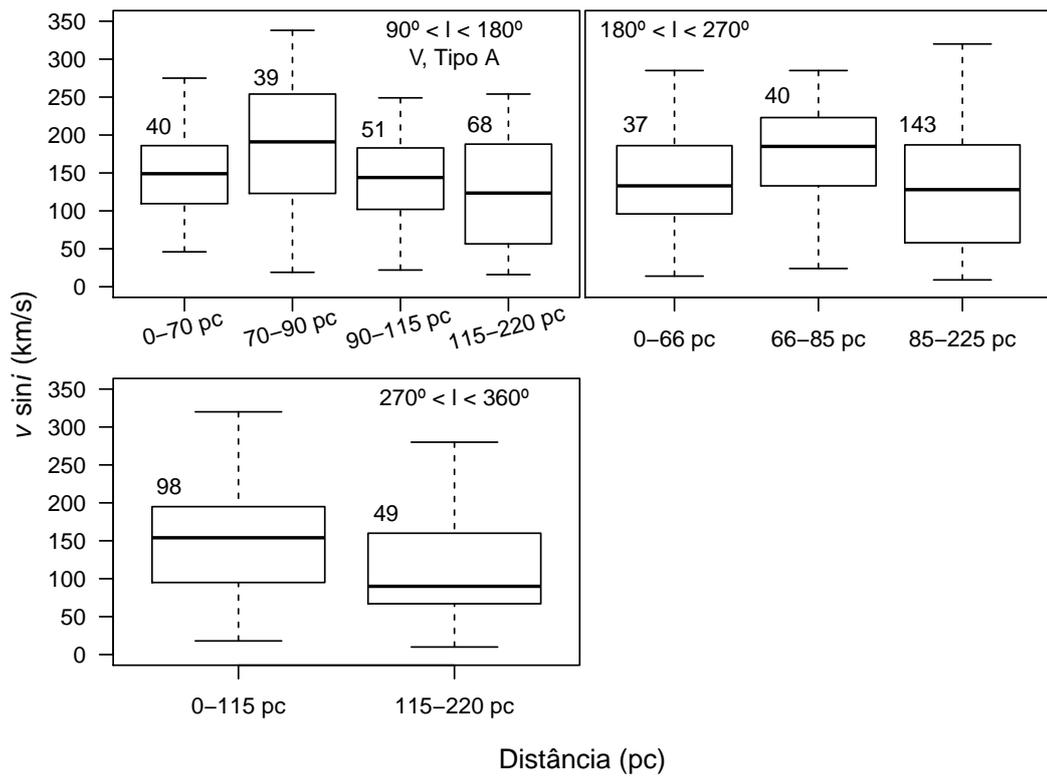


Figura 4.68: Box-plots de $v \sin i$ em função da distância estelar para estrelas da sequência principal do tipo A.

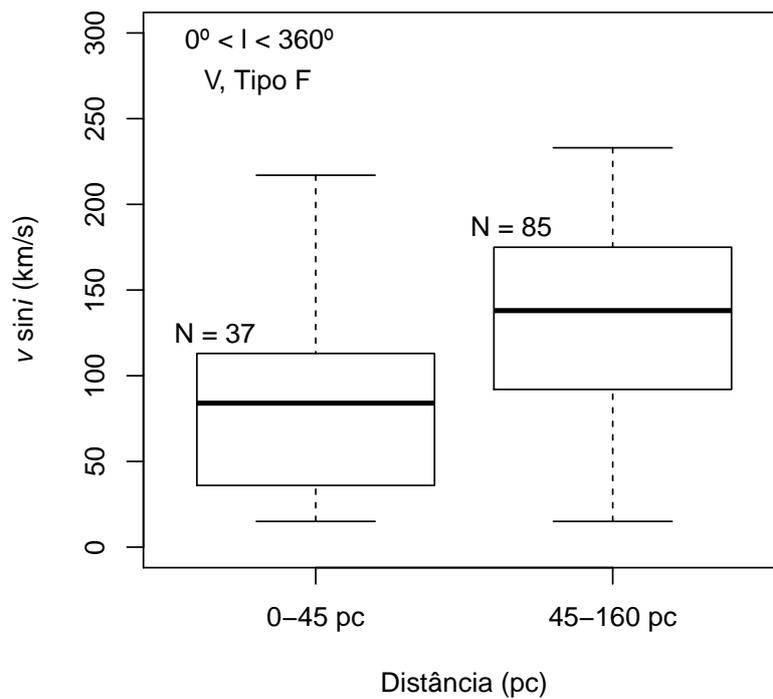


Figura 4.69: Idem figura 4.67, para estrelas do tipo F.

4.4.4 Catálogos De Medeiros *et al.*

As estrelas gigantes (classe III) da presente amostra estendem-se em uma distância efetiva de 220 pc e 320 pc para os tipos espectrais G e K, respectivamente, como indicado na figura 4.70. Para as gigantes luminosas, as estrelas G e K apresentam distribuição espacial similar a da classe III, porém, com alcance de 690 pc para as estrelas G e 730 pc para o tipo K.

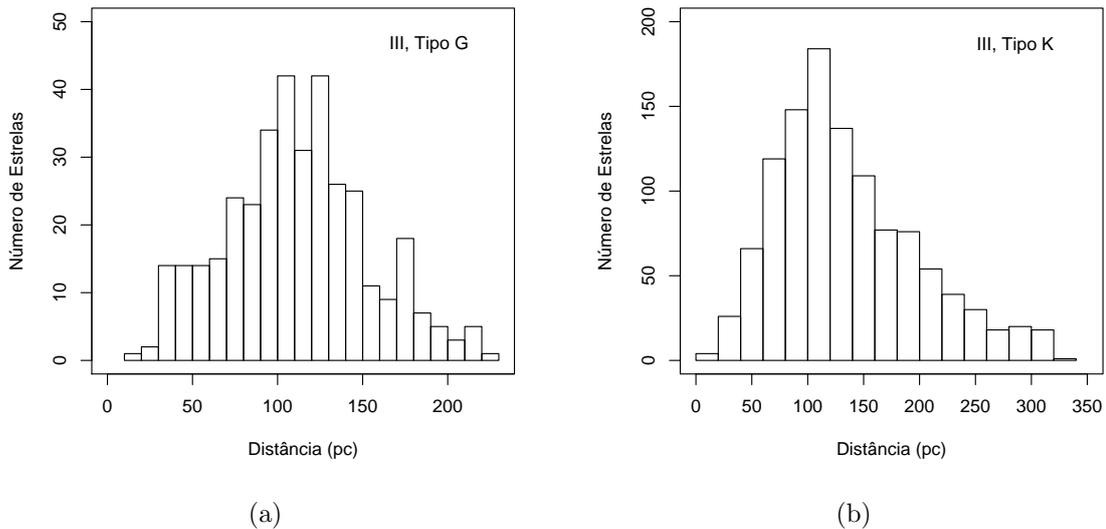


Figura 4.70: Histogramas da distância das estrelas gigantes de tipos espectrais G e K.

No tipo espectral G foram identificadas distribuições de $v \sin i$ diferentes (com probabilidade superior a 95%) unicamente na região $180^\circ < l < 270^\circ$, demonstrando que para outras localidades da vizinhança solar não existem expressivas variações da rotação com a distância estelar. Como podemos ver nas figuras 4.71, 4.72, 4.73 e 4.74, as estrelas gigantes e gigantes luminosas para os tipos G e K da amostra de De Medeiros *et al.* apresentam a mesma dependência rotacional com a distância encontrada na amostra de Glebocki & Gnacinski concernente às classes de luminosidade V, IV e III. É indubitável o aumento das taxas rotacionais desses astros à medida que se distanciam do Sol, destaca-se ainda que essa dependência direta de $v \sin i$ com d é observada, comumente, em todas as direções, não somente em uma região específica do espaço.

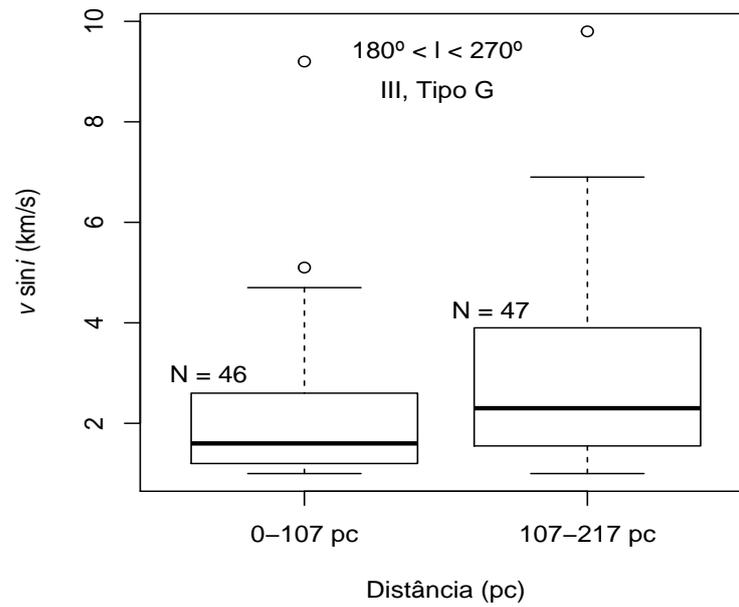


Figura 4.71: Box-plots de $v \sin i$ em função da distância estelar para estrelas gigantes do tipo G no intervalo $0^\circ < l < 360^\circ$.

