



Universidade do Estado do Rio Grande do Norte
Faculdade de Ciências Exatas e Naturais-FANAT
Departamento de Física
Programa de Pós-Graduação em Física

Ricardo Luís Lima Vitória

Cosmografia com os dados de *Lookback Time* e
Análise Estatística

Mossoró

2015

Ricardo Luís Lima Vitória

**Cosmografia com os dados de *Lookback Time* e Análise
Estatística**

Dissertação apresentada ao programa de
Pós-graduação em Física como parte
dos requisitos para obtenção do título
de MESTRE EM FÍSICA

Orientadora: Prof^{fa}. Dr^a. Maria Aldinêz Dantas

Mossoró

2015

Ricardo Luís Lima Vitória

Cosmografia com os dados de *Lookback Time* e Análise
Estatística

Dissertação apresentada ao programa de
Pós-graduação em Física como parte
dos requisitos para obtenção do título
de MESTRE EM FÍSICA

Banca Examinadora

Prof^ª. Dr^ª. Maria Aldinêz Dantas

Orientadora

UERN

Prof. Dr. Francisco Ernandes Matos Costa

Examinador externo

UFERSA

Prof. Dr. Edésio Miguel Barboza Júnior

Examinador interno

UERN

**Catálogo da Publicação na Fonte.
Universidade do Estado do Rio Grande do Norte.**

Vitória, Ricardo Luís Lima

Cosmografia com os dados de *lookback time* e análise estatística / Ricardo Luís Lima Vitória - Mossoró, RN, 2015.

64 f.

Orientador(a): Prof. Dra. Maria Aldinêz Dantas

Dissertação (Mestrado). Universidade do Estado do Rio Grande do Norte. Programa de pós-graduação em Física.

1. Cosmografia. 2. *Lookback Time*. 3. Evolução do Universo. I. Dantas, Maria Aldinêz . II. Universidade do Estado do Rio Grande do Norte. III. Título.

UERN/ BC

CDD 507

Agradecimentos

A Deus em primeiro lugar sempre, meu pilar de sustentação e força.

A minha mãe, Auseni Lima Vitória, por sua paciência em me educar de maneira profissional e moral e por estar sempre ao meu lado me fortalecendo e apoiando na minha carreira acadêmica e profissional.

A Prof^ª. Dr^ª. Maria Aldinêz Dantas, pessoa fundamental na realização deste trabalho, pela disposição, paciência, amizade, dedicação e segura orientação facultado a minha humilde pessoa.

Aos meus colegas de curso, que se tornaram grandes amigos, pelo menos a maior parte deles, Sérgio Murilo, Italo Philipe, Vanessa Amaral, Ana Carolina, Claudivan Moreira, Leandro Fábio e Diego Silva pela amizade, conhecimento de vida, alegrias, estudos em grupo, viagens, apoio incondicional, críticas e elogios, ideias, sugestões e discussões, realizadas durante os dois anos intensos desse mestrado.

Aos novos amigos que conheci durante o mestrado, em especial, Antônia Veruska, Cornélio, Valber Gomes, Daniele Lima, Antônio Robson, Isaac Macedo, Diego Rodrigues, Meirielle, Adriano e Marcos.

E aos amigos que fiz durante minha vida, pelo incentivo e amizade, em especial, Joãozinho, Ruydeiglan, Anayra Maryelle, Mariana Costa, Kérzia, Adriana Vasconcelos, Fernanda Lino, Leonardo, Marta Nágila, Fábio, Osmar, Thaís, Raonny Silva, Antônio Neto, Roseane Costa, Dorgivan, Greyson Coelho, Suelma Dias, Suyane, José de Ribamar, Fred Jorge, Wharley Costa, Igo Henrique, Nayana Cristina, Cíntia Leite, Vivaldo, Ana Cláudia, Ana Carolina Brito, Daniel, Aline Idelmara, Adriano (Sipriano), Aline Avelar, Tereza Ripardo, Cosntantino e Alexandrina.

Aos meus familiares, em especial, a minha irmã Alessandra Macedo, as minhas tias Maria Deuselene, Maria Djalma, Maria Djanira e Maria Diana, a minha madrinha Maria, ao meu tio Adão Pereira, minhas avós Maria Dora e Alderina Lima Vitória e outros que sempre acreditaram em mim.

Aos professores e funcionários técnico-administrativo da UERN, em especial, aos professores, Nilson Sena, Midiã e Josélio pelo respeito, admiração, comprometimento profissional e aprendizado adquiridos na formação de novos mestres e cidadãos mais éticos e responsáveis com o futuro do país.

Finalmente, a FAPERN pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho investigamos a possibilidade de descrever a cinemática do Universo a partir de dados de idade utilizando uma técnica chamada Cosmografia. Uma característica interessante, é que este procedimento é independente de modelos. Como ponto de partida, consideramos o princípio cosmológico descrito pela métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) e em seguida fazemos uma expansão de Taylor em $a(t)$, uma particularidade metodológica da Cosmografia, para descrever a evolução do universo em termos dos parâmetros de Hubble H_0 , do desaceleração q_0 , do *jerk* j_0 e *snip* s_0 . Com isso, definimos o *Lookback Time* cosmográfico em termos destes parâmetros atuais e em função de $z - redshift$. Porém, existe uma divergência nesta relação para altos redshifts, $|z| = 1$, o que define o raio de convergência, e para resolver esse problema, definimos o *Lookback Time* em função do $y - redshift$ utilizando a parametrização $z = y/(1 - y)$ varrendo todos os possíveis valores de z fornecendo a evolução do Universo: passado, presente e futuro. Finalmente, a partir dessa análise, fazemos uma comparação com o *Lookback Time* do modelo teórico Λ CDM utilizando dados observacionais e dados simulados computacionalmente.

Palavras chaves: Cosmografia - Lookback Time - Evolução do Universo

Abstract

In this work we investigate the possibility of describing the kinematics of the Universe from ages data using a technique called Cosmography. One interesting features of this procedure is that it is independent of models. We consider the cosmological principle described by the metric of Friedmann-Lamaître-Robertson-Walker (FLRW) and then we made a Taylor expansion at $a(t)$, a methodological particularity of the Cosmography, to describe the evolution of the universe in terms of the parameters Hubble H_0 , deceleration q_0 , jerk j_0 and snap s_0 . Thus, we define the *Lookback Time* cosmographic in terms of these current parameters and z -redshift function. However, there is a difference in this relationship to high *redshifts*, $|z| = 1$, what defines the radius of convergence, and to solve this problem, we define the *Lookback Time* in y -redshift function adopting the parametrization, $z = y/(1 - y)$, sweeping all possible values of z providing the complete evolution of the Universe; past, present and future. Finally, from this analysis we made a comparison with the Λ CDM theoretical model *Lookback Time* using observational and synthetic data from computer simulations.

Key words: Cosmography - Lookback Time - Evolution of the Universe

Sumário

Lista de Tabelas	i
Lista de Figuras	ii
Notação e Convenções	iv
1 Introdução	1
2 Cosmologia Padrão	4
2.1 Lei de Hubble	4
2.2 Nucleosíntese Primordial	6
2.3 Radiação Cósmica de Fundo - RCF	8
2.4 Dinâmica do Universo	10
2.5 Inflação Cósmica	15
2.6 Sumário	16
3 Cosmografia	17
3.1 Fundamentos de Cosmografia	17
3.2 Outras Distâncias de Interesse Físico na Cosmografia	20
3.3 A parametrização: <i>y-redshift</i>	22
3.4 Cosmografia com o Parâmetro de Hubble	26
3.5 Sumário	28
4 <i>Lookback Time</i> e Análise Estatística	29
4.1 Idade e o <i>Lookback Time</i> Teórico	29

4.2	<i>Lookback Time</i> Cosmográfico	31
4.3	Análise Estatística	33
4.4	Amostras Reais e Simuladas	33
4.5	Sumário	34
5	Resultados e Discussões	35
5.1	Resultados	35
6	Conclusões e Perspectivas	39
	Apêndice A: Demonstração dos Parâmetros Atuais via Cosmografia Utilizando o Modelo ΛCDM	41
	Apêndice B: Demonstração Matemática do <i>Lookback time</i> Cosmográfico	44
	Referências Bibliográficas	49

Lista de Tabelas

2.1	Etapas temporais da RCF no Universo [38].	9
5.1	Parâmetros cosmográficos inferidos a partir de diferentes amostras.	38

Lista de Figuras

2.1	Esquerda: Comparação das medidas de H_0 , com estimativas de erro em $\pm 1\sigma$ a partir de técnicas diferentes. Direita: Probabilidade referente ao valor de H_0 para diferentes análises. Note que o valor mais provável para o parâmetro de Hubble é em torno de $H_0 \simeq 67.3 Mpc/km/s$, como apresentado por <i>Planck Collaboration et. al.</i> em 2013 [31].	6
2.2	Abundância primordial dos elementos leves prevista pelo modelo padrão como uma função da razão bárion - fóton η [33].	7
2.3	Resultados do satélite COBE mostrando que a radiação cósmica de fundo do Universo tem um espectro de corpo negro [36].	8
2.4	Anisotropias da radiação cósmica de fundo, combinando três experimentos recentes [39].	10
2.5	O parâmetro de desaceleração como função do redshift para alguns valores selecionados de Ω_m e ω e $\Omega_r = \Omega_k = 0$ [41].	15
3.1	Esboço qualitativo do comportamento do fator de escala e o raio convergência da série de Taylor em z -redshift [29].	23
3.2	Esboço qualitativo do comportamento do fator de escala e o raio convergência da série de Taylor em y -redshift [29].	24
4.1	Parâmetro de idade como função de ω para alguns valores de Ω_m [53].	32

4.2	Esquerda: Os dados originais obtidos da Ref.[30]. Esta amostra corresponde a 32 galáxias velhas, distribuídas no intervalo de <i>redshift</i> $0.11 \leq z \leq 1.84$, e inclui observações do GDDS [58]; e dados arquivados [59] [60]. Direita: A amostra de dados do <i>LT</i> . Nós combinamos as medidas de idades de 32 galáxias com as estimativas de idade total do Universo, $t_0^{obs} = 13,7 \pm 0.2$ Ganos (1σ), como obtida a partir das medidas recentes da RCF [61] [62].	34
5.1	Esquerda: <i>Lookback Time</i> cosmográfico do Universo em função da parametrização $y - redshift$ até a quarta ordem. Direita: Para efeito comparativo ilustramos o $LT_c(y)$ até a ordem 3. Perceba que, quando $y = 1$, temos a idade total do Universo.	36
5.2	Direita: Comparação entre do <i>Lookback Time</i> cosmográfico e o <i>Lookback Time</i> teórico Λ CDM. Esquerdo: Desvio relativo entre LT_c (para $y = z/(1+z)$) até a quarta ordem e $LT(z)_{\Lambda CDM}$ no intervalo $0 \leq z \leq 1$ representando a metade do tamanho do Universo.	37
5.3	Desvio relativo entre o $LT_c(y)$ cosmográfico e $LT(y)_{\Lambda CDM}$. Esquerda: $LT_c(y)$ de ordem 4. Direita: $LT_c(y)$ de ordem 3. Note que a expansão com mais termos, diferencia menos do modelo usual.	38

Notação e Convenções

- Assinatura da Métrica: (+ - - -);
- Nesta dissertação adotaremos unidades com $c = 1$, onde c é a velocidade da luz no vácuo;
- Expressões em outros idiomas serão escritas em itálico;
- A unidade de distância utilizada é o megaparsec (Mpc):
 $1\text{Mpc} = 3,26 \times 10^6 \text{anos - luz} = 3,09 \times 10^{24} \text{cm}$;
- Utilizamos Ganos ao invés de Bilhões de anos;
- O ponto ($\dot{\cdot}$), denota a derivada em relação ao tempo;
- Conveciona-se o índice 0 para representar parâmetros cosmológicos atuais.

Informação eletrônica

A grande maioria das referências utilizadas neste trabalho podem ser encontradas nos seguintes sítios:

- <http://xxx.lanl.gov>
- <http://www.slac.stanford.edu/spires/hep/>
- http://adsbs.harvard.edu/article_service.html
- <http://www.periodicos.capes.gov.br/>

Capítulo 1

Introdução

O entendimento da origem e evolução do Universo é uma busca incessante que vem atravessando séculos e milênios pelo ser humano. Fato que pode ser encontrado desde os mitos de criação das civilizações mais antigas até a moderna teoria científica do Big Bang. Por conta disso, temos um vasto arcabouço de teorias, modelos e testes, tanto observacionais como teóricos, cujo intuito é responder perguntas frequentemente encontradas no mundo científico tais como: “de que é feito o Universo?”, “o Universo é finito ou infinito?”, etc. Tais preocupações parecem inerentes à própria condição humana.

Neste contexto, a Cosmologia se estabelece como a área da Física que investiga a origem, estrutura e evolução do Universo. Seu principal objetivo consiste em determinar um modelo cosmológico que prevê os resultados das observações astronômicas. Como em todo ramo teórico da Física, a construção dos modelos exige uma condição inicial, ou hipótese que denominamos princípio. Na Cosmologia Padrão (CP) temos a Teoria da Relatividade Geral (TRG) como ponto de partida e o princípio cosmológico (PC), onde se adota que o Universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas.

Essa teoria pós-Newtoniana tem um conjunto de equações Mestre, equações de Albert Einstein de 1915, que descrevia um universo estático, concepção mais aceita em seu período de formulação. Um universo estático poderia ser descrito pelas Equações de Einstein por meio da inserção de uma constante, um artifício matemático, chamado por Einstein de Constante Cosmológica (geralmente denotada pela letra Λ). Esta constante atua como uma força repulsiva que compensa a força puramente atrativa produzida pelo conteúdo energético do

Universo. Desta maneira, ele pode obter uma solução do Universo estático¹ requerido pelas observações da época [2].

Em 1922, Alexander Friedmann, baseado nas hipóteses de homogeneidade e isotropia, propôs soluções para as Equações da TRG que resultaram em modelos de Universos expansionistas, sem que fosse necessário o termo cosmológico [3]. Na mesma década, Einstein revogou o uso da constante cosmológica, devido a novas descobertas como a de Hubble e Humason, de que a velocidade de recessão de uma determinada galáxia é proporcional à sua distância em relação à Terra, mostrando dessa forma que o Universo está em expansão [4, 5]. Einstein chegou a comentar, que a introdução da constante Λ nas suas equações foi o maior erro de sua vida [6].

Na década de 30, foi observado que as medidas das curvas de rotação de galáxias espirais [7], assim como outros diversos experimentos astronômicos, sugeriam que a matéria luminosa que observamos representa apenas uma pequena parcela das partículas massivas do Universo e que a quantidade mais significativa é relacionado à chamada matéria escura.

Mais recentemente algumas observações, tais como, medidas de distâncias de Supernovas do tipo Ia (SNe Ia) em *redshifts* intermediários e altos [8, 9], medidas das anisotropias da Radiação Cósmica de Fundo (RCF) [10]-[12], observações de estruturas de grandes escalas (EGE) no Universo [13, 14], estimativas da idade de objetos antigos [15]-[18], observações de aglomerados de galáxias [19], dentre outros, indicam que o nosso o Universo é \simeq plano, composto de $\simeq 1/4$ de matéria (escura + bariônica) e vem passando por uma fase de expansão acelerada [8, 20]; a natureza da entidade responsável por este efeito expansivo denominada energia escura (EE) ou quintessência, para modelos baseado na TRG, ainda permanece desconhecida. A explicação mais simples para a aceleração do Universo é dada por uma constante cosmológica [21], que fita muito bem os dados observacionais atuais, embora apresente alguns importantes problemas não resolvidos, como por exemplo, o problema da constante cosmológica e da coincidência cósmica [22]-[25].

Outro problema desafiador para a Cosmologia é a estimativa de parâmetros cosmológicos atuais. Estes, podem ser determinados a partir de diferentes tipos de observações,

¹É necessário enfatizar que esse Universo era instável, pois a menor diferença entre o termo atrativo e o repulsivo causaria um colapso ou uma expansão no Universo dependendo de qual termo dominasse [1].

que são fortemente dependentes de modelos teóricos. Diante desse dilema, a possibilidade de restringir parâmetros cosmológicos e descrever a dinâmica do Universo a partir de um método independente de modelos, torna-se uma tentativa importante e interessante.

Nesta dissertação, seguindo a metodologia apresentada por Weinberg em 1972 [26], discutimos como a cosmografia² e estimativas de idades de galáxias em altos- z inferem parâmetros utilizados para descrever o Universo recente. A nossa maior precaução foi nos restringirmos de qualquer tipo de modelo teórico e utilizar somente parâmetros cosmológicos atuais, para a descrição do Universo. Para tal, recorreremos à expansão matemática do *Lookback Time* em termos destes parâmetros e em função do $z - redshift$. Devido a um problema de convergência encontrado no fator de escala $a(z)$, utilizamos uma parametrização conhecida como $y - redshift$ [29], onde mudamos sua variável sem diferenciar seus conceitos, suas informações matemáticas e físicas. Utilizamos a estatística Bayesiana para comparar o *Lookback Time* cosmográfico com dados do *Lookback Time* observados e simulados e, desta forma, impor vínculos aos parâmetros H_0 , q_0 , j_0 e s_0 . Finalmente, comparamos estes resultados com os do modelo Λ CDM. É neste cenário que se inclui o desenvolvimento do presente trabalho.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: No segundo Capítulo, fazemos uma breve revisão da Cosmologia Padrão. No Capítulo três, apresentamos as expressões cosmográficas dos principais observáveis cosmológicos [30]. No penúltimo Capítulo, obtemos o *Lookback Time* teórico e a expressão do *Lookback Time* cosmográfico. Com intuito de facilitar uma eventual consulta por parte de pesquisadores interessados nos assuntos aqui tratados, mencionamos que as demonstrações matemáticas do presente trabalho encontram-se nos Apêndices A e B. Nossas conclusões, e perspectivas de trabalhos futuros visando complementar as análises aqui desenvolvidas são apresentadas no último Capítulo.

Nossos principais resultados, conclusões e perspectivas de trabalhos futuros visando complementar as análises aqui desenvolvidas são apresentadas nos dois últimos Capítulos desta dissertação.

²Para uma revisão detalhada da Cosmografia, veja as referências [27, 28].

Capítulo 2

Cosmologia Padrão

O modelo cosmológico padrão baseia-se no PC e na TRG. Neste cenário, o Universo se expande adiabaticamente a partir de uma singularidade, um estado inicial extremamente denso e quente (Big Bang), até o presente estágio, tem uma idade de aproximadamente 13,7 bilhões de anos e uma geometria espacial aproximadamente plana. As evidências observacionais que apoiam esse modelo são: a recessão de galáxias, a nucleossíntese primordial e a RCF.

2.1 Lei de Hubble

Uma das principais constatações em relação as observações cosmológicas é que quase tudo no Universo parece estar se afastando da Terra, e quanto mais longe está um objeto, maior será sua velocidade de recessão. Esta velocidade é medida pelo desvio para o vermelho z (*redshift*) e, de acordo com o efeito Doppler, é dada por:

$$z = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} \approx \frac{v}{c}, \quad (2.1)$$

onde λ_o é o comprimento de onda observado e λ_e é o comprimento de onda emitido pela fonte.

Em 1929, observações do astrônomo Edwin Hubble revelaram que a velocidade de recessão das galáxias, \vec{v} , em relação à Terra é diretamente proporcional a distância que as separam de nós, \vec{r} . Isto deu origem à chamada lei de Hubble:

$$\vec{v} = H_0 \vec{r}, \quad (2.2)$$

onde H_0 é o parâmetro de Hubble, cujo valor atual é $H_0 = 67,3 \pm 1,2 \frac{km}{s} / Mpc$ [31]¹. A Fig.(2.4) apresenta os dados experimentais que confirmam este valor [31].

A lei de Hubble permite a introdução de um sistema de coordenadas, \vec{x} , que acompanha a expansão do Universo, denominado de coordenadas comóveis:

$$\vec{r} = a(t)\vec{x}. \quad (2.3)$$

Como a expansão do Universo aparenta ser uniforme, relacionamos a distância real \vec{r} com a distância comóvel \vec{x} , sendo que as galáxias estão em posições fixas nas coordenadas comóveis. A função $a(t)$ é o fator de escala do Universo. Usualmente convencionou-se que o fator de escala na presente época, $t = t_0$, é unitário, ou seja, $a(t_0) = a_0 = 1$. Combinando as equações (2.2) e (2.3), é possível escrevermos a lei de Hubble em termos do fator de escala:

$$\vec{v} = \frac{|\dot{\vec{r}}|}{|\vec{r}|} \vec{r} = \frac{\dot{a}}{a} \vec{r}. \quad (2.4)$$

Definindo então o parâmetro de Hubble como:

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.5)$$

Podemos relacionar o fator de escala com o *redshift* apresentado na Eq.(2.1) da seguinte forma:

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \frac{1}{a(t_e)}, \quad (2.6)$$

onde utilizamos $a_0 = 1$.

Este resultado enfatiza que a medida que o Universo se expande os comprimentos de onda aumentam em proporção direta. Por exemplo, se observarmos um comprimento de onda duplicado em relação ao esperado, o Universo deveria ter metade do tamanho atual quando a luz foi emitida.

Embora em grandes escalas o Universo seja preenchido por galáxias e essas, por sua vez se distribuam em grupos que podem conter milhões de galáxias, as observações indicam que em escalas de distância ainda maiores que $100 Mpc$, o Universo é homogêneo e isotrópico satisfazendo assim o princípio cosmológico², a hipótese básica da Cosmologia Moderna.

¹Isto significa, por exemplo, que uma galáxia distante da Terra de $100 Mpc$ tem uma velocidade de recessão de aproximadamente $6730 km/s$.

²Em uma escala suficientemente grande, as propriedades do Universo são as mesmas para todos os observadores.

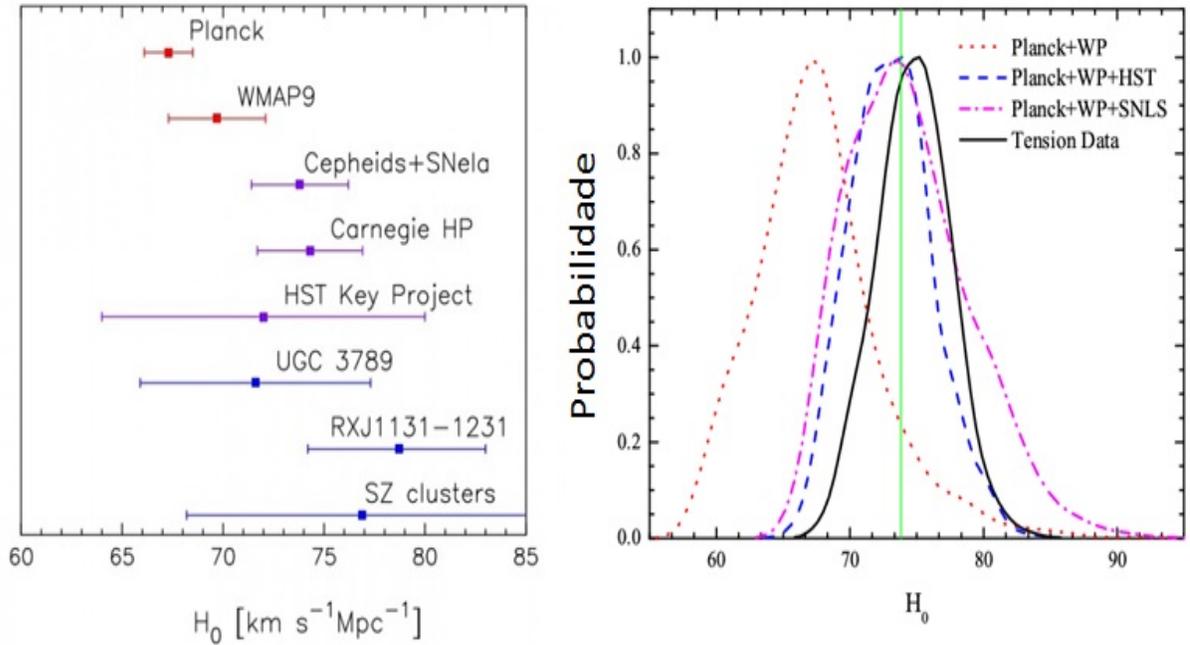


Figura 2.1: **Esquerda:** Comparação das medidas de H_0 , com estimativas de erro em $\pm 1\sigma$ a partir de técnicas diferentes. **Direita:** Probabilidade referente ao valor de H_0 para diferentes análises. Note que o valor mais provável para o parâmetro de Hubble é em torno de $H_0 \simeq 67.3 \text{Mpc}/\text{km}/\text{s}$, como apresentado por *Planck Collaboration et. al.* em 2013 [31].

2.2 Nucleosíntese Primordial

Quando o Universo era muito mais quente e mais denso, e sua temperatura era da ordem de um MeV/k_B , não haviam átomos neutros ou núcleos ainda ligados. A grande quantidade de radiação em um ambiente tão quente asseguraria que qualquer átomo ou núcleo seria imediatamente destruído por um fóton de alta energia. Nesta época, o Universo primordial era constituído por um plasma fortemente ionizado onde ocorriam várias reações termonucleares responsáveis pela síntese dos elementos leves (Deutério, Hélio-3, Hélio-4 e Lítio-7). A medida que o Universo foi se expandindo e sua temperatura diminuiu correspondendo à valores de energias abaixo das energias de ligação dos núcleos típicos, elementos leves começaram a se formar.