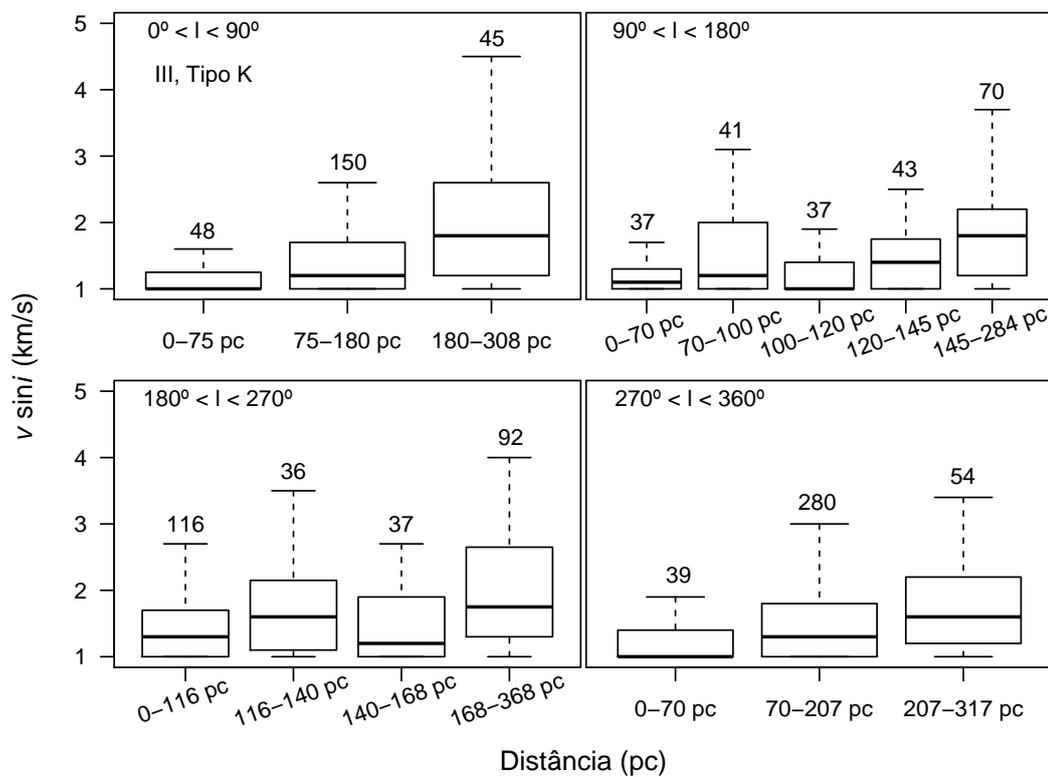


Figura 4.72: Box-plots de $v \sin i$ em função da distância estelar para estrelas gigantes do tipo K.

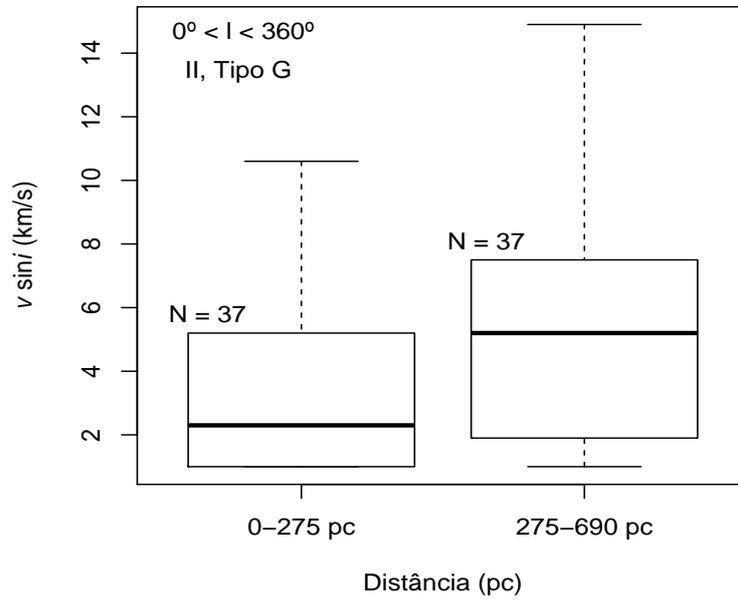


Figura 4.73: Idem figura 4.71, para gigantes luminosas.

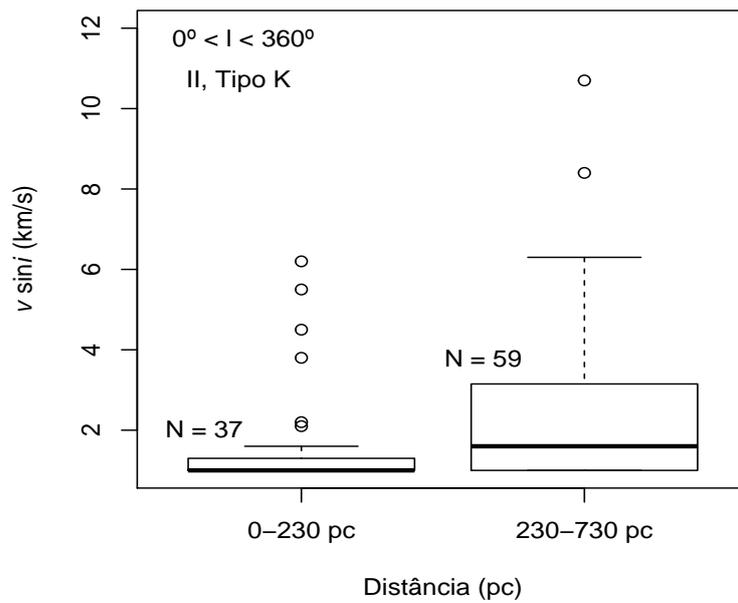


Figura 4.74: Idem figura 4.72, para gigantes luminosas.

4.4.5 Projeção da rotação no plano galáctico

Aqui comparamos alguns resultados obtidos da análise da rotação e distância absoluta d com a rotação estelar no plano galáctico (projeção de d no plano X e Y) para as estrelas da sequência principal. As figuras 4.75 e 4.76 mostram a distribuição de $v \sin i$ em função do plano XY para as estrelas B. As resoluções (XY pc²) nas imagens foram determinadas com base no número de intervalos presentes nos gráficos de $v \sin i$ versus distância (para região completa de $0^\circ < l < 360^\circ$) das subseções anteriores, dessa forma, a resolução é dada por $\approx d_{max}/2n$, onde d_{max} é a distância estelar máxima no plano e n é o número de intervalos. Como mostrado nos gráficos, os resultados diferem dos obtidos da análise $v \sin i$ versus d , ver figura 4.47, pois em relação ao plano a rotação de algumas estrelas é maior em regiões mais afastadas do centro. Isso aponta para o seguinte aspecto: o comportamento rotacional com d e ρ ($\rho^2 = X^2 + Y^2$) não é correlacionado, sugerindo que, possivelmente, a queda da rotação vista nos gráficos da figura 4.47 está relacionada com o distanciamento estelar do plano galáctico, ou seja, conforme as estrelas se distanciam do plano em direção aos polos galácticos a velocidade de rotação tende a diminuir. Tal suposição está em concordância com os resultados encontrados nas subseções 4.3.1 e 4.3.2, onde a velocidade de rotação é menor em regiões abaixo ($b < 0$) e/ou mais distantes do plano, ver novamente as figuras 4.23 e 4.38. Lembrando que o número de estrelas é maior em $b < 0$, ver figura 4.22, isso quer dizer que a dependência da rotação com d para $b < 0$ predomina em relação as estrelas localizadas acima do plano galáctico.

Para as estrelas A, figuras 4.77 e 4.78, de modo geral a velocidade de rotação é moderada próximo ao centro, alta em regiões pouco mais afastadas e mínima em estrelas situadas no extremo do plano. Para o tipo espectral F as figuras 4.79, 4.80, 4.81 e 4.82 mostram respectivamente a distribuição de $v \sin i$ dos subtipos F0-F4 e F5-F9. Claramente, a dependência rotacional aqui apresentada está em conformidade com os padrões encontrados nas análises de $v \sin i$ versus d . As altas velocidades rotacionais das estrelas F0-F4 tendem a se concentrar no centro do plano galáctico, enquanto para estrelas F5-F9 a rotação é maior em regiões mais distantes.

Por fim, as projeções das estrelas G e K são as mesmas evidenciadas no estudo da velocidade rotacional e distância d . Como exposto nas figuras 4.83, 4.84, 4.85 e 4.86, existe um gradiente da velocidade com a distância ρ . Além disso, para as estrelas do tipo K, há um aspecto particular a ser destacado: o setor $270^\circ < l < 360^\circ$ ($X > 0$ e $Y < 0$) é

caracterizado por estrelas de baixa rotação, como também pode ser observado na figura 4.5.

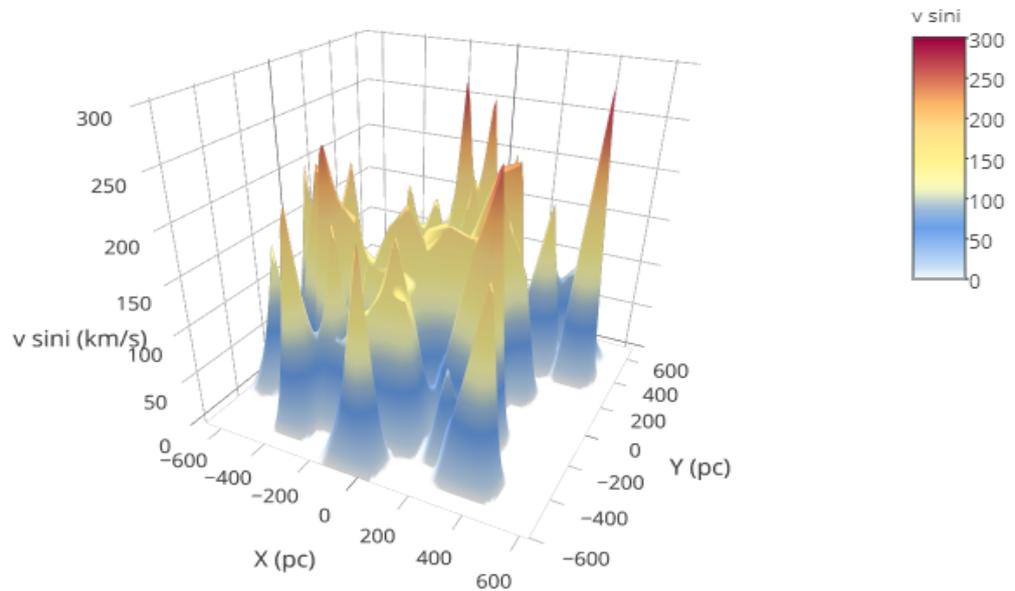


Figura 4.75: Gráfico de superfície da distribuição das medianas de $v \sin i$ no plano galáctico para estrelas B da sequência principal. Resolução $80 \times 80 \text{ pc}^2$.

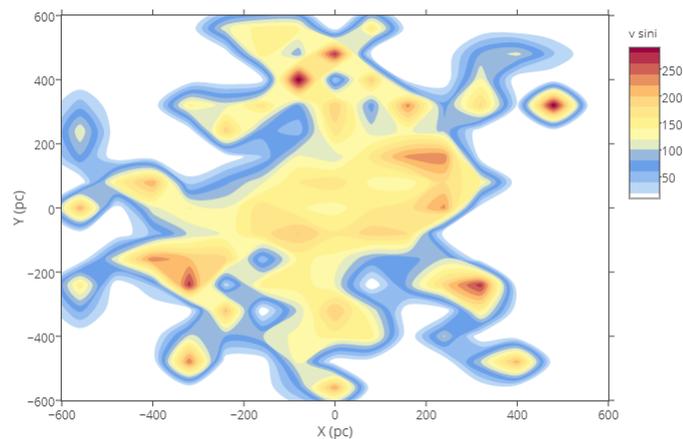


Figura 4.76: Diagrama de contorno da distribuição das medianas de $v \sin i$ no plano galáctico para estrelas B da sequência principal. São mostradas várias curvas de níveis para medianas da velocidade rotacional em uma resolução de $80 \times 80 \text{ pc}^2$.

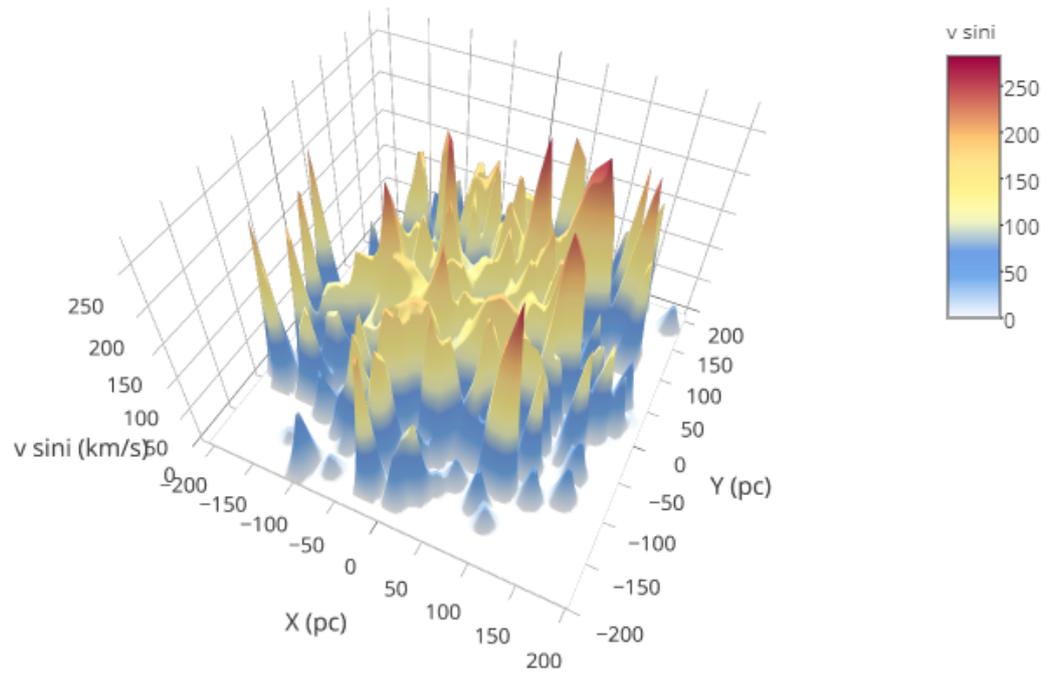


Figura 4.77: Idem figura 4.75, para as estrelas A. Os valores da mediana de $v \sin i$ referem-se à área de $15 \times 15 \text{ pc}^2$.

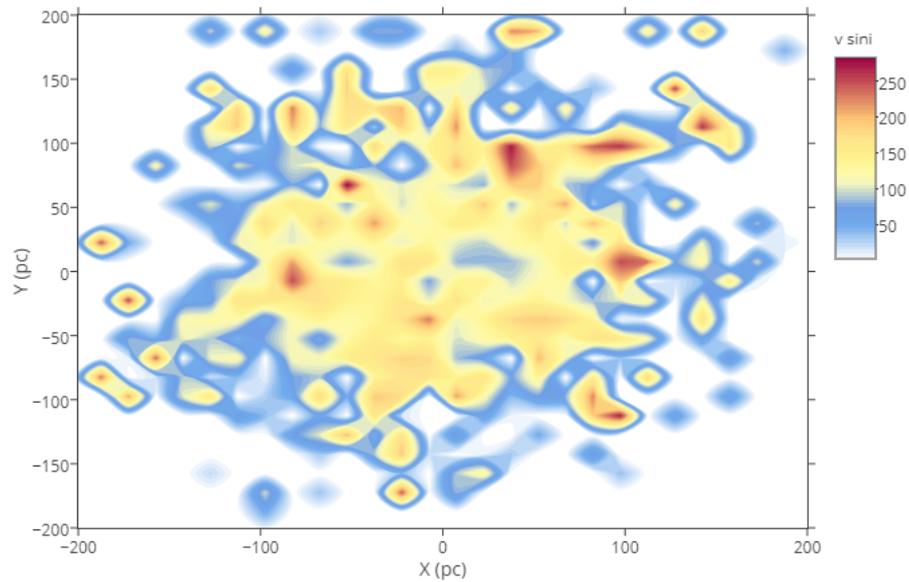


Figura 4.78: Idem figura 4.76, referente às estrelas A em uma resolução de $15 \times 15 \text{ pc}^2$.

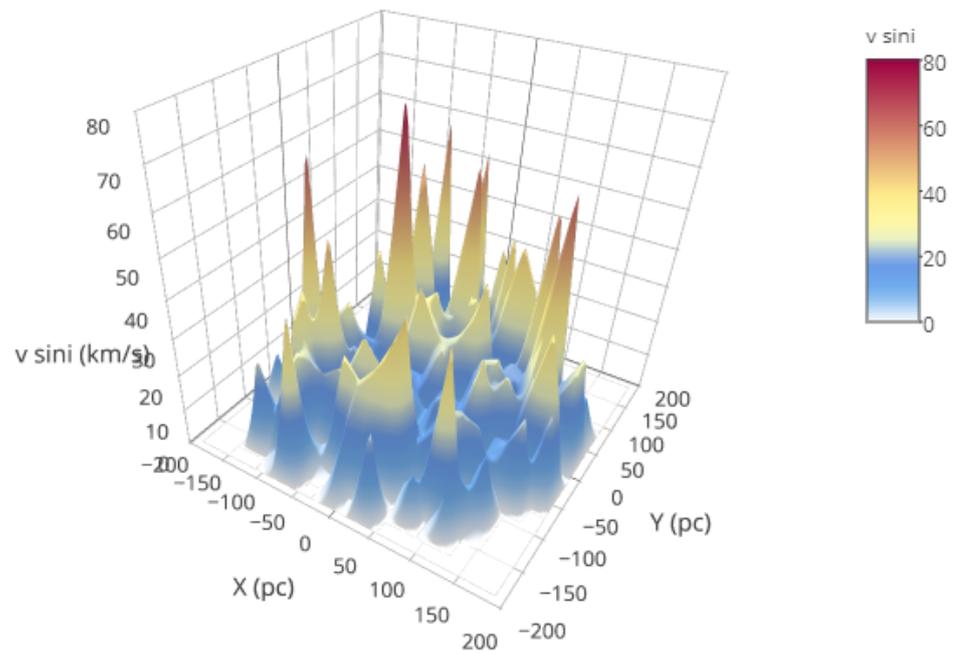


Figura 4.79: Idem figura 4.75, para as estrelas do tipo F0 a F4. Os valores da mediana de $v \sin i$ referem-se à área de $10 \times 10 \text{ pc}^2$.