Na década de 40, Gamow *et al.* calcularam a concentração desses elementos em relação a quantidade de Hidrogênio ordinário [32]. Na Fig.(2.2), observamos que todas as

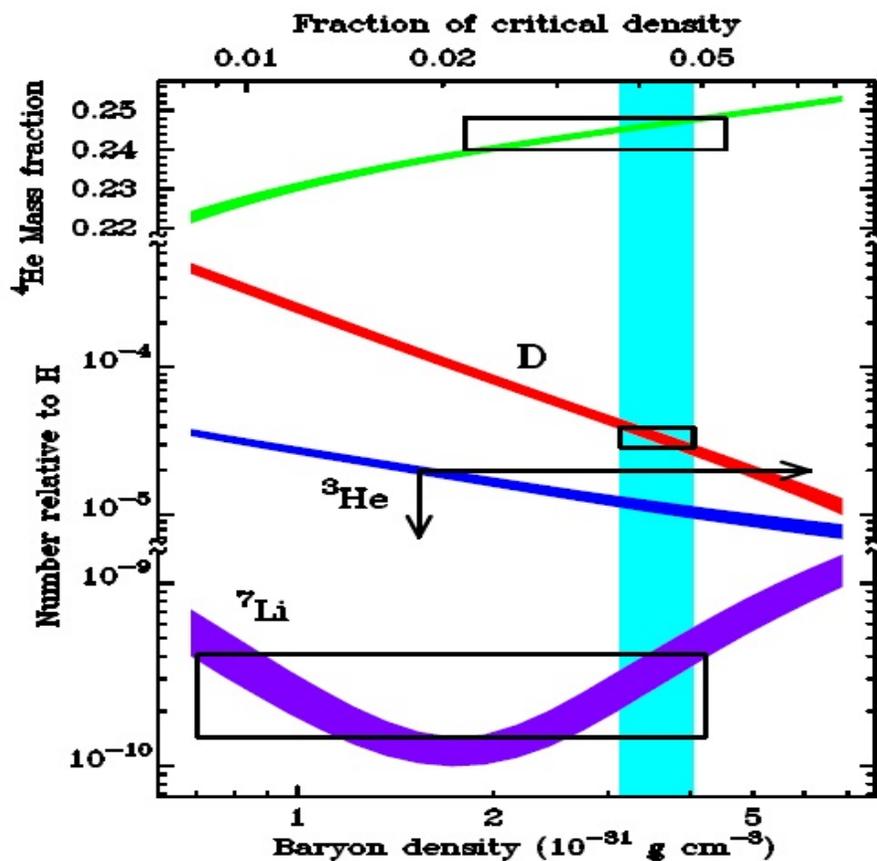


Figura 2.2: Abundância primordial dos elementos leves prevista pelo modelo padrão como uma função da razão bárion - fóton η [33].

abundâncias relativas dependem de um parâmetro simples, a razão bárion - fóton (η). A faixa vertical mostra a região de concordância das observações das abundâncias de 4 núcleos. Note que, tal concordância localiza-se numa faixa bastante estreita para estes núcleos implicando em $\Omega_b h^2 \approx 0.02$ [33], o que concorda com as previsões teóricas para a densidade de matéria bariônica. De maneira geral, esses cálculos teóricos prevêem que cerca de um quarto da matéria bariônica do Universo consiste em Hélio-4, um resultado que está de acordo com as estimativas para esse elemento derivada de observações em regiões H_{II} [34]. Os elementos mais pesados, dos quais nós somos constituídos, foram sintetizados mais tarde nos interiores estelares e ejetados para o espaço em processo astrofísicos [34, 35].

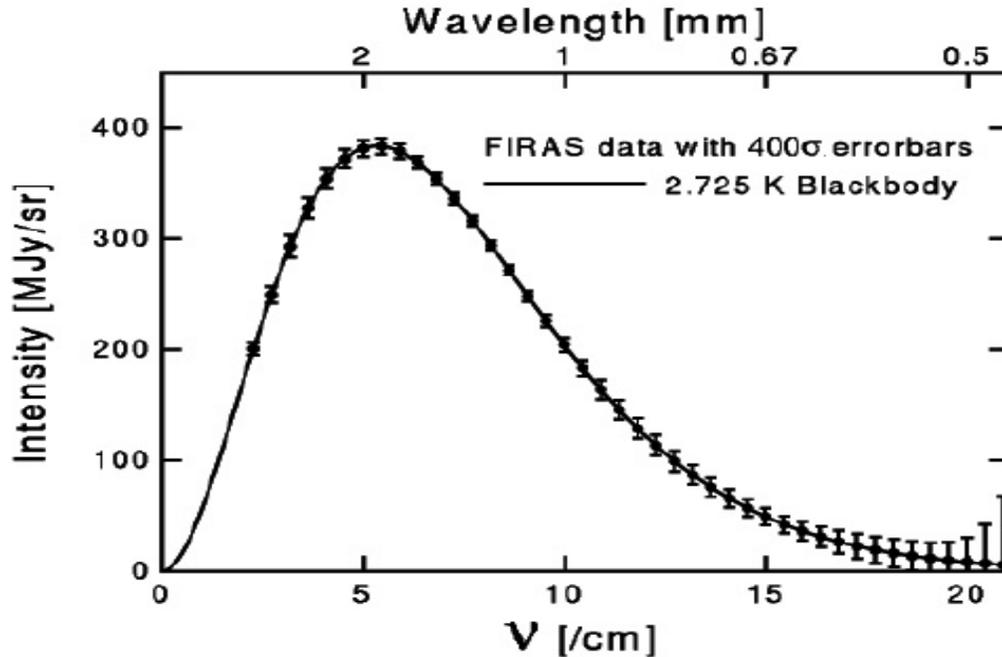


Figura 2.3: Resultados do satélite COBE mostrando que a radiação cósmica de fundo do Universo tem um espectro de corpo negro [36].

2.3 Radiação Cósmica de Fundo - RCF

A evolução do Universo deixou resquícios que podemos detectar hoje e assim testar o MCP. Pode-se dizer que encontrar os fósseis deixados por esta evolução é um tipo de arqueologia cósmica. Nos concentraremos em um desses “fósseis”, que foram decisivos para determinar o sucesso do MCP: a radiação cósmica de fundo, detectada pela primeira vez pelos físicos norte-americanos Robert Wilson e Arno Penzias [36].

A medida que o Universo foi se expandindo, o plasma esfriou até que foi possível os elétrons combinarem-se com os núcleos atômicos de hidrogênio e hélio para formarem átomos. Como comentado na seção anterior, isso aconteceu quando o Universo tinha uma temperatura de $\approx 3000K$, que corresponde a uma idade de 380 000 ($z \approx 1088$). A partir desse momento, os fótons puderam viajar livremente pelo espaço conservando seu espectro planckiano, uma vez que o único efeito da expansão é diminuir a sua temperatura. Esse processo é chamado de desacoplamento e a RCF traz consigo a assinatura de como era o

Evento	z	$T(K)$	$t(10^6)$ anos
Igualdade matéria-radiação	3570	9730	0.047
Recombinação	1370	3740	0.24
Desacoplamento	1100	3000	0.35
Último espalhamento	1100	3000	0.35

Tabela 2.1: Etapas temporais da RCF no Universo [38].

Universo naquela época. Essa previsão foi realizada em 1948 por Gamow e colaboradores. Pouco menos de duas décadas mais tarde, esse “eco” do *Big Bang* foi detectado por uma grande antena de comunicação nos laboratórios Bell, nos Estados Unidos. A RCF é um dos melhores exemplos de corpo negro que existe, com a distribuição de radiação seguindo a lei de Planck com uma temperatura efetiva de $2,73 K$ e com erros estimados na casa dos mK [37] [ver Fig.(2.3)]. O instante no tempo em que a densidade numérica de íons é igual a densidade numérica de átomos neutros é denominado de recombinação. A época do desacoplamento é o momento em que a taxa de espalhamento entre fótons e elétrons, torna-se menor do que o parâmetro de Hubble. Nesta época, os fótons param de interagir com os elétrons e o Universo torna-se transparente. Por fim, a época do último espalhamento, o momento em que um fóton típico da RCF passa por seu último espalhamento por um elétron passando a viajar livremente através do espaço. Uma vez que o taxa de expansão do universo nesta época é maior do que a taxa de espalhamento, a época do último espalhamento é muito próxima da época do desacoplamento [38]. Para uma melhor interpretação dos eventos temporais relacionados à RCF, veja a Tab.(2.1).

Para podermos extrair informações dos mapas da radiação cósmica de fundo, precisamos nos valer de algumas ferramentas estatísticas. Uma destas ferramentas nos possibilita compor um espectro que representa a amplitude das flutuações em função da escala angular, conforme mostra a Fig.(2.4) [39]. Os picos estão relacionados com as chamadas oscilações acústicas no plasma, e podemos associá-los com os modos harmônicos desta oscilação. O primeiro pico representa o harmônico fundamental - a maior onda que poderia aparecer no meio - que define o tamanho do Universo observável ou escala angular do horizonte. Os outros picos estão ligados aos outros harmônicos. A linha sólida corresponde ao modelo

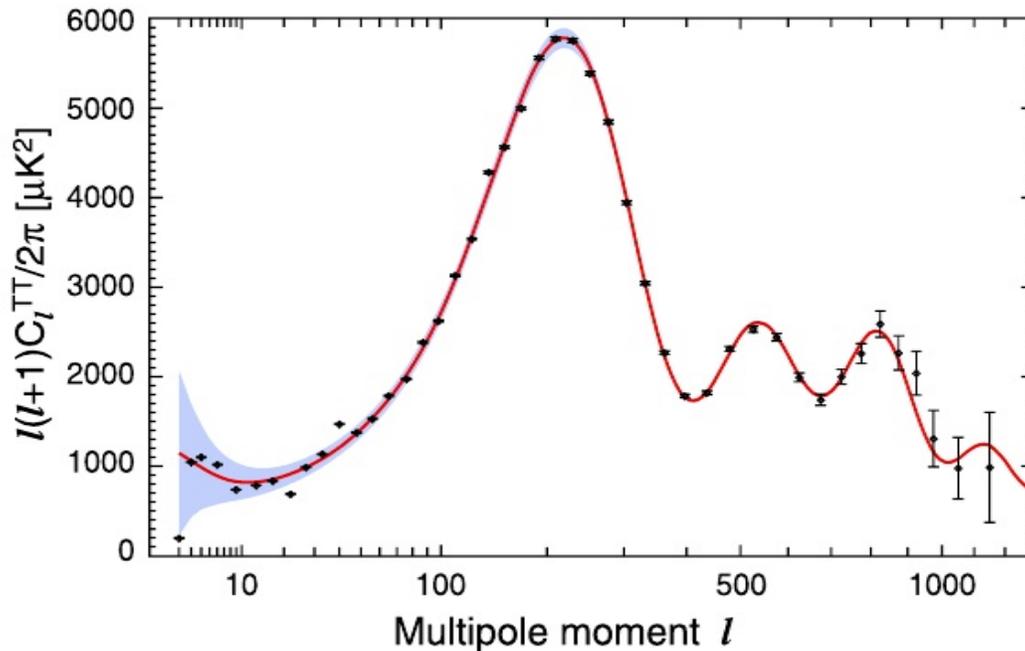


Figura 2.4: Anisotropias da radiação cósmica de fundo, combinando três experimentos recentes [39].

Λ CDM enquanto que as barras de erros, referente aos dados, indicam o erro observacional. A região sombreada indica a incerteza dominante em grandes escalas [40]. A consequência do desacoplamento matéria-radiação é que podemos determinar algumas das quantidades fundamentais do Universo (idade, composição e geometria) com base na largura, altura e posição dos picos.

2.4 Dinâmica do Universo

A métrica mais geral, satisfazendo o PC, pode ser apresentada em coordenadas esféricas (r, θ, φ) da seguinte forma

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right], \quad (2.7)$$

que é conhecida como métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). k representa a curvatura espacial do Universo e pode ter os seguintes valores: -1, 0 e 1, correspondendo as geometrias do tipo hiperbólica, plana e esférica, respectivamente.

A métrica de FLRW está escrita num sistema coordenado comóvel. Tal sistema está fixo nas partículas (galáxias) do fluido cósmico, desse modo, acompanhando a expansão do Universo, com suas coordenadas sendo reescaladas pelo fator de escala a cada instante t .

Como já foi comentado no capítulo anterior, o Universo pode ser descrito pelas equações de campo de Einstein [26], que é dada por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

onde o lado esquerdo da equação acima é composto pelos tensores de Ricci $R_{\mu\nu}$, métrico $g_{\mu\nu}$ e o lado direito desta, corresponde ao tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$, que ainda devemos especificar.

Consideremos as fontes de campo gravitacional do Universo como um fluido do tipo perfeito, então o tensor energia-momento que o representa, tem a forma

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)v_{\mu}v_{\nu} - pg_{\mu\nu}, \quad (2.9)$$

onde p , ρ e v_{μ} são a pressão, densidade de energia e a quadri-velocidade das partículas do fluido, respectivamente.

Para um universo homogêneo e isotrópico preenchido por um fluido perfeito as equações de movimento (2.8) são

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (2.10)$$

e

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -8\pi Gp - \frac{k}{a^2}, \quad (2.11)$$

que são conhecidas como as equações de Friedmann. A partir dessas equações obtemos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \quad (2.12)$$

denominada equação de aceleração. Para resolver estas equações de campo, ainda precisamos saber como ρ e p evoluem com o tempo. A conservação do tensor de energia momento, $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}$, nos dá

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0, \quad (2.13)$$

que é chamada de equação do fluido.