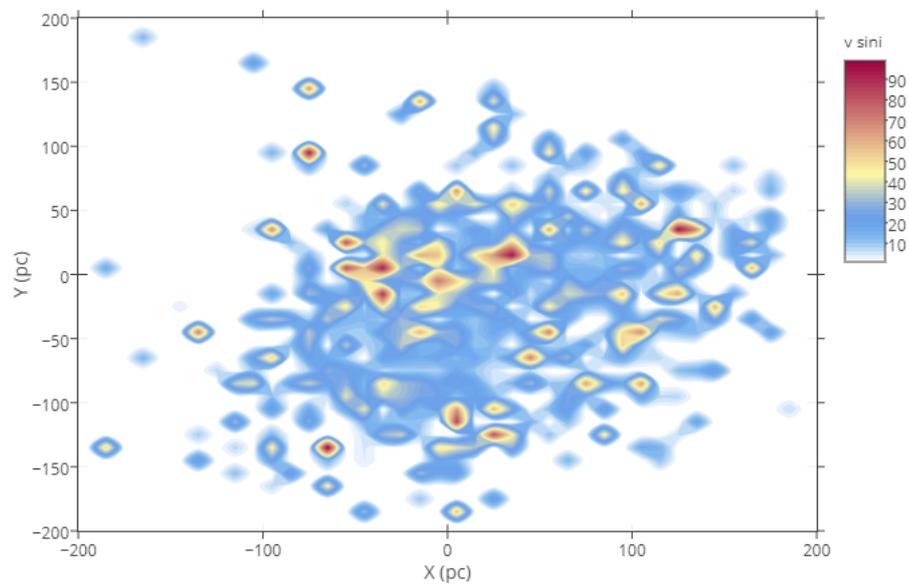


Figura 4.80: Idem figura 4.76, referente às estrelas com tipos F0 a F4 em uma resolução de $10 \times 10 \text{ pc}^2$.

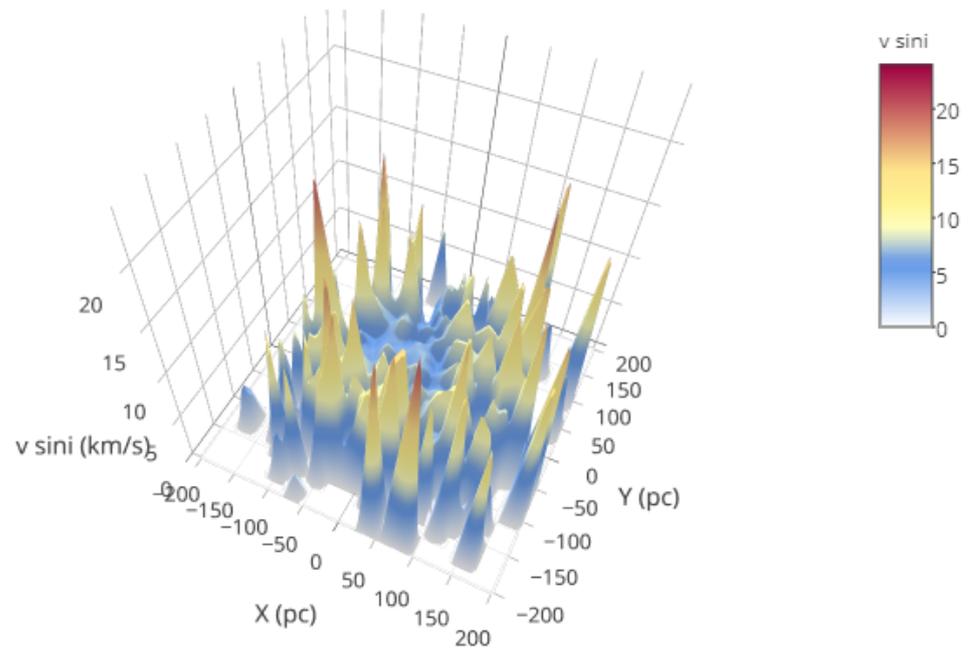


Figura 4.81: Idem figura 4.75, para as estrelas do tipo F5 a F9. Resolução $15 \times 15 \text{ pc}^2$

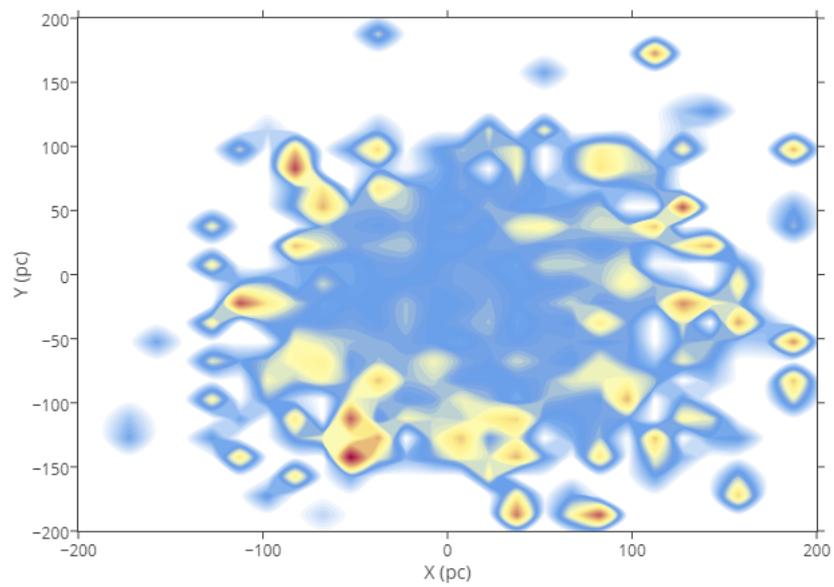


Figura 4.82: Idem figura 4.76, para as estrelas do tipo F5 a F9 em uma resolução de $15 \times 15 \text{ pc}^2$.

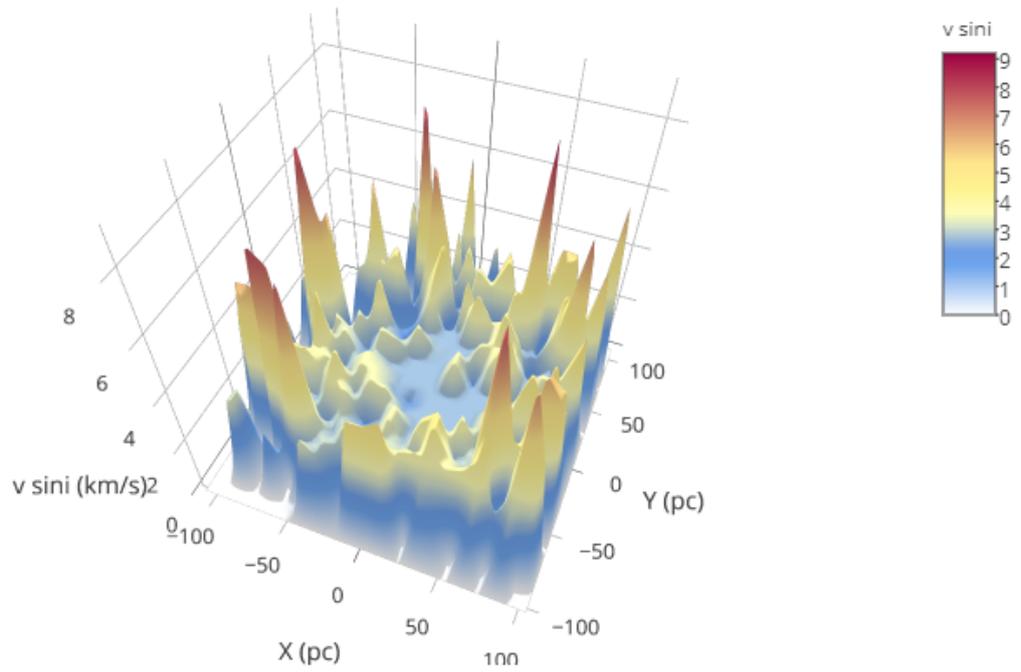


Figura 4.83: Idem figura 4.75, para as estrelas do tipo G. Resolução 10X10 pc².

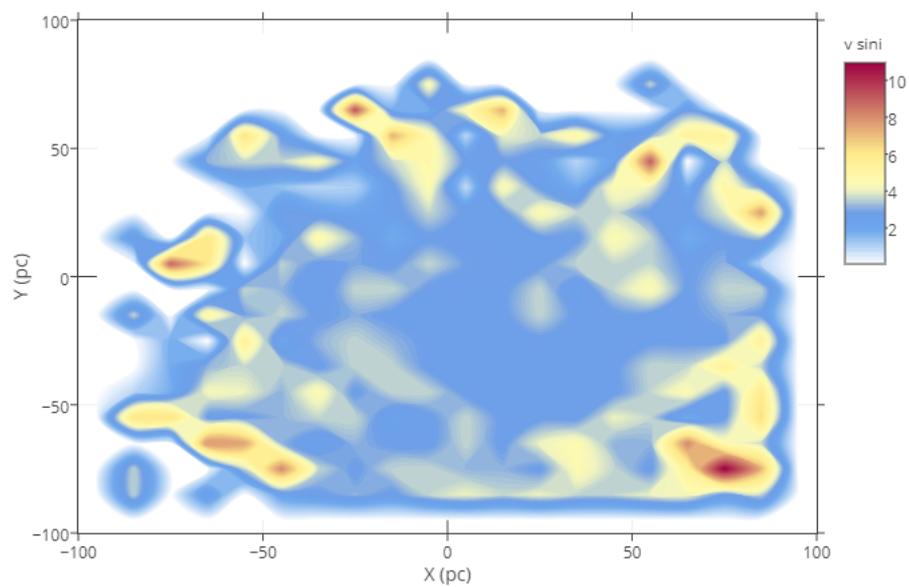


Figura 4.84: Idem figura 4.76, para as estrelas do tipo G. Resolução 10X10 pc².