A fim de resolver a Eq.(2.13), é preciso foramar as equações de estado dos constituintes do Universo. Supondo que o Universo é constituído por um fluido barotrópico a equação de estado de um dado componente é dado por:

$$p_i = \omega_i \rho_i, \quad (2.14)$$

onde o parâmetro da equação de estado, ω_i , especifica a natureza do constituinte. Para o caso geral, em que $\omega = \omega(z)$, as equações (2.14) e (2.13) fornecem

$$\rho(z) = \rho_0 \exp \left\{ \int_1^{\frac{1}{1+z}} 3[1 + \omega(z')] d[\ln(1 + z')] \right\}. \quad (2.15)$$

Para o caso em que $\omega = \text{constante}$, a Eq.(2.15) pode ser facilmente integrada, resultando em

$$\rho \propto a^{-3(\omega+1)}. \quad (2.16)$$

Os casos mais comuns são, $\omega = 1/3$, $\omega = 0$ e $\omega = -1$, que correspondem a radiação, matéria e vácuo quântico, respectivamente. Supondo que os constituintes do Universo não interagem entre si, cada um deles satisfaz à Eq.(2.13) separadamente. Para a matéria, ($p_m = 0$), temos a solução

$$\rho_m \propto a^{-3}; \quad (2.17)$$

para a radiação, $p_r = \rho_r/3$, obtemos que

$$\rho_r \propto a^{-4}; \quad (2.18)$$

e para a energia de vácuo, $p_v = -\rho_v$, temos que

$$\rho_v = \text{constante}, \quad (2.19)$$

que está relacionada à constante cosmológica.

Assumindo agora uma geometria espacialmente plana a Eq.(2.10) toma a seguinte forma

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho. \quad (2.20)$$

Resolvemos facilmente essa equação para as épocas em que a densidade de energia da matéria domina sobre a densidade de energia da radiação e vice-versa, ou seja, para a era dominada pela matéria, temos,

$$a(t) \propto t^{2/3}, \quad (2.21)$$

e para a era dominada pela radiação, obtemos

$$a(t) \propto t^{1/2}. \quad (2.22)$$

Quando $t \rightarrow \infty$, $a \rightarrow 0$ e, conseqüentemente, $\rho \rightarrow \infty$, caracterizando uma singularidade inicial.

A densidade crítica, ρ_c , é definida como a densidade necessária para que a constante de curvatura, k , se torne nula correspondendo a um universo espacialmente plano, ou seja,

$$\rho_c = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}. \quad (2.23)$$

Na presente época, $H_0 \approx 67.3 \text{ Mpc km}^{-1}/\text{s}$ a densidade crítica é da ordem de 10^{-26} kg/m^3 . A partir do valor da densidade crítica obtido observacionalmente, podemos inferir se o Universo é fechado ou aberto. Se $\rho > \rho_c$, temos um Universo fechado (geometria esférica), e se $\rho < \rho_c$, o Universo é aberto (geometria hiperbólica).

Define-se o parâmetro de densidade Ω_i por

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}, \quad (2.24)$$

onde i expressa a densidade correspondente a cada constituinte do Universo que está sendo considerado. A definição do parâmetro de densidade expressa uma comparação entre uma dada densidade, relacionada a algum constituinte, com a densidade crítica.

A partir das equações (2.10) e (2.11), podemos escrever

$$\Omega_{total} = 1 + \frac{k}{a^2 H^2}, \quad (2.25)$$

onde Ω_{total} denota o parâmetro de densidade total do Universo (a soma das densidades de todos os constituintes). Se $k = 0$, $\Omega_{total} = 1$, se $k = -1$, $\Omega_{total} < 1$ e se $k = 1$, $\Omega_{total} > 1$.

Uma outra grandeza importante é o parâmetro desaceleração, relacionado à variação da taxa de expansão do Universo com o tempo. O parâmetro de desaceleração q é definido por

$$q = -\frac{1}{H^2} \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{1}{2} + \frac{3p}{2\rho}. \quad (2.26)$$

Dessa definição, vemos que q tem valor positivo para um Universo desacelerado e um valor negativo para um Universo acelerado. Além disso, o parâmetro de desaceleração depende da densidade ρ e da pressão p de todos os constituintes do Universo. A definição de q foi introduzida como o negativo da aceleração porque a matéria usual é sempre atrativa. Na Fig.(2.5), mostramos o parâmetro de desaceleração como função do *redshift* para alguns valores selecionados de Ω_m e ω e $\Omega_r = \Omega_k = 0$. Note que para altos *redshifts* a expansão do Universo é desacelerada, enquanto que para baixos *redshifts* o Universo passou a expandir com uma taxa acelerada.

Também é interessante apresentar uma relação bastante utilizado pela astronomia observacional que é a diferença de magnitudes μ_0 , definido como a diferença entre a magnitude bolométrica aparente m e a magnitude absoluta M , de uma determinada fonte³. A expressão para μ_0 é dada por

$$\mu_0 = m - M = 25 + \log_{10} d_L, \quad (2.27)$$

onde d_L é a distância de Luminosidade, definida por

$$d_L = (1 + z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (2.28)$$

Outra relação importante, que pode ser expressada em termos dos parâmetros cosmológicos definidos acima, é a relação entre a idade cósmica e o *redshift* z ,

$$t(z) = \int_0^z \frac{dz'}{(1 + z')H(z')}. \quad (2.29)$$

Na seção (4.1) do Cap.4, esta relação entre a idade e $H(z)$ será melhor detalhada.

³Na Cosmologia, geralmente utiliza-se Supernovas do tipo Ia devido a sua composição apresentar metais mais pesados. O que caracteriza um dos objetos mais antigos do Universo.

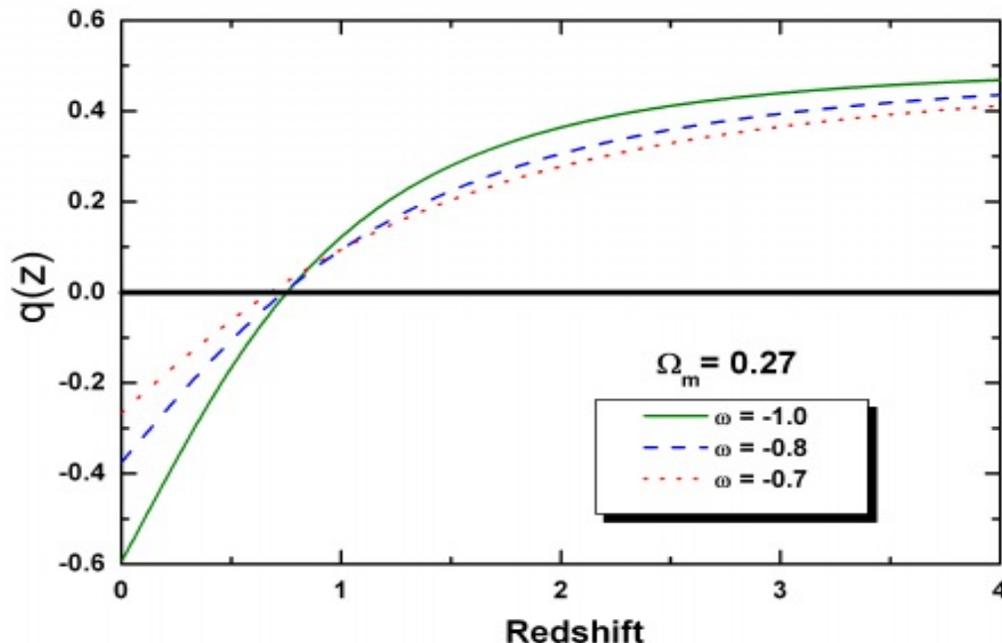


Figura 2.5: O parâmetro de desaceleração como função do redshift para alguns valores selecionados de Ω_m e ω e $\Omega_r = \Omega_k = 0$ [41].

2.5 Inflação Cósmica

Na seção anterior, discutimos sobre as épocas de radiação, matéria e vácuo e suas respectivas evoluções temporais. Notamos que para $t \rightarrow \infty$ impõe limitações sobre épocas anteriores, que até agora, só podemos especular. Essas especulações têm-se centrado na ideia de que, antes do período de domínio da radiação, durante o qual o fator de escala $a(t)$ foi crescendo como \sqrt{t} , houve um período anterior, o período da inflação, quando a densidade de energia do Universo era dominada por uma energia do vácuo variando lentamente implicando em uma evolução exponencial de $a(t)$ ⁴.

Esse modelo de universo proposto em 1979 [45] e modificado posteriormente [46, 47], é consistente com algumas das formas das Teorias da Grande Unificação (GUT) das forças forte e eletrofraca, que prevêem uma quebra de simetria espontânea nos primeiros momentos

⁴A possibilidade de uma expansão exponencial tinha sido observado por vários autores [42]-[44] no último quarto do século passado, mas a princípio ela atraiu pouca a atenção.

do *Big Bang*. Essa quebra de simetria, ou transição de fase, é causada por um falso vácuo⁵, que, tendo pressão negativa, faz a gravitação agir repulsivamente. O resultado é que esta pressão negativa do falso vácuo afeta fortemente a expansão do Universo porque, de acordo com a RG, tanto a densidade de energia como a pressão são fontes de inércia. Esse processo de expansão súbita altera o fator de escala do Universo, ou seja, utilizando a Eq.(2.12) e a relação $p_v(t) = -\rho_v(t)$, obtemos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_v - 3p_v) \Leftrightarrow \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi G}{3}\rho_v,$$

$$\frac{d^2 a(t)}{dt^2} = H_I^2 a(t). \quad (2.30)$$

A solução da equação acima é dada pela expressão

$$a(t) = a_I e^{t/\tau_I} = a_I e^{H_I t}, \quad (2.31)$$

em que a_I representa o valor do fator de escala no início do processo de expansão inflacionária, e H_I o parâmetro de Hubble que se manterá constante durante essa fase. Esse processo ocorre durante uma escala de tempo τ_I , determinada pela expressão

$$\tau_I = H_I^{-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi G \rho_v}}. \quad (2.32)$$

2.6 Sumário

Neste capítulo, apresentamos os 3 pilares observacionais que sustentam a Cosmologia Padrão, a Lei de Hubble, a RCF e a Nucleosíntese Primordial. Revisamos também os principais conceitos e as equações básicas do MCP incluindo a era inflacionária. No capítulo a seguir, apresentaremos a metodologia deste trabalho denominada de Cosmografia, que abrange de forma geral a representação de distâncias utilizando expansões matemáticas.

⁵Tratamento teórico utilizando Teoria Quântica de Campos o que não será abordado neste trabalho.

Capítulo 3

Cosmografia

A cosmografia, cosmocinética é uma abordagem cinemática para descrever a evolução do Universo. Ela é bastante interessante por sua característica distinta de não depender de qualquer teoria dinâmica da gravidade ou modelos de energia escura. Isto a torna crucial por sua potencial capacidade de distinguir modelos cosmológicos quando uma enxurrada de modelos de energia escura e teorias de gravidade modificadas são propostas para explicar a expansão acelerada do universo atual. Em geral, através da expansão de Taylor do fator de escala $a(t)$ em termos de tempo cósmico t , coeficientes adimensionais são definidos. Por conveniência, eles são conhecidos como parâmetros cosmográficos. Estes parâmetros cosmográficos cujo os valores atuais podem ser determinados por observações cosmológicas, descrevem o estado cinemático do Universo [26].

3.1 Fundamentos de Cosmografia

A cosmografia representa um critério de seleção para discriminar qual o modelo se comporta melhor do que outros quando comparado com os dados observacionais [48]. Na verdade, todos os testes numéricos dependem da escolha do modelo analisado, levando a um forte problema de degenerescência. Para resolver este problema de degenerescência é preciso introduzir procedimentos independentes de modelo para distinguir os cenários cosmológicos. Um caminho interessante para resolver o problema de degenerescência é levar em conta as quantidades cosmológicas que podem ser inferidas sem a necessidade de postular um modelo *a priori*. A cosmografia foi amplamente discutida pela primeira vez por Weinberg e, em seguida foi estendida na literatura com o passar do tempo [27, 28].

O núcleo da cosmografia é assumir somente a validade do princípio cosmológico, sem quaisquer outras hipóteses sobre as equações de Einstein. Em outras palavras, uma vez que a métrica de FLRW é envolvida, é possível obter a partir da cosmografia limites no Universo observável, por meio de medidas diretas da expansão observada em termos de $a(t)$. Portanto, escrevendo a métrica de FLRW da seguinte forma:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right], \quad (3.1)$$

podemos obter o quanto de energia escura ou componentes alternativos são necessárias para garantir observações atuais, sem postular qualquer modelo cosmológico no início de nossas análises. A ideia é relacionar as expansões cosmográficas aos parâmetros livres de um determinado modelo.

Assim, podemos avaliar quais os modelos se comportam muito bem e quais são desfavorecidos, como consequência de não satisfazer as exigências básicas introduzidas pela cosmografia. Geralmente, nos referimos a cosmografia como parte da Cosmologia que tenta inferir quantidades cinemáticas, mantendo apenas a geometria proposta pela métrica de FLRW. Para uma revisão mais detalhada veja a referência [49].