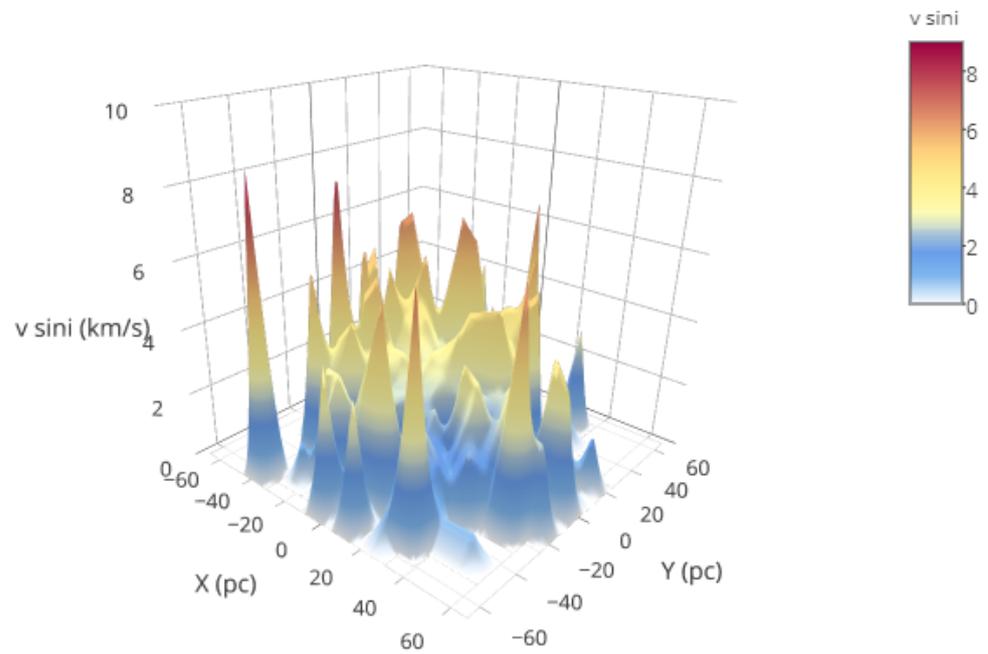


Figura 4.85: Distribuição da mediana da velocidade rotacional no plano galáctico para as estrelas K. As medianas de $v \sin i$ foram calculadas em áreas de $7 \times 7 \text{ pc}^2$.

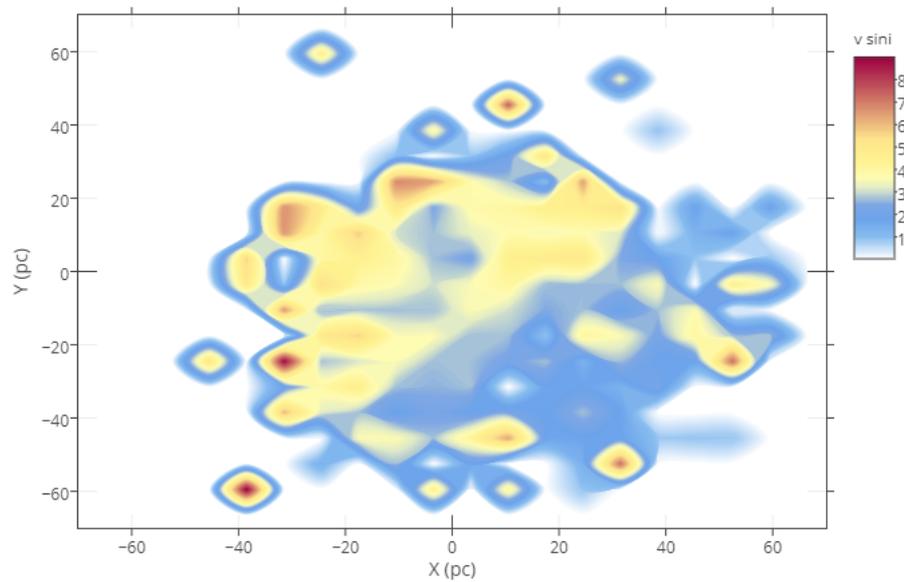


Figura 4.86: Diagrama de contorno da distribuição das medianas de $v \sin i$ no plano galáctico para as estrelas K. Resolução de $7 \times 7 \text{ pc}^2$.

Capítulo 5

Conclusões e perspectivas

5.1 Conclusões

Com base em uma amostra de 15 mil estrelas de diferentes fases evolutivas e tipos espectrais, limitadas em um volume com raio de 1 kpc, concluimos que a velocidade de rotação projetada depende das coordenadas galácticas e da distância estelar. Em relação à coordenada de longitude, os tipos espectrais B e K apresentam forte dependência: as estrelas B pertencentes às classes de luminosidade V, IV, III e II exibem alta e baixa rotação em regiões próximas, respectivamente, à direção do centro e anticentro galáctico; para o tipo K, as estrelas de classes V e IV exibem baixa rotação em setores longitudinais próximos à direção do centro da Galáxia. Além disso, referente à latitude galáctica, para esses tipos espectrais na sequência principal a velocidade de rotação é maior em estrelas localizadas acima do plano galáctico, mais especificamente em $b > -20^\circ$. Esse comportamento também foi observado nas estrelas A, porém levemente. Para as estrelas subgigantes, o único padrão claro entre rotação e latitude foi observado no tipo F, assim como as estrelas anãs de tipos B, A e K, a velocidade de rotação é maior em regiões acima do plano galáctico e/ou no plano médio ($b \approx 0^\circ$). Em contraste, ainda sobre a latitude galáctica, as estrelas gigantes do tipo G tendem a ter baixa rotação em regiões acima do plano.

Outro resultado importante e um tanto incomum refere-se as estrelas K quando comparadas as classes de luminosidade V e III. O comportamento rotacional em função da latitude nesses dois estágios evolutivos são distintamente opostos: nas estrelas anãs a velocidade de rotação projetada aumenta para valores mais altos da latitude, isto é, cres-

cimento gradativo da rotação no sentido do polo sul (-90°) ao polo norte galáctico (90°); já nas estrelas gigantes o comportamento é inverso, verifica-se um gradiente negativo da velocidade de rotação no sentido de -90° a 90° . Esse resultado dá suporte ao cenário em que os eixos rotacionais apresentam orientação preferencial e que essa orientação está vinculada ao estágio evolutivo. Salienta-se ainda que o alinhamento preferencial médio dos eixos, se existir, não é perpendicular com disco galáctico. No entanto, nas amostras de De Medeiros *et al.* esse padrão nas estrelas gigantes não se mantém. Todavia, as gigantes luminosas do tipo K apresentam algum grau de alinhamento dos eixos rotacionais.

Certamente, os resultados mais expressivos do presente trabalho diz respeito à explícita dependência da velocidade rotacional com a distância estelar. Surpreendentemente, assim como as estrelas F de subtipo F5 correspondem à linha divisória (aproximadamente) entre alta e baixa rotação, a subclasse espectral F5 também corresponde à linha divisória entre as estrelas com gradiente positivo e negativo de $v \sin i$ relativo à distância estelar. Na sequência principal, a velocidade de rotação das estrelas B, A e F0-F4 cai à medida que se distanciam do sol, ao passo que para estrelas mais tardias de tipos F5-F9, G e K a rotação aumenta gradualmente com a distância estelar. Tal peculiaridade pode está ligada a estrutura interna dessas estrelas, pois estrelas de baixa massa apresentam profundas envoltórias convectivas, enquanto que estrelas massivas exibem núcleo convectivo e envoltória radiativa. Portanto, as estrelas com subtipos espectrais entorno de F5 pode corresponder a faixa de transição desse tipo estrutura. Destaca-se que o aumento da rotação com a distância também foi constatado nas classes III e II em ambos os tipo espectrais G e K, e nas classes de luminosidade IV, III e II para as estrelas do tipo B. Isso mostra que a dependência da rotação com o espaço nas estrelas G e K não é perdida com o tempo.

Mediante todos os resultados aqui apresentados, podemos levantar três suposições independentes: 1) os eixos rotacionais não estão distribuídos aleatoriamente no espaço e o padrão de inclinação varia com a distância ao Sol; 2) somente a magnitude da rotação depende da localização estelar na Galáxia; 3) ou tanto a magnitude da velocidade de rotação quanto a orientação dos eixos rotacionais estão correlacionados com o espaço.

5.2 Perspectivas

No âmbito desta Dissertação, identificamos como necessidade para pesquisas futuras aumentar o número de estrelas massivas e ampliar o intervalo espectral de O a M. Utilizar as medidas de paralaxe feitas pela sonda Gaia da Agência Espacial Europeia com medidas de posição mais precisas do que o seu antecessor Hipparcos. Com os dados fornecidos pelo satélite GAIA também poderemos ampliar a região de estudo, isto é, poderemos estudar a rotação estelar em outras localidades da Via Láctea.

Procurar verificar se outros parâmetros importantes como massa e metalicidade também têm algum vínculo com a posição estelar, podendo informar com mais detalhes como se configura a dependência da rotação com a posição das estrelas na Galáxia. Finalmente, aplicar o nosso método de determinação de intervalos em duas dimensões (X e Y) para a construção de gráficos tridimensionais mais precisos.