Nosso ponto de partida é a expansão em série de Taylor do fator de escala $a(t)$:

$$a(t) = a_0 \left[1 + \frac{\dot{a}_0}{a_0}(t - t_0) + \frac{1}{2!} \frac{\ddot{a}_0}{a_0}(t - t_0)^2 + \frac{1}{3!} \frac{\dddot{a}_0}{a_0}(t - t_0)^3 + \frac{1}{4!} \frac{\dddot{\ddot{a}}_0}{a_0}(t - t_0)^4 + \dots \right]. \quad (3.2)$$

Convencionalmente a série é interrompida na ordem de interesse. Aqui iremos até a quarta ordem. Supomos $t - t_0 > 0$, a fim de obter a causalidade de observações cosmológicas. Podemos reescrever a equação acima na forma:

$$a(t) = a_0 \left[1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2!} q_0 H_0^2(t - t_0)^2 + \frac{1}{3!} j_0 H_0^3(t - t_0)^3 + \frac{1}{4!} s_0 H_0^4(t - t_0)^4 + \dots \right], \quad (3.3)$$

com as seguintes definições

$$H \equiv \frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.4)$$

$$q \equiv -\frac{1}{aH^2} \frac{d^2a}{dt^2} = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}, \quad (3.5)$$

$$j \equiv \frac{1}{aH^3} \frac{d^3a}{dt^3} = \frac{\ddot{\ddot{a}}a^2}{\dot{a}^3} \quad (3.6)$$

e

$$s \equiv \frac{1}{aH^4} \frac{d^4a}{dt^4} = \frac{\ddot{\ddot{\ddot{a}}}a^3}{\dot{a}^4}. \quad (3.7)$$

A Eq.(3.4) representa a primeira derivada em relação ao tempo do logaritmo do fator de escala, enquanto o parâmetro de desaceleração, q , indica se o Universo está atualmente acelerado ou não. Um universo acelerado fornece $-1 \leq q_0 \leq 0$. A variação do parâmetro desaceleração¹, ou seja, o parâmetro *jerk*, j , se positivo, indicaria que q mudou o sinal no passado, em um *redshift* de transição, correspondendo a $q = 0$. Finalmente, s_0 indica se j mudou de sinal com a expansão do Universo. Se for negativo, o parâmetro *jerk* permanece com o mesmo sinal de seu atual valor, veja a referência [49].

Com base no que foi discutido acima, podemos obter uma expressão da distância de luminosidade, d_L , expandida em série em torno de $z = 0$. Considerando a expressão para a distância de luminosidade e adotando que a distância radial comóvel é

$$r = \int_0^z \frac{du}{H(u)}, \quad (3.8)$$

a expressão que representa d_L (para um universo plano) será dada por:

$$d_L = (1+z) \int_0^z \frac{du}{H(u)}, \quad (3.9)$$

Expandindo a distância de luminosidade em torno de $z = 0$, obtemos [50]

$$d_L = d_H \left[z - \frac{1}{2}(-1+q_0)z^2 + \frac{1}{6}(-1+q_0+3q_0^2-j_0)z^3 + \frac{1}{24}(2-2q_0-15q_0^2-15q_0^3+10q_0j_0+5j_0+s_0)z^4 + O(z^5) \right], \quad (3.10)$$

onde $d_H = c/H_0$ é a distância de Hubble.

¹Para os modelos de energia escura com $\omega = \text{constante}$, temos $q_0 = \frac{1}{2}[1 - 3\omega(\Omega_m - 1)]$. Os cenários em que $\omega = -1$ e $\omega = 0$ nos fornece $q_0 = -1$ ($\Omega_\Lambda = 1 \leftrightarrow \Omega_m = 0$, modelo Einstein-De Sitter) e $q_0 = 0.5$ ($\Omega_\Lambda = 0 \leftrightarrow \Omega_m = 1$, modelo De Sitter), respectivamente. Note que no primeiro cenário não temos uma transição de fase desacelerado-acelerado. Portanto, o parâmetro de desaceleração, por definição, varia entre $-1 \leq q_0 \leq 0$.

3.2 Outras Distâncias de Interesse Físico na Cosmografia

Na cosmologia, existem muitas definições de distância entre dois objetos ou eventos, que são diretamente observável ou não. A partir da distância de luminosidade d_L podemos encontrar outras distâncias de interesse físico na Cosmologia, como a:

distância de fluxo de fótons:

$$d_F = \frac{d_L}{(1+z)^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.11)$$

A distância de fluxo de fótons, d_F , é baseada no fato de que muitas vezes é tecnicamente mais fácil contar o fluxo de fótons (fótons/segundos) do que medir bolometricamente a energia total (potência) depositada no detector. Se estamos contando o número de fluxo de fótons, ao invés de fluxo de energia, então o fluxo do número de fótons contém menos um fator de $(1+z)^{-1}$. Convertido para um estimador de distância, a distância do fluxo de fótons contém um elemento adicional $(1+z)^{-\frac{1}{2}}$ em comparação com a (base de potência) distância de luminosidade [29].

A distância de contagens de fótons:

$$d_P = \frac{d_L}{(1+z)}. \quad (3.12)$$

A distância de contagem de fótons, d_P , está relacionada com o número de fótons absorvidos sem levar em conta a velocidade com que chegam. Assim, a distância de contagem de fótons contém um elemento adicional $(1+z)^{-1}$ em relação à distância de luminosidade.

A distância de desaceleração;

$$d_Q = \frac{d_L}{(1+z)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.13)$$

A distância de desaceleração d_Q , é uma quantidade ainda não denominada, ou seja, parece não ter qualquer interpretação física direta e simples².

A distância de diâmetro angular;

$$d_A = \frac{d_L}{(1+z)^2}. \quad (3.14)$$

²Como neste trabalho, não estamos interessados em testes de distâncias, não nos aprofundamos em conceitos de algumas distâncias utilizadas em Cosmologia observacional.

A quantidade d_A , é a definição de Weinberg da distância de diâmetro angular [26], correspondendo ao tamanho físico do objeto quando a luz foi emitida, dividindo pelo seu diâmetro angular atual no céu. Isto difere da definição de Peebles [51], que corresponde a qual tamanho o objeto teria na época cosmológica recente se continuasse a mover-se com expansão cosmológica (isto é, a dimensão comóvel), dividindo-se pelo seu diâmetro angular atual no céu. A d_A definida por Weinberg apresenta uma característica (à primeira vista desconcertante, mas fisicamente correto) que além de um certo ponto, d_A pode realmente diminuir à medida que se move para objetos mais antigos que estão mais longe. Em contraste, na versão de Peebles a distância de diâmetro angular é sempre crescente à medida que se move para distância maiores.

E a distância módulo;

$$\mu_d = 5 \log_{10} \left[\frac{d_L}{10pe} \right] = 5 \log_{10} \left[\frac{d_L}{1Mpe} \right] + 25. \quad (3.15)$$

Utilizando a Eq.(3.10), após algumas manipulações matemáticas, podemos reescrever as equações (3.11), (3.12), (3.13), (3.14) e (3.15) tornam-se

$$d_F(z) = d_H \left[z - \frac{1}{2}q_0^2 z^2 + \frac{1}{24}(-1 + 10q_0 + 12q_0^2 - 4j_0)z^3 + \frac{1}{48}(2 - 15q_0 - 42q_0^2 - 30q_0^3 + 20q_0j_0 + 6j_0 + 2s_0)z^4 + O(z^5) \right], \quad (3.16)$$

$$d_P(z) = d_H \left[z - \frac{1}{2}(1 + q_0)z^2 + \frac{1}{6}(2 + 4q_0 + 3q_0^2 - j_0)z^3 + \frac{1}{24}(-6 - 12q_0 - 27q_0^2 - 15q_0^3 + 10q_0j_0 + 9j_0 + s_0)z^4 + O(z^5) \right], \quad (3.17)$$

$$d_Q(z) = d_H \left[z - \frac{1}{2}(2 + q_0)z^2 + \frac{1}{24}(23 + 22q_0 + 12q_0^2 - 4j_0)z^3 + \frac{1}{48}(26 - 61q_0 - 66q_0^2 + 30q_0^3 + 20q_0j_0 - 2j_0 + 2s_0)z^4 + O(z^5) \right], \quad (3.18)$$

$$d_A(z) = d_H \left[z - \frac{1}{2}(3 + q_0)z^2 + \frac{1}{6}(11 + 7q_0 + 3q_0^2 - j_0)z^3 + \frac{1}{24}(2 - 2q_0 - 15q_0^2 - 15q_0^3 + 10q_0j_0 + 5j_0 + s_0)z^4 + O(z^5) \right], \quad (3.19)$$

$$\mu_D(z) = 25 + \frac{5}{\ln(10)} \left[\ln(d_H/Mpc) + \ln(z) + \frac{1}{2}(1 - q_0)z - \frac{1}{24}(7 - 10q_0 - 9q_0^2 + 4j_0)z^2 + O(z^3) \right]. \quad (3.20)$$

3.3 A parametrização: *y-redshift*

A metodologia adotada nesta seção é baseada no artigo de Cèline e Visser [29]. Retornando a Eq.(3.3) juntamente com a Eq.(2.6) temos:

$$\frac{1}{1+z} = \frac{a(t)}{a_0} = 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2!}q_0H_0^2(t - t_0)^2 + \frac{1}{3!}j_0H_0^2(t - t_0)^3 + \frac{1}{4!}s_0H_0^4 + O[(t - t_0)^5]. \quad (3.21)$$

A partir da equação acima, percebe-se que esta expansão de Taylor tem um pólo em $z = -1$, isto corresponde ao instante (num tempo finito ou infinito) quando o universo expande-se até volume infinito, $a \rightarrow \infty$. Note que um valor negativo para z corresponde a $a(t) > a_0$, isto é, num universo em expansão $z < 0$ corresponde ao futuro. Uma vez que existe um pólo explícito em $z = -1$, pela teoria de variável complexa padrão [52], verifica-se que o raio de convergência é no máximo $|z| = 1$ de modo que esta série também falha em convergir para $z > 1$, quando o Universo tinha menos da metade do seu tamanho atual.

Consequentemente, quando revertermos esta série de potências para obter o *Lookback Time* $T = (t_0 - t)$ como função de z , não devemos esperar que a série convergisse para $z > 1$. Por fim, quando escrita em termos de a_0 , H_0 , q_0 , j_0 , s_0 e uma expansão de série de potência em z , não se deve esperar que $d_L(z)$ convirja para $z > 1$.

Note que a matemática utilizada nesse resultado é que o raio de convergência de uma série de potência é a distância para a singularidade mais próxima no plano complexo, enquanto a física relevante reside no fato que, por motivos físicos, não devemos esperar que seja capaz de extrapolar para o futuro, $a \rightarrow \infty$, correspondendo a $z = -1$. Fisicamente, devemos esperar que este argumento seja assegurado por qualquer quantidade observável quando expresso como uma função do *redshift* e expandindo em série de Taylor em torno

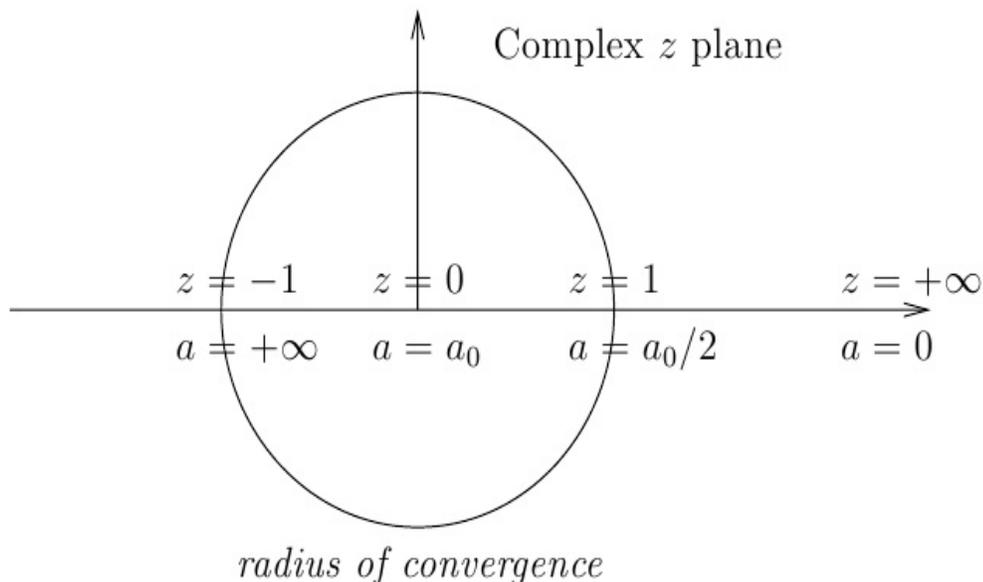


Figura 3.1: Esboço qualitativo do comportamento do fator de escala e o raio convergência da série de Taylor em z -redshift [29].

de $z = 0$ - o raio de convergência da série de Taylor deve ser menor ou igual à unidade³. A Fig.(3.1) ilustra o raio de convergência no plano complexo da expansão da série de Taylor em termos de z . Por consequência, podemos concluir que os dados observacionais em relação $d_L(z)$ para $z > 1$ não será particularmente útil na utilização de a_0 , H_0 , q_0 , j_0 e s_0 com a versão tradicional usual da relação Hubble.

Devido ao problema de convergência da série pra $|z| \geq 1$, foi proposta uma parametrização definida da seguinte forma [29]

$$y = \frac{z}{1+z}, \quad (3.22)$$

que é chamada de y - redshift. Na verdade, a variável y introduzida acima tem algumas propriedades muito elegantes:

$$y = \frac{z}{1+z} \rightarrow z = \frac{y}{1-y}, \quad (3.23)$$

³O raio de convergência pode realmente ser menor que a unidade, isto ocorre se alguma outra singularidade no plano complexo z é mais próxima do que a quebra na previsibilidade associada com a tentativa de explicar $a(t)$ no “passado”, $a \rightarrow 0$ é a singularidade.

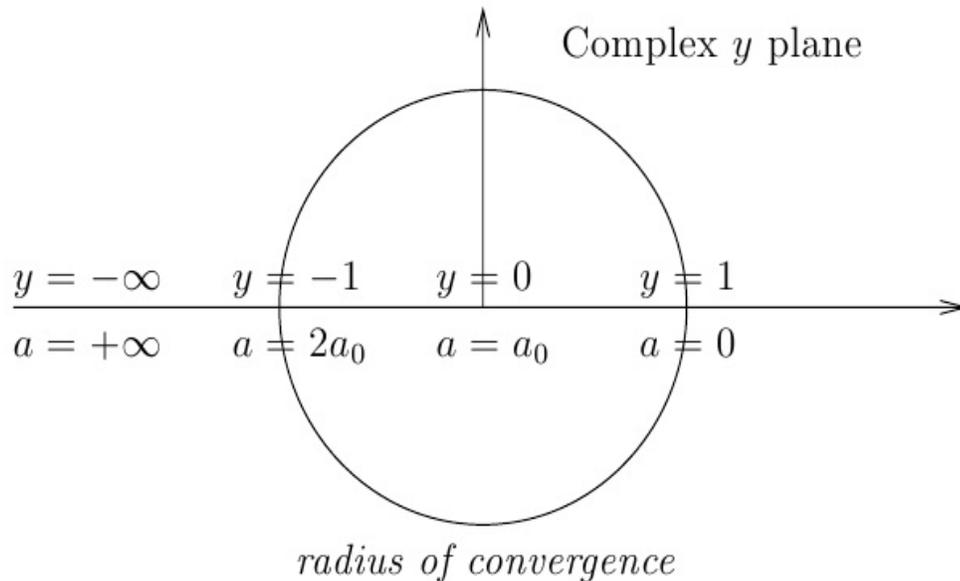


Figura 3.2: Esboço qualitativo do comportamento do fator de escala e o raio convergência da série de Taylor em y -redshift [29].

no passado (de um universo em expansão)

$$z \in (0, \infty); \quad y \in (0, 1), \quad (3.24)$$

enquanto que no futuro

$$z \in (-1, 0); \quad y \in (-\infty, 0). \quad (3.25)$$

Dessa forma a Eq.(3.21) fica escrita como

$$1 - y = 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2!}q_0H_0^2(t - t_0)^2 + \frac{1}{3!}j_0H_0^3(t - t_0)^3 + \frac{1}{4!}s_0H_0^4 + O[(t - t_0)^5]. \quad (3.26)$$

Esta expressão agora não tem pólos, então revertendo a série do *Lookback Time* $T = (t_0 - t)$ deve ser bem comportada como uma função $T(y)$. Agora podemos expressar $d_L(y)$, em uma série de Taylor na variável y , obtendo assim uma série de potência bem-comportada para toda a evolução do Universo, de hoje até o Big Bang. Portanto,

$$y = +1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Big Bang},$$

o raio de convergência é dado por $|y| = 1$, então esta nova série converge para

$$|y| < 1.$$

Consequentemente, no futuro, em termos da variável y temos problemas em $y = -1$, quando o Universo tiver expandido duas vezes o tamanho atual. A Fig.(3.2) ilustra o comportamento de $a(y)$ no plano complexo.

Podemos observar que, trabalhar com a parametrização y ao invés de z , vai depender do objetivo em estudo. Para nossa proposta, estamos interessados em dados em altos- z . Portanto, a parametrização y é mais adequada, isto é, ela nos permite ir a um Universo mais distante. Por exemplo, trabalharemos com uma amostra de galáxias que vai até o $z = 1.84$, correspondendo a um $y = 0.647$. Este ponto está dentro do raio de convergência para a parametrização y e o mesmo não aconteceria se utilizarmos a variável z .

A partir dessa nova parametrização e com alguns cálculos básicos a Eq.(3.10) é reescrita da forma

$$d_L(y) = d_H \left[y + \frac{1}{2}(3 - q_0)y^2 + \frac{1}{6}(11 - 5q_0 + 3q_0^2 - j_0)y^3 + \frac{1}{24}(50 - 26q_0 + 21q_0^2 - 15q_0^3 + 10q_0j_0 - 7j_0 + s_0)y^4 + O(y^5) \right], \quad (3.27)$$

fica fácil verificar que as equações (3.11), (3.12), (3.13) e (3.14) na nova parametrização podem ser expressas:

$$d_F = d_L(1 - y)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.28)$$

$$d_P = d_L(1 - y), \quad (3.29)$$

$$d_A = d_L(1 - y)^2, \quad (3.30)$$

$$d_Q = d_L(1 - y)^{\frac{3}{2}}. \quad (3.31)$$

Em termos dos parâmetros cosmográficos essas distâncias podem ser reescritas da seguinte

maneira [29]:

$$d_F(y) = d_H \left[y + \frac{1}{2}(2 - q_0)y^2 + \frac{1}{24}(23 - 14q_0 + 12q_0^2 - 4j_0)y^3 + \frac{1}{48}(44 - 27q_0 - 30q_0^2 - 30q_0^3 + 20q_0j_0 - 18j_0 + 2s_0)y^4 + O(y^5) \right], \quad (3.32)$$

$$d_P(y) = d_H \left[y + \frac{1}{2}(1 - q_0)y^2 + \frac{1}{6}(2 - 2q_0 + 3q_0^2 - j_0)y^3 + \frac{1}{24}(6 - 9q_0^2 - 15q_0^3 + 10q_0j_0 - 3j_0 + s_0)y^4 + O(y^5) \right], \quad (3.33)$$

$$d_A(y) = d_H \left[y - \frac{1}{2}(1 + q_0)y^2 + \frac{1}{6}(-1 + q_0 + 3q_0^2 - j_0)y^3 + \frac{1}{24}(66 + 2q_0 - 3q_0^2 - 15q_0^3 + 10q_0j_0 + j_0 + s_0)y^4 + O(y^5) \right], \quad (3.34)$$

$$d_Q(y) = d_H \left[y - \frac{1}{2}q_0y^2 + \frac{1}{24}(-1 - 2q_0 + 12q_0^2 - 4j_0)y^3 + \frac{1}{48}(68 - q_0 + 6q_0^2 - 30q_0^3 + 20q_0j_0 - 26j_0 + 2s_0)y^4 + O(y^5) \right]. \quad (3.35)$$

Já equação da distância módulo $\mu_D(y)$ fica

$$\mu_D(y) = 25 + \frac{5}{\ln 10} \left[\ln \left(\frac{c}{H_0} \right) + \ln y - \frac{1}{2}(q_0 - 3)y + \frac{1}{24}(17 - 2q_0 + 9q_0^2 - 4j_0)y^2 + \frac{1}{24}(11 - q_0 + 2q_0^2 - 10q_0^3 + 8q_0j_0 - j_0 + s_0)y^3 + O(y^4) \right]. \quad (3.36)$$

Quando o problema da convergência é resolvido, devemos nos preocupar sobre à questão do truncamento da expansão. É claro que, com a expansão de ordens mais elevadas, a aproximação obtida seria mais precisa.

3.4 Cosmografia com o Parâmetro de Hubble

Outra série de bastante importância no cenário cosmográfico é a série de potência para $H(z)$ [27], definida a partir do uso de uma expansão de Taylor em torno de $z = 0$, ou seja

$$H(z) = H_0 + z \frac{dH(z)}{dz} \Big|_{z=0} + \frac{1}{2} z^2 \frac{d^2H(z)}{dz^2} \Big|_{z=0} + \frac{1}{6} z^3 \frac{d^3H(z)}{dz^3} \Big|_{z=0} + \dots \quad (3.37)$$

Utilizando a relação

$$\frac{dt}{dz} = -\frac{1}{(1+z)H(z)}, \quad (3.38)$$

temos

$$\left. \frac{dH(z)}{dz} \right|_{z=0} = (1+q_0)H_0, \quad (3.39)$$

$$\left. \frac{d^2H(z)}{dz^2} \right|_{z=0} = (j_0 - q_0^2)H_0, \quad (3.40)$$

$$\left. \frac{d^3H(z)}{dz^3} \right|_{z=0} = (3q_0^2 + 3q_0^3 - 3j_0 - 4q_0j_0 - s_0)H_0. \quad (3.41)$$

Logo, substituindo as equações (3.39), (3.42) e (3.43) na Eq.(3.37), nos fornece

$$H(z) = H_0 \left\{ 1 + (1+q_0)z + \frac{1}{2}(j_0 - q_0^2)z^2 + \frac{1}{6}[3q_0^2 + 3q_0^3 - j_0(3+4q_0) - s_0]z^3 + \dots \right\}. \quad (3.42)$$

Se utilizarmos a nova parametrização dada neste capítulo ($y - redshift$) a equação acima resulta em

$$H(y) = H_0 \left[1 + (1+q_0)y + \frac{1}{6}(6+6q_0-2q_0^2+3j_0)y^2 + \frac{1}{6}(6+6q_0-3q_0^2+3q_0^3-4q_0j_0+3j_0-s_0)y^3 + \frac{1}{2}(2+2q_0+3q_0^2-4q_0j_0-s_0)y^4 + O(y^5) \right]. \quad (3.43)$$

Os parâmetros desaceleração, $jerk$ e $snap$ podem ser escritos em termos do parâmetro de Hubble para um tempo qualquer, ou seja, com a Eq.(3.38) e algumas manipulações matemáticas, obtemos

$$q(t) = -\frac{\dot{H}}{H^2} - 1, \quad (3.44)$$

$$j(t) = \frac{\ddot{H}}{H^3} - 3q - 2, \quad (3.45)$$

$$s(t) = \frac{\dddot{H}}{H^4} + 4j + 3q(q+4) + 6. \quad (3.46)$$

De fato, espera-se que para cada modelo da série cosmológica, utilizando as equações acima, e seguida de uma inversão, possibilite encontrar restrições sobre estes parâmetros livres, uma

vez que é conhecida a série cosmográfica “experimentalmente”. No caso do Modelo Λ CDM, os parâmetros são definidos da seguinte forma

$$q_0 = \frac{3}{2}\Omega_m - 1, \quad (3.47)$$

$$j_0 = 1, \quad (3.48)$$

$$s_0 = 1 - \frac{9}{2}\Omega_m, \quad (3.49)$$

a demonstração destas, se encontram no Apêndice A. Invertendo as equações (3.47) e (3.49) e utilizando a Eq.(3.48), obtemos as relações

$$\Omega_{m,q_0,j_0} = \frac{2}{3}(q_0 + j_0), \quad (3.50)$$

$$\Omega_{m,s_0} = \frac{2}{9}(1 - s_0). \quad (3.51)$$

Vale salientar que a cosmografia pode ser estendida no âmbito de um universo não-homogêneo. Um exemplo de espaço-tempo não homogêneo é fornecido pela métrica Lemaitre-Tolman-Bondi. Todavia, um sistema de auto consistência para cosmografia não homogênea não é, até agora, completamente compreendido. Investigações cosmográficas não homogêneas são extremamente importantes para medir possíveis saídas do universo homogêneo e isotrópico padrão. No entanto, para nossos fins, não tratamos o caso de cosmografia inomogênea.

3.5 Sumário

Neste capítulo, apresentamos as definições fundamentais da Cosmografia, introduzimos os conceitos e as expansões matemáticas associadas à esta teoria partindo do Princípio Cosmológico, correspondentes a métrica de FLRW. No próximo capítulo, iremos discutir os conceitos gerais sobre idades, teste de idades e o *Lookback Time* teórico. Em seguida, trataremos do *Lookback Time* cosmográfico em função do $z - redshift$, da parametrização $y - redshift$ em termos dos parâmetros cosmográficos atuais e faremos a análise estatística proposta nesta dissertação.

Capítulo 4

Lookback Time e Análise Estatística

A questão da idade do Universo constitui um dos problemas fundamentais da Cosmologia. Visto que, para qualquer cenário cosmológico, o Universo deve ter uma idade superior aos objetos que o compoem. Tendo em mãos alguns parâmetros cosmológicos, podemos calcular a Idade do Universo ou o seu complemento, o *Lookback Time*, em função do *redshift*.