Apêndice A

Sobre o Teste Anderson-Darling

O teste Anderson-Darling (AD) é um teste de hipótese não-paramétrico que pode ser usado para comparar a função de distribuição empírica (f.d.e) dos dados com alguma função de distribuição cumulativa (f.d.c) teórica ou na comparação entre duas funções de distribuições empíricas. O teste AD é mais poderoso do que outros testes de hipóteses, sendo mais sensível do que os testes Kolmogorov-Smirnov (KS) e Cramer-von Mises (CvM). Ambas as estatísticas KS e CvM são insensíveis nas caudas das distribuições devido ao fato de que as f.d.e convergem para 0 e 1 nas extremidades, e, conseqüentemente, qualquer diferença deve ser pequena.

Em [64] e [65] Anderson e Darling sugeriram a seguinte modificação do teste CvM:

$$A_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F(x)]^2 \psi(x) dF(x) \quad (\text{A.1})$$

Onde $\psi(x)$ é uma função de ponderação. Para $\psi(x) = 1$ obtemos a estatística do teste Cramer-von Mises para uma amostra de tamanho n .

$F(x)$ é a função de distribuição acumulada dada por $F(x) = P(X \leq x)$ e $F_n(x)$ é a função de distribuição empírica definida como

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < x_{(1)} \\ i/n, & \text{se } x_{(i)} \leq x < x_{(i+1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \\ 1, & \text{se } x \geq x_{(n)} \end{cases}$$

O Cramer-von Mises se atenta a soma das diferenças quadráticas entre $F_n(x)$ e $F(x)$. Então, o teste AD se ajusta para o fato de que a variação do valor da f.d.e é pequena perto 0 e 1 do que próximo de 1/2. A sensibilidade uniforme em toda gama de x é fornecida por

$$A_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[F_n(x) - F(x)]^2}{F(x)(1 - F(x))} dF(x) \quad (\text{A.2})$$

Que é obtida quando a função de ponderação é $\psi(x) = [F(x)(1 - F(x))]^{-1}$. Dessa forma, a estatística A_n^2 do teste Anderson-Darling de uma amostra coloca mais peso nas caudas das distribuições. De forma equivalente, após algumas integrações diretas e recombinações de termos, a estatística A_n^2 pode ser definida como

$$A_n^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(2i - 1) \ln(F(x_{(i)})) + (2(n - i) + 1) \ln(1 - F(x_{(i)}))] \quad (\text{A.3})$$

A transformação $F(x_{(i)})$ leva $x_{(i)}$ em $U_{(i)}$ de uma amostra de tamanho n com distribuição uniforme em $(0, 1)$, onde $x_{(i)}$ são os dados ordenados. Logo,

$$A_n^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(2i - 1) \ln(U_{(i)}) + (2(n - i) + 1) \ln(1 - U_{(i)})] \quad (\text{A.4})$$

Introduzida por [66, 67], por analogia com teste de uma amostra, a estatística do teste AD para duas amostras é

$$A_{nm}^2 = \frac{nm}{n + m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[F_n(x) - G_m(x)]^2}{H_{n+m}(x)(1 - H_{n+m}(x))} dH_{n+m}(x) \quad (\text{A.5})$$

Onde $F_n(x)$ e $G_m(x)$ são, respectivamente, as f.d.e das amostras ordenadas X 's e Y 's, de tamanhos n e m . H_{n+m} é dado por $H_{n+m} = [nF_n(x) + mG_m(x)]/(n + m)$. De forma equivalente, temos

$$A_{nm}^2 = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^{n+m} (N_i Z_{(n+m-ni)})^2 \frac{1}{i Z_{(n+m-i)}} \quad (\text{A.6})$$

$Z_{(n+m)}$ representa a combinação de X 's e Y 's, e N_i é número de observações em X 's que são iguais ou menores que a i -ésima observação em $Z_{(n+m)}$.

Apêndice B

Tabelas dos Dados Observacionais

As tabelas a seguir se referem algumas estrelas dos catálogos de Glebocki & Gnacinski, Abt, Levato e Grosso, Royer *et al.* e De Medeiros *et al.*

As colunas das tabelas são as seguintes:

- Coluna 1: Identificação das estrelas pelo respectivo número HD;
- Coluna 2: Velocidade de rotação projetada $v \sin i$;
- Coluna 3: Paralaxe em milissegundo de arco;
- Coluna 4: Tipo espectral;
- Coluna 5: Classe de luminosidade ou fase evolutiva;
- Coluna 6: Longitude galáctica;
- Coluna 7: Latitude galáctica.

Tabela B.1: Amostra de estrelas do catálogo Glebocki & Gnacinski e seus respectivos parâmetros.

Nome	$v \sin i$ km/s	plx mas	Tipo	Fase	l graus ($^{\circ}$)	b graus ($^{\circ}$)
HD 36079	5.4	20.34	G0II	II	223.5612	-27.2013
HD 164136	21.4	3.79	F2II	II	55.9406	23.9164
HD 27563	38.7	4.13	B7II	II	201.496	-36.8338
HD 40111	123	2.1	B0/II/III	II	183.9655	0.8388
HD 157857	106	2.28	O6.5II	II	12.9706	13.3103
HD 194779	98.4	1.76	B3II	II	79.4344	1.9155
HD 153102	223	0.23	B3II/III	II	346.6018	2.4807
HD 42379	64.2	2.44	B1II	II	189.2849	1.3395
HD 360	265	10.16	K1II	II	91.7932	-69.0454
HD 116243	3.8	12.53	G6II	II	306.4251	-1.885
HD 61563	89.9	12.6	A0III	III	213.7901	13.2033
HD 89455	145	15.23	A8III	III	255.0377	35.8273
HD 188328	6.3	12.11	F8III	III	53.7607	-6.3904
HD 80971	42.9	9.83	F3III	III	248.5616	22.2442
HD 11185	31.4	6.85	F5III/IV	III	299.1448	-39.3719
HD 2114	3.4	6.94	G8III	III	109.7294	-60.263
HD 60986	1	8.77	K0III	III	184.4453	24.2409
HD 85945	6.2	6.87	G5III	III	155.9039	47.0176
HD 22695	1.5	7.68	K0III	III	170.9008	-30.2828
HD 81688	1.1	11.65	K0III	III	174.2266	46.0749
HD 109238	102	7.64	F0IV/V	IV	297.1287	42.8755
HD 161420	168	18.89	F0IV	IV	337.1877	-13.8033
HD 192530	16.2	16.84	F5IV	IV	346.7812	-34.108
HD 130087	3.6	17.01	G2IV	IV	6.0875	58.0802
HD 33093	4.6	27.25	G0IV	IV	212.7556	-28.6599
HD 209396	2.2	10.74	K1IV	IV	52.413	-45.1116
HD 94491	167	2.86	B3IV/V	IV	288.1832	0.5549
HD 37646	151	5.37	B8IV	IV	179.0417	-0.5038
HD 203096	18.8	1.62	A5IV	IV	85.5852	-5.9337
HD 192666	111	7.36	B9IV	IV	31.1195	-24.3519
HD 172942	6.3	6.29	F6V	V	313.955	-26.8709
HD 160416	12.6	11.15	F3/5V	V	342.17	-9.9614
HD 212179	6.3	9.4	F3V	V	351.2708	-55.4701
HD 122973	4.5	20.71	G2V	V	331.7699	49.6494
HD 154857	1.8	15.57	G5V	V	333.2882	-10.0254
HD 18455	5.4	44.51	K2V	V	215.7234	-61.7335
HD 132029	66.5	10.44	A2V	V	51.3645	62.5691
HD 69894	5.4	11.11	F7V	V	172.2583	34.4323
HD 170121	2.7	16.07	G2V	V	8.1008	-6.5466
HD 9891	7.2	11.13	G3V	V	168.3586	-74.7723

Tabela B.2: Amostra de estrelas do catálogo Abt, Levato e Grosso e seus respectivos parâmetros.

Nome	$v \sin i$ km/s	plx mas	Tipo	Fase	l graus ($^{\circ}$)	b graus ($^{\circ}$)
HD44173	205	1.1	B5 III	III	199.0002	-1.3162
HD48434	50	1.14	B0 III	III	208.5443	0.0621
HD51309	35	1.3	B3 III	III	228.703	-6.6777
HD192987	225	1.48	B6 III	III	74.8712	0.9892
HD10293	60	1.67	B8 III	III	129.5242	-3.5916
HD49131	135	1.72	B2 III	III	240.5001	-14.7267
HD198820	15	1.88	B3 III	III	75.8319	-7.3604
HD61068	10	1.93	B2 III	III	235.5303	0.6084
HD188252	80	1.96	B2 III	III	81.8068	10.5126
HD57608	10	2	B8 III	III	216.2805	6.8899
HD220575	20	2.03	B8 III	III	105.8017	-18.8518
HD142763	85	2.04	B8 III	III	31.6147	46.9596
HD71833	30	2.24	B8 III	III	243.0693	10.3595
HD52348	145	2.29	B4 III	III	231.9291	-7.2057
HD47100	100	2.38	B8 III	III	175.3186	14.7697
HD53240	60	2.42	B9 III _n	III	223.3623	-1.8518
HD52860	190	2.42	B9 III _n	III	169.2474	21.927
HD214993	30	2.43	B2 III	III	97.652	-16.1818
HD829	0	1.8	B2 V	V	114.5468	-24.5488
HD42035	25	1.81	B9 V	V	200.3091	-5.3978
HD191263	60	1.84	B3 V	V	51.6227	-11.7798
HD170580	0	1.97	B2 V	V	34.1306	6.5988
HD200340	115	2	B6 V	V	48.4549	-29.3781
HD50093	150	2.07	B2 V	V	236.1121	-11.6058
HD217943	145	2.09	B2 V	V	109.9868	0.3179
HD37643	125	2.11	B7 V	V	221.6242	-23.7119
HD37209	35	2.12	B1 V	V	209.8065	-19.3949
HD168199	175	2.13	B5 V	V	41.6674	13.537
HD212883	5	2.18	B2 V	V	93.584	-17.0493
HD173087	85	2.19	B5 V	V	63.8666	16.8317
HD36166	125	2.28	B2 V	V	201.6733	-17.1913
HD34989	40	2.29	B1 V	V	194.6241	-15.6075
HD43461	185	2.39	B6 V	V	207.9403	-7.302
HD31726	5	2.4	B1 V	V	213.498	-31.5148
HD196775	210	2.42	B3 V	V	60.1618	-15.2527
HD71997	15	2.45	B4 V	V	248.4353	6.8097
HD6300	100	2.48	B3 V	V	125.0752	-11.8064
HD204403	100	2.5	B3 V	V	83.9425	-9.8612

Tabela B.3: Amostra de estrelas do catálogo Royer *et al.* e seus respectivos parâmetros.