4.1 Idade e o *Lookback Time* Teórico

Consideremos a equação da densidade de energia do Universo para k arbitrário e todos os constituintes do Universo

$$\rho = \rho_r + \rho_m + \rho_x, \quad (4.1)$$

utilizando as equações (2.15), (2.17) e (2.18) obtemos a seguinte relação

$$\rho = \rho_{r0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-4} + \rho_{m0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3} + \rho_{x0} \exp \left(\int_1^{\frac{1}{1+z}} 3[1 + \omega(z)] d[\ln(1+z)] \right), \quad (4.2)$$

que pode ser reescrita na forma [50]

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\rho_0} &= \Omega_x \exp \left(\int_1^{\frac{1}{1+z}} 3[1 + \omega(z)] d[\ln(1+z)] \right) + \Omega_m \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3} + \Omega_r \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-4}, \\ \rho &= \frac{3H_0^2}{8\pi G} \left[\Omega_x \exp \left(\int_1^{\frac{1}{1+z}} 3[1 + \omega(z)] d[\ln(1+z)] \right) + \Omega_m \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3} + \Omega_r \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-4} \right], \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde as densidades de energia presente no constituinte x , a matéria não-relativística e a radiação são respectivamente

$$\rho_{x0} = \frac{3H_0^2 \Omega_x}{8\pi G}, \quad (4.4)$$

$$\rho_{m0} = \frac{3H_0^2\Omega_m}{8\pi G}, \quad (4.5)$$

$$\rho_{r0} = \frac{3H_0^2\Omega_r}{8\pi G}, \quad (4.6)$$

e ρ_0 é a densidade do Universo, na presente época.

Substituindo a Eq.(4.3) na Eq.(2.10) obtemos

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = H_0^2 \left[\Omega_x \exp \left(\int_1^{\frac{1}{1+z}} 3[1 + \omega(z)] d[\ln(1+z)] \right) + \Omega_m \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3} + \Omega_r \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-4} \right]. \quad (4.7)$$

Mais uma vez, fazendo outra substituição da Eq.(2.10) na equação acima, obtemos

$$H^2 = H_0^2 \left[\Omega_x \exp \left(\int_1^{\frac{1}{1+z}} 3[1 + \omega(z)] d[\ln(1+z)] \right) + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_r(1+z)^4 \right], \quad (4.8)$$

onde $\Omega_k = -\frac{k}{H_0^2 a_0^2}$. Podemos ir mais adiante com a Eq.(4.8), ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(z; \mathbf{p})^2 &= \Omega_x \exp \left(\int_1^{\frac{1}{1+z}} 3[1 + \omega(z)] d[\ln(1+z)] \right) + \Omega_k(1+z)^2 + \\ &\quad \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_r(1+z)^4, \\ \mathcal{H}(z; \mathbf{p}) &= \left\{ \Omega_x \exp \left(\int_1^{\frac{1}{1+z}} 3[1 + \omega(z)] d[\ln(1+z)] \right) + \Omega_k(1+z)^2 + \right. \\ &\quad \left. \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_r(1+z)^4 \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde, $\mathcal{H}(z; \mathbf{p}) = H/H_0$ representa o modelo teórico, neste caso, mais conhecido como modelo Λ CDM e \mathbf{p} a quantidade de parâmetros incluídos neste cenário. Para um $\omega = \text{constante}$, a equação acima recai na forma

$$\mathcal{H}(z; \mathbf{p}) = [\Omega_x(1+z)^{3(1+\omega)} + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_r(1+z)^4]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.10)$$

Podemos particularizar mais ainda o modelo considerando o caso em que $\omega = -1$, representando assim a energia do vácuo ou, equivalente, uma constante cosmológica. Ou seja, a

Eq.(4.10) fica

$$\mathcal{H}(z; \mathbf{p}) = [\Omega_\Lambda + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_r(1+z)^4]^{\frac{1}{2}}, \quad (4.11)$$

denominado modelo Λ CDM.

Com isto, podemos reescrever a Eq.(4.8) como

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = H_0 \mathcal{H}(z; \mathbf{p}),$$

e, utilizando a transformação,

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = -\frac{1}{(1+z)} \frac{dz}{dt}, \quad (4.12)$$

obtemos

$$\frac{dt}{dz} = -\frac{1}{H_0(1+z)\mathcal{H}(z; \mathbf{p})}. \quad (4.13)$$

Integrando a equação acima, obtemos a fórmula para a idade do Universo em *redshift* z :

$$t(z) = H_0^{-1} \int_z^\infty \frac{dz'}{(1+z')\mathcal{H}(z'; \mathbf{p})}. \quad (4.14)$$

Assim, a idade do Universo é dada por:

$$t_0 = H_0^{-1} \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)\mathcal{H}(z; \mathbf{p})}. \quad (4.15)$$

A Fig.(4.1) mostra o parâmetro de idade ($H_0 t_0$) como função do parâmetro da equação de estado ($\omega = cte$). Observe que para valores fixos do parâmetro de densidade Ω_m , a equação acima implica que a idade prevista para o Universo decresce para valores maiores de ω . De maneira geral, o *Lookback Time*, que é a diferença entre a idade total do Universo e a idade deste para um z – *redshift* qualquer, e definido da forma

$$LT(z; \mathbf{p}) = H_0^{-1} \int_0^z \frac{dz}{(1+z)\mathcal{H}(z; \mathbf{p})}. \quad (4.16)$$

4.2 *Lookback Time* Cosmográfico

Vimos no capítulo anterior, que a Cosmografia é um método utilizado em testes de distâncias e pode ser utilizado em testes de idade, objetivo principal deste trabalho. Na seção

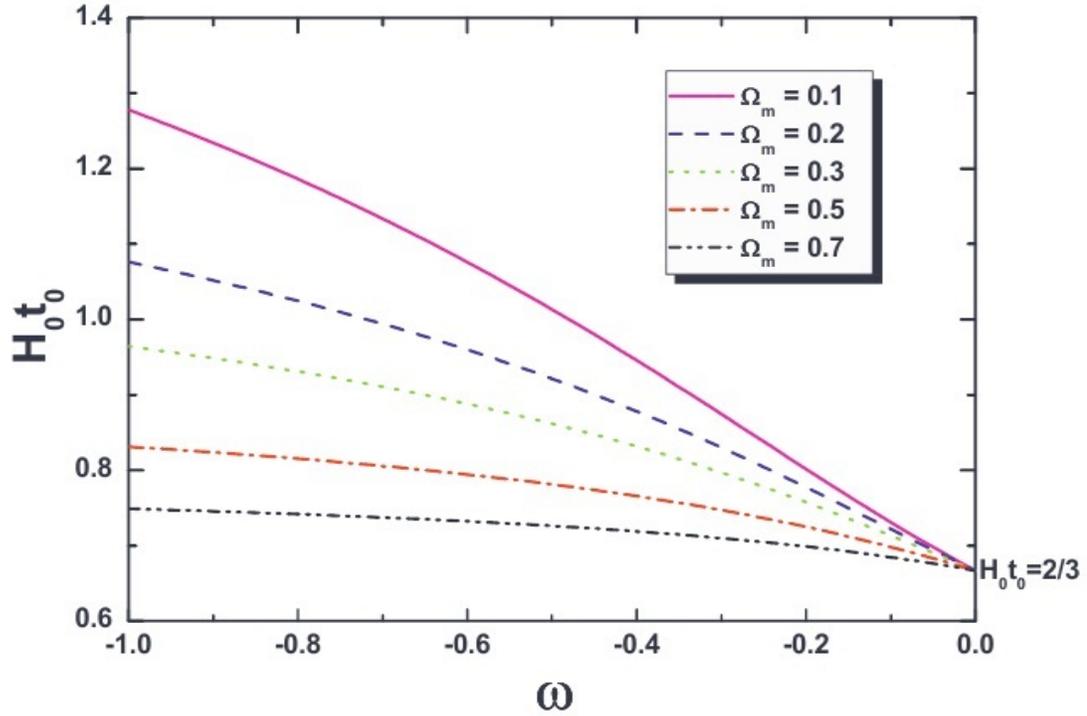


Figura 4.1: Parâmetro de idade como função de ω para alguns valores de Ω_m [53].

acima apresentamos o *Lookback Time* teórico. O *Lookback Time* cosmográfico em termos dos parâmetros na presente época e em função do z – *redshift* e do y – *redshift* é dado por

$$\begin{aligned}
 LT_c = (t_0 - t) = & \frac{1}{H_0} \left[z - \frac{1}{2}(2 + q_0)z^2 + \frac{1}{6}(6 + 6q_0 + 3q_0^2 - j_0)z^3 + \right. \\
 & \frac{1}{24}(-24 - 36q_0 - 36q_0^2 - 15q_0^3 + 10q_0j_0 + \\
 & \left. 12j_0 + s_0)z^4 + O(z^5) \right], \tag{4.17}
 \end{aligned}$$

que utilizando a parametrização representada pela Eq.(3.24) na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned}
 LT_c = & \frac{1}{H_0} \left[y - \frac{q_0}{2}y^2 + \frac{1}{6}(3q_0^2 - j_0)y^3 + \right. \\
 & \left. \frac{1}{24}(-15q_0^3 + 10q_0j_0 + s_0)y^4 + O(y^5) \right]. \tag{4.18}
 \end{aligned}$$

A demonstração matemática completa das equações (4.17) e (4.18) encontra-se no Apêndice B. Vale salientar que estas equações são independentes de modelos teóricos e descritas somente em termos dos valores atuais cosmográficos.

4.3 Análise Estatística

Para obter o melhor ajuste do conjunto de parâmetros \mathbf{p} , definimos a função probabilidade

$$\mathcal{L}_{LT} \propto \exp[-\chi_{LT}^2(z; \mathbf{p})/2], \quad (4.19)$$

onde χ_{LT}^2 é dado por

$$\chi_{LT}^2 = \sum_i \frac{[LT_c - LT_{obs}]^2}{\sigma_{LT_{obs}}^2}. \quad (4.20)$$

Os parâmetros que melhor ajustam os dados são aqueles para os quais χ_{LT}^2 é mínimo. Aqui, $\sigma_{LT_{obs}}$ é o erro de cada medida da amostra observada e LT_c está representando o *Lookback Time* cosmográfico, ou seja, $LT_c(z) = (t_0 - t)$.

4.4 Amostras Reais e Simuladas

Foi utilizada uma nova amostra de idade constituída por 32 galáxias distribuídas no intervalo de *redshift* $0.11 \leq z \leq 1.84$, como recentemente estudada na Ref.[54] [veja a Fig.(4.2)]. A amostra total é constituída por 3 sub-classes: galáxias do campo do tipo *early* [55, 56] (cujas idades foram obtidas utilizando os modelos SPEED da Ref.[57]); 20 galáxias vermelhas do *survey* GDDS [58]; e duas rádio galáxias LBDS 53W091 e LBDS 53W069 [59, 60].

Nessa nova análise, nós supomos que a idade do Universo observado é $t_0^{obs} = 13.7 \pm 0.2$ Ganos [61, 62]. Na Fig.(4.2) esquerda e direita, mostramos, respectivamente, a amostra com as idades originais e o LT como função do redshift para as 32 galáxias da Ref.[54].

Utilizamos também amostras de LT sintéticos via Monte Carlo (MC). Nestas amostras simuladas consideramos o erro de distribuição observacional atual ($\sigma_t = 10\%$) dos dados de $t(z)$, dado por Simon *et al.* (2005). Em seguida, utilizamos uma distribuição normal centrada em $t(z_i)$ previsto pelo modelo fiducial escolhido, ou seja, o modelo Λ CDM plano, com $\Omega_m = 0.27$ e $H_0 = 67.3 \pm 1.2 \text{ km/s/Mpc}$ obtido por *Planck Collaboration et. al.* em 2013 [31].

De acordo com alguns autores [54, 63], as futuras observações de galáxias serão capazes de fornecer estimativas de idade com $\sigma_t \leq 10\%$. Por isso, em nossas simulações, adotamos

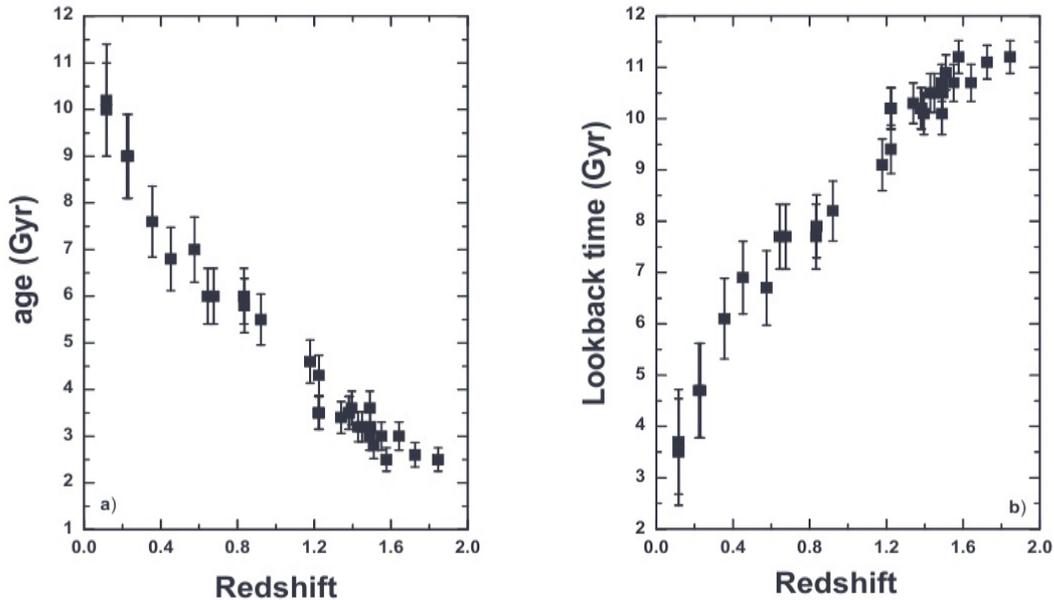


Figura 4.2: **Esquerda:** Os dados originais obtidos da Ref.[30]. Esta amostra corresponde a 32 galáxias velhas, distribuídas no intervalo de *redshift* $0.11 \leq z \leq 1.84$, e inclui observações do GDDS [58]; e dados arquivados [59] [60]. **Direita:** A amostra de dados do *LT*. Nós combinamos as medidas de idades de 32 galáxias com as estimativas de idade total do Universo, $t_0^{obs} = 13,7 \pm 0.2$ Ganos (1σ), como obtida a partir das medidas recentes da RCF [61] [62].