Nome	$v \sin i$ km/s	plx mas	Tipo	Fase	l graus ($^{\circ}$)	b graus ($^{\circ}$)
HD3283	112	0.9	A4III	III	121.0769	-2.4916
HD119361	150	1.63	B8III	III	313.1977	19.7607
HD186377	16	1.66	A5III	III	67.2913	4.4586
HD10293	62	1.67	B8III	III	129.5242	-3.5916
HD135153	18	1.67	F3III	III	335.5018	22.1475
HD67751	93	1.72	A3III	III	239.9503	6.7424
HD75063	30	1.76	A1III	III	265.3801	-1.8375
HD38558	25	1.83	F0III	III	189.8215	-5.4405
HD218753	18	1.87	A5III	III	110.2805	-1.0177
HD57608	7	2	B8III	III	216.2805	6.8899
HD220575	23	2.03	B8III	III	105.8017	-18.8518
HD202240	26	2.12	F0III	III	81.6282	-8.2016
HD160839	42	2.16	F0III/IV	III	0.6294	0.9861
HD173664	71	3.65	A2IV	IV	83.2229	22.7373
HD174500	214	3.97	A1IV/V	IV	349.7764	-19.5966
HD55595	140	4.05	A5IV/V	IV	239.7974	-7.9461
HD58907	81	4.27	A0IV	IV	237.9292	-3.3579
HD130158	65	4.39	B9IV/V	IV	333.3376	30.3149
HD59059	260	4.45	B9IV	IV	203.3645	14.9673
HD150894	128	4.61	A3IV	IV	352.6258	11.084
HD36965	238	4.62	A0IV	IV	233.7849	-28.8988
HD101150	222	4.74	A5IV	IV	135.3091	51.0005
HD30085	26	4.83	A0IV	IV	140.0523	16.5452
HD42729	33	4.83	B9.5IV/V	IV	233.2094	-20.022
HD174177	71	4.93	A2IV	IV	75.6426	19.9797
HD80064	54	5.06	A2IV	IV	219.3858	37.6583
HD158067	44	5.14	A5IV	IV	49.9495	29.6853
HD208796	115	6	B9IV/V	IV	337.6749	-48.0744
HD79900	249	1.78	B8V	V	268.3699	2.3115
HD192538	238	2.28	A0V	V	74.2301	1.1354
HD45050	128	2.77	B9V	V	208.6031	-5.1215
HD127067	65	2.86	A1V	V	41.6927	68.5096
HD208727	259	3.03	B8V	V	95.7368	-4.7748
HD1663	28	3.22	A0V	V	110.9272	-51.1819
HD75811	18	3.23	A5V	V	222.5538	29.2571
HD67159	123	3.25	B9V	V	230.0406	12.0742
HD38090	207	3.28	A2/A3V	V	226.5184	-24.7288
HD116197	219	3.3	A4V	V	308.3633	14.5967
HD48272	165	3.55	A2V	V	179.3509	14.2437
HD47863	40	3.62	A1V	V	197.1726	5.2335
HD181119	180	3.62	A3V	V	63.5555	8.4388
HD69665	81	3.65	A1V	V	237.583	10.6639

Tabela B.4: Amostra de estrelas do catálogo De Medeiros *et al.* e seus respectivos parâmetros.

Nome	$v \sin i$ km/s	plx mas	Tipo	Fase	l graus ($^{\circ}$)	b graus ($^{\circ}$)
HD187401	1.1	1.17	G5II	II	53.1045	-5.4447
HD189671	3.6	1.25	G8II	II	63.8698	-2.0051
HD192078	11.4	1.28	G5II	II	75.8636	2.7923
HD189301	1.1	1.37	K4II	II	73.7835	4.6688
HD78887	1	1.39	K0II	II	201.7775	41.0392
HD106556	8.9	1.45	G5II	II	140.1281	68.7865
HD181475	8.4	1.48	K5II	II	32.2495	-8.5791
HD115019	1	1.53	K2II	II	116.8435	60.1861
HD50372	8.7	1.54	G6II	II	210.6663	1.5953
HD25291	6.8	1.6	F0II	II	145.5143	5.0294
HD8507	1	1.64	G5II	II	128.8306	-15.3184
HD193217	3.4	1.7	K4II	II	79.6852	3.9913
HD23278	1.9	1.74	G8II	II	143.9118	3.4349
HD46277	2	1.74	K0II	II	185.9275	8.8084
HD211606	1.7	1.75	K5II	II	85.4252	-24.5281
HD8791	1	1.75	K3II	II	132.987	-36.7349
HD214434	1	1.8	K2II	II	89.1375	-27.5399
HD49367	1	1.85	K1II	II	207.0545	2.156
HD9900	5.5	1.87	G5II	II	129.1079	-4.3332
HD185663	1	1.9	K2II	II	55.396	-1.4568
HD1089	2.2	5.14	K3III	III	345.7935	-78.9872
HD109742	2	5.14	K5III	III	283.7639	79.419
HD148451	1.2	5.14	G5III	III	305.4108	-26.122
HD63513	1.9	5.15	G6-8III	III	278.182	-19.4881
HD140815	1	5.15	K0III	III	8.2535	40.6924
HD51682	1.1	5.16	K2III	III	245.6273	-14.2941
HD219279	1	5.17	K5III	III	64.1086	-61.9227
HD223444	1.6	5.18	K5III	III	314.536	-52.8767
HD14509	1	5.19	K2III	III	257.9158	-66.7704
HD10597	1.5	5.2	K5III	III	132.4305	-15.7522
HD195402	1	5.21	K2III	III	325.1924	-34.3229
HD1632	1.7	5.21	K5III	III	115.534	-29.5195
HD200253	3	5.21	G5III	III	79.514	-6.7742
HD35238	1	5.21	K1III	III	175.6208	-2.5804
HD126927	1	5.22	K5III	III	341.1311	48.6239
HD25274	2.2	5.22	K2III	III	139.1466	12.1821
HD211053	5.8	5.23	G8-K0III	III	353.4212	-54.4209
HD162496	4.9	5.26	K1III	III	356.3413	-3.9755
HD43827	1	5.27	K3III	III	224.4781	-14.8857

Referências Bibliográficas

- [1] STRUVE, O. The cosmogonical significance of stellar rotation. *Popular Astronomy*, v. 53, p. 201, 1945.
- [2] WESTGATE, C. A statistical study of the rotational broadening of stellar absorption lines in classes b and o. *The Astrophysical Journal*, v. 77, p. 141, 1933.
- [3] WESTGATE, C. A statistical study of rotational broadening in 112 stars of class f. *The Astrophysical Journal*, v. 79, p. 357, 1934.
- [4] SLETTEBAK, A. On the axial rotation of the brighter o and b stars. *The Astrophysical Journal*, v. 110, p. 498, 1949.
- [5] CHANDRASEKHAR, S.; MÜNCH, G. On the integral equation governing the distribution of the true and the apparent rotational velocities of stars. *The Astrophysical Journal*, v. 111, p. 142, 1950.
- [6] HUANG, S.-S.; STRUVE, O. Stellar rotation. In: *Annales d'Astrophysique*. [S.l.: s.n.], 1954. v. 17, p. 85.
- [7] HUANG, S.-S.; STRUVE, O. Stellar rotation and atmospheric turbulence. In: *Stellar Atmospheres*. [S.l.: s.n.], 1960. p. 321.
- [8] WOLFF, S.; EDWARDS, S.; PRESTON, G. The origin of stellar angular momentum. *The Astrophysical Journal*, v. 252, p. 322–336, 1982.
- [9] CHANG, Y. A study of the orientation of the orbit-planes of 16 visual binaries having determinate inclinations. *The Astronomical Journal*, v. 40, p. 11–15, 1929.
- [10] FINSEN, W. The distribution of the poles of the orbits of 28 visual binaries. *Circular of the Union Observatory Johannesburg*, v. 90, p. 397–398, 1933.
- [11] HUANG, S.-S.; JR, C. W. Galactic distribution of eclipsing binaries and its significance. *The Astrophysical Journal*, v. 143, p. 146, 1966.
- [12] SHAKHOVSKOI, N. The spatial orientation of the orbit planes of close binary stars. *Soviet Astronomy*, v. 13, p. 303, 1969.
- [13] GLEBOCKI, R. Orientation of the orbital planes of visual binary systems. *Acta Astronomica*, v. 50, p. 211–220, 2000.
- [14] POPOVIC, G.; PAVLOVIC, R.; NINKOVIC, S. Orientations of orbital planes of binaries. *Serbian Astronomical Journal*, v. 169, 2004.

- [15] BURKI, G.; MAEDER, A. Observational tests on star formation. ii-variation of the axial rotational velocities with the galactocentric distance, for early b-type stars in the local spiral arm. *Astronomy and Astrophysics*, v. 57, p. 401–405, 1977.
- [16] BERNACCA, P.; PERINOTTO, M. A catalogue of stellar rotational velocities: I. main sequence single stars. ii. main sequence spectroscopic binaries and eclipsing systems. *Contributi dell'Osservatorio Astrofisica dell'Universita di Padova in Asiago*, v. 239, 1970.
- [17] DIEN, E. van. Axial rotation of the brighter stars in the pleiades cluster. *Journal of the Royal Astronomical Society of Canada*, v. 42, p. 249, 1948.
- [18] DEUTSCH, A. J. Maxwellian distributions for stellar rotations. In: *Stellar rotation*. [S.l.]: Springer, 1970. p. 207–218.
- [19] GUTHRIE, B. The bimodal distribution of rotational velocities of late b-type stars in galactic clusters. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press, v. 198, n. 3, p. 795–810, 1982.
- [20] GRAY, D. F.; TONER, C. An analysis of the photospheric line profiles in f, g, and k supergiants. *The Astrophysical Journal*, v. 322, p. 360–367, 1987.
- [21] ABT, H. A. Are stellar rotational axes distributed randomly? *The Astronomical Journal*, IOP Publishing, v. 122, n. 4, p. 2008, 2001.
- [22] SKUMANICH, A. Time scales for ca ii emission decay, rotational braking, and lithium depletion. *The Astrophysical Journal*, v. 171, p. 565, 1972.
- [23] MEIBOM, S. et al. A spin-down clock for cool stars from observations of a 2.5-billion-year-old cluster. *Nature*, Nature Research, v. 517, n. 7536, p. 589–591, 2015.
- [24] TASSOUL, J.-L. *Theory of Rotating Stars.(PSA-1)*. [S.l.]: Princeton University Press, 2015. v. 1.
- [25] HUANG, S.-S. A statistical study of the rotation of the stars. *The Astrophysical Journal*, v. 118, p. 285, 1953.
- [26] KRAFT, R. P. Studies of stellar rotation. i. comparison of rotational velocities in the hyades and coma clusters. *The Astrophysical Journal*, v. 142, p. 681, 1965.
- [27] KRAFT, R. Spectroscopic astrophysics. *An Assessment of the Contributions of Otto Struve*, v. 385, 1970.
- [28] SODERBLOM, D. Rotational studies of late-type stars. ii-ages of solar-type stars and the rotational history of the sun. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, v. 53, p. 1–15, 1983.
- [29] SOARES, B. et al. Tsallis maximum entropy distribution function for stellar rotational velocities in the pleiades. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 364, p. 413–422, 2006.
- [30] BODENHEIMER, P. Angular momentum effects in star formation. In: *Angular Momentum Evolution of Young Stars*. [S.l.]: Springer, 1991. p. 1–20.

- [31] JR, R. F.; CLARK, F. A turbulent origin for the rotation of molecular clouds. *The Astrophysical Journal*, v. 245, p. 898–902, 1981.
- [32] PHILLIPS, J. Rotation in molecular clouds. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, EDP Sciences, v. 134, n. 2, p. 241–254, 1999.
- [33] BLITZ, L. The evolution of galactic giant molecular clouds. In: *The evolution of the interstellar medium*. [S.l.: s.n.], 1990. v. 12, p. 273–289.
- [34] CHERNIN, A. D.; EFREMOV, Y. N. Rotation of giant molecular clouds and hydrodynamic effects in the galactic disc. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, The Royal Astronomical Society, v. 275, n. 2, p. 209–216, 1995.
- [35] LARSON, R. B. Processes in collapsing interstellar clouds. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 11, n. 1, p. 219–238, 1973.
- [36] BONNELL, I. A.; DOBBS, C. L.; SMITH, R. J. Shocks, cooling and the origin of star formation rates in spiral galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press, p. stt004, 2013.
- [37] BURKI, G. Formation of open clusters. In: CAMBRIDGE UNIV PRESS. *Symposium-International Astronomical Union*. [S.l.], 1980. v. 85, p. 169–190.
- [38] VOGEL, S.; KUHI, L. Rotational velocities of pre-main-sequence stars. *The Astrophysical Journal*, v. 245, p. 960–976, 1981.
- [39] BOUVIER, J. et al. Rotation in t tauri stars. i-observations and immediate analysis. *Astronomy and Astrophysics*, v. 165, p. 110–119, 1986.
- [40] HARTMANN, L.; STAUFFER, J. Additional measurements of pre-main-sequence stellar rotation. *The Astronomical Journal*, v. 97, p. 873–880, 1989.
- [41] SPITZER, L. *Physical processes in the interstellar medium*. [S.l.]: Wiley-Interscience, 1978. (Wiley Classics Library).
- [42] HOYLE, F. The origin of the solar nebula. *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society*, v. 1, p. 28, 1960.
- [43] HUANG, S.-S. Rotational behavior of the main-sequence stars and its plausible consequences concerning formation of planetary systems. *The Astrophysical Journal*, v. 141, p. 985, 1965.
- [44] BOUVIER, J.; FORESTINI, M.; ALLAIN, S. The angular momentum evolution of low-mass stars. *Astronomy and Astrophysics*, v. 326, p. 1023–1043, 1997.
- [45] EDWARDS, S. et al. Angular momentum regulation in low-mass young stars surrounded by accretion disks. *The Astronomical Journal*, v. 106, p. 372–382, 1993.
- [46] GLEBOCKI, R.; GNACINSKI, P. VizieR online data catalog: Catalog of stellar rotational velocities (glebocki+ 2005). *VizieR online data catalog*, v. 3244, 2005.

- [47] MEDEIROS, J. R. de; MAYOR, M. A catalog of rotational and radial velocities for evolved stars. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, EDP Sciences, v. 139, n. 3, p. 433–460, 1999.
- [48] MEDEIROS, J. D. et al. A catalog of rotational and radial velocities for evolved stars-v. southern stars. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 561, p. A126, 2014.
- [49] ABT, H. A.; LEVATO, H.; GROSSO, M. Rotational velocities of b stars. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 573, n. 1, p. 359, 2002.
- [50] ROYER, F. et al. Rotational velocities of a-type stars-ii. measurement of $v \sin i$ in the northern hemisphere. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 393, n. 3, p. 897–911, 2002.
- [51] BARANNE, A.; MAYOR, M.; PONCET, J. Coravel? a new tool for radial velocity measurements. *Vistas in Astronomy*, Elsevier, v. 23, p. 279–316, 1979.
- [52] HOFFLEIT, D. Catalogue of bright stars. *New Haven, Conn.: Yale University Observatory, 3rd rev. ed., edited by Hoffleit, Dorrit*, 1964.
- [53] HOFFLEIT, D.; JASCHEK, C. The bright star catalogue. *The Bright Star Catalogue, New Haven: Yale University Observatory (4th edition)*, 1982.
- [54] SLETTEBAK, A. et al. A system of standard stars for rotational velocity determinations. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, v. 29, p. 137–159, 1975.
- [55] ABT, H. A.; MORRELL, N. I. The relation between rotational velocities and spectral peculiarities among a-type stars. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, v. 99, p. 135, 1995.
- [56] ROYER, F. et al. Rotational velocities of a-type stars-i. measurement of $v \sin i$ in the southern hemisphere. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 381, n. 1, p. 105–121, 2002.
- [57] JR, F. J. M. The kolmogorov-smirnov test for goodness of fit. *Journal of the American statistical Association*, Taylor & Francis Group, v. 46, n. 253, p. 68–78, 1951.
- [58] FACCHINETTI, S. A procedure to find exact critical values of kolmogorov-smirnov test. *STATISTICA APPLICATA*, R. Curto, v. 21, p. 337–359, 2009.
- [59] FEIGELSON, E. D.; BABU, G. J. *Modern Statistical Methods for Astronomy: With R Applications*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2012.
- [60] STEPHENS, M. A. Edf statistics for goodness of fit and some comparisons. *Journal of the American statistical Association*, Taylor & Francis, v. 69, n. 347, p. 730–737, 1974.
- [61] SCHOLZ, F. W.; STEPHENS, M. A. K-sample anderson–darling tests. *Journal of the American Statistical Association*, Taylor & Francis Group, v. 82, n. 399, p. 918–924, 1987.
- [62] SCHATZMAN, E. A theory of the role of magnetic activity during star formation. In: *Annales d’astrophysique*. [S.l.: s.n.], 1962. v. 25, p. 18.

- [63] BINNEY, J.; TREMAINE, S. *Galactic dynamics*. [S.l.]: Princeton university press, 2008. (Princeton Series in Astrophysics).
- [64] ANDERSON, T. W.; DARLING, D. A. Asymptotic theory of certain "goodness of fit" criteria based on stochastic processes. *The annals of mathematical statistics*, JSTOR, p. 193–212, 1952.
- [65] ANDERSON, T. W.; DARLING, D. A. A test of goodness of fit. *Journal of the American statistical association*, Taylor & Francis, v. 49, n. 268, p. 765–769, 1954.
- [66] DARLING, D. A. The kolmogorov-smirnov, cramer-von mises tests. *The Annals of Mathematical Statistics*, JSTOR, v. 28, n. 4, p. 823–838, 1957.
- [67] PETTITT, A. N. A two-sample anderson-darling rank statistic. *Biometrika*, Oxford University Press, v. 63, n. 1, p. 161–168, 1976.