$\sigma_t = 10\%$, e dividimos a nossa amostra em grupos de 100, 200, 500, 800, 1000, 1500 e 2000 pontos de dados uniformemente espaçados no intervalo $0.1 \leq z \leq 1.5$.

4.5 Sumário

Neste capítulo, apresentamos os conceitos fundamentais da idade do Universo, o *Lookback Time* e suas características na Cosmologia Moderna com a dependência direta de um modelo teórico. Da mesma forma, apresentamos o *Lookback Time* cosmográfico em função do $z - redshift$ e $y - redshift$ e concluímos que este não necessita de um modelo *a priori* para a descrição cinemática e dinâmica do Universo e sim dos valores atuais de parâmetros já bastante conhecidos na literatura.

Capítulo 5

Resultados e Discussões

Neste capítulo, apresentaremos os nossos principais resultados e discussões provenientes da metodologia utilizada neste trabalho.

5.1 Resultados

A Fig.(5.1) esquerda mostra como o LT_c se comporta para o intervalo $0 \leq y \leq 1$. Os valores dos parâmetros cosmológicos utilizados nesta análise são os mesmos valores inferidos pelo modelo Λ CDM, ou seja, $q_0 = -0.595$, $j_0 = 1$ e $s_0 = -0.215$. Aqui adotamos $H_0 = 67.3 \pm 1.2 km/Mpc/s$ [31]. Note que, neste cenário, obtemos uma idade de ≈ 17 Ganos o que difere um pouco da idade encontrada na literatura utilizando o modelo Λ CDM plano, ≈ 14.4 Ganos, para $\Omega_m = 0.27$ e $\Omega_\Lambda = 0.73$. Isto talvez ocorra, por não levarmos em conta todos os termos da expansão, truncamos na ordem 4. Podemos visualizar isto na Fig.(5.1) direita, onde consideramos apenas três termos fornecendo uma diferença na idade de 1.5 Ganos a mais para o Universo, (≈ 18.5 Ganos) comparada com a de ordem 4. Porém, por se tratar de uma expansão, considerar todos os termos da série de Taylor seria uma tarefa, analiticamente e numericamente, bastante complexa.

Podemos fazer uma análise comparativa entre o *Lookback Time* teórico referente ao modelo Λ CDM [Eq.(4.16)] com o *Lookback Time* cosmológico $LT_c(y)$, para a parametrização $y = z/(1+z)$ [Eq.(4.18)] no intervalo de $0 \leq z \leq 1$ representando a metade do tamanho do Universo¹, como mostra a Fig.(5.1) esquerda. Note que, a curva do modelo cosmológico está bem próxima da curva do *Lookback Time* Λ CDM. Observe também, que essa diferença

¹É interessante frisar, que para $z = 1$, não temos a evolução completa do Universo.

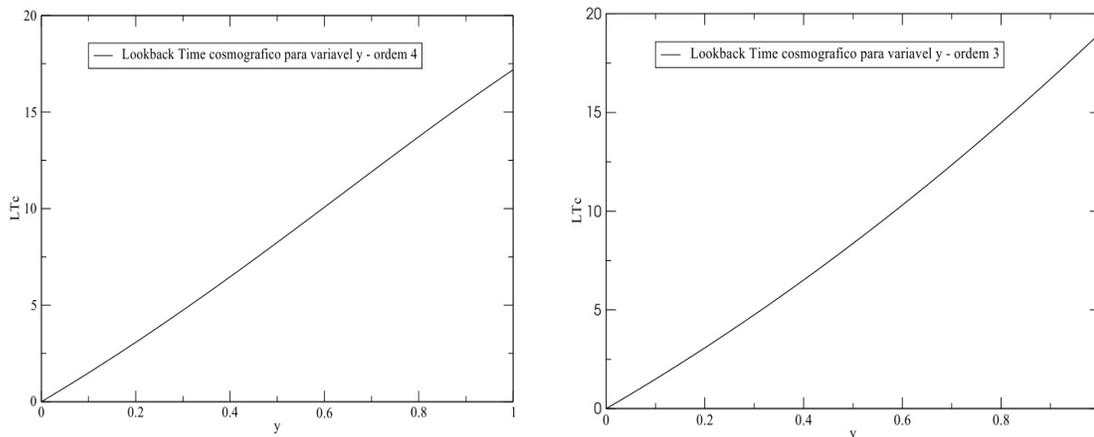


Figura 5.1: **Esquerda:** *Lookback Time* cosmográfico do Universo em função da parametrização $y - redshift$ até a quarta ordem. **Direita:** Para efeito comparativo ilustramos o $LT_c(y)$ até a ordem 3. Perceba que, quando $y = 1$, temos a idade total do Universo.

começa a se tornar perceptível para um $z \approx 0.8$, correspondendo a um $y \approx 0.44$. Com base nisso, calcularmos o desvio relativo² entre LT_c e $LT_{\Lambda CDM}$ para nos informar o quanto diferencia um do outro neste intervalo, $0 \leq z \leq 1$. A Fig.(5.2) nos fornece esse dado e podemos notar que o cenário cosmográfico está com uma diferença de $\approx 2.5\%$ do modelo teórico padrão em $z = 1$.

Mas o que torna essa análise mais interessante é quando analisamos toda a evolução do Universo (*Big Bang* até hoje), que pode ser muito bem descrita, como já vimos anteriormente, pela parametrização do $y - redshift$ varrendo o intervalo de $0 \leq y \leq 1$. A Fig.(5.3) nos mostra o desvio relativo entre $LT_c(y)$ e $LT(y)_{\Lambda CDM}$, onde a variável y varre todos os valores no intervalo de zero a um, representando o tamanho total do Universo. Na Fig.(5.3) direita, encontramos um desvio relativo de $\approx 32\%$ utilizando $LT_c(y)$ até terceira ordem, enquanto que para a ordem quatro, obtemos um desvio relativo $\approx 18\%$, veja a Fig.(5.3) esquerda. Comprovando mais uma vez, que utilizando todos os termos possíveis da expansão, seria possível descrever satisfatoriamente toda a evolução e dinâmica do Universo em comparação com o modelo teórico ΛCDM .

Com posse do $LT_c(y)$ e utilizando a técnica estatística do χ^2_{min} inferimos os parâmetros cosmográficos, H_0 , q_0 , j_0 e s_0 , a partir de amostras observadas (32 galáxias) e simuladas de

²Desvio relativo: $\Delta = \left| \frac{LT_{\Lambda CDM} - LT_c}{LT_{\Lambda CDM}} \right|$.

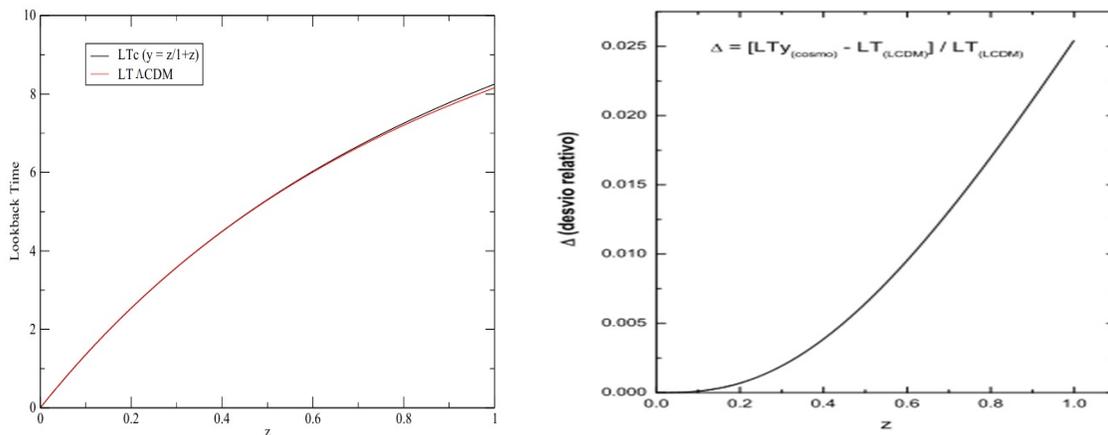


Figura 5.2: **Direita:** Comparação entre do *Lookback Time* cosmológico e o *Lookback Time* teórico Λ CDM. **Esquerdo:** Desvio relativo entre LT_c (para $y = z/(1+z)$) até a quarta ordem e $LT(z)_{\Lambda CDM}$ no intervalo $0 \leq z \leq 1$ representando a metade do tamanho do Universo.

100, 200, 500, 800, 1000, 1500 e 2000 galáxias.

O parâmetro de quarta ordem, s_0 , foi ajustado fixando os valores dos parâmetros de ordem menor para cada amostra. Note que, com estes valores não temos bons resultados para Ω_{m,s_0} [Veja a Eq.(3.54)], ou seja, não explica a aceleração cósmica. No entanto, o sinal de q_0 , j_0 e s_0 , está de acordo com o que prevê as observações atuais, $q_0 > -1$, $j_0 > 0$ e $s_0 < 0$, [veja a discussão apresentada por Capozziello, [49]].

O parâmetro de densidade Ω_m pode ser calculado invertendo os parâmetros cosmológicos, [equações (3.49), (3.50) e (3.51)]. Aqui ilustramos apenas os resultados para Ω_{m,q_0} (coluna 6). Os valores de Ω_{m,q_0,j_0} foram calculados somente para as duas últimas amostras, $\Omega_{m,q_0,j_0} \approx 0.07$. A Tab.(5.1), resume todos estes parâmetros cosmológicos.

Calculamos a idade do Universo para duas amostras sintéticas, (100 e 2000). Encontramos que a idade do Universo para estes cenários são 12.3 Ganos e 14.4 Ganos, compatíveis com o modelo Λ CDM.

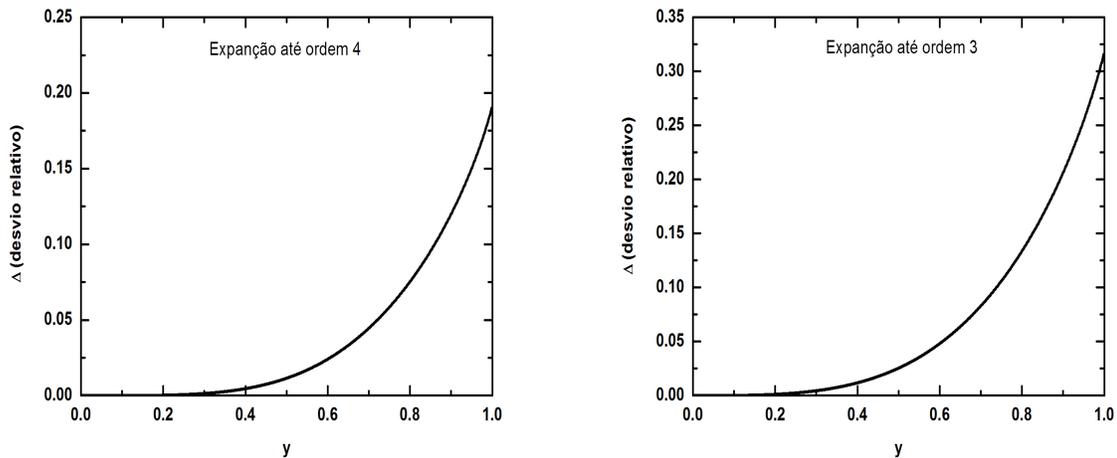


Figura 5.3: Desvio relativo entre o $LT_c(y)$ cosmológico e $LT(y)_{\Lambda CDM}$. **Esquerda:** $LT_c(y)$ de ordem 4. **Direita:** $LT_c(y)$ de ordem 3. Note que a expansão com mais termos, diferencia menos do modelo usual.

Amostras	h_0	q_0	j_0	s_0	Ω_{m,q_0}
32_{obs}	0.5	-0.10	2.60	5.50	0.60
100	0.80	-0.60	0.00	-1.90	0.25
200	0.80	-0.60	0.10	-1.59	0.26
500	0.80	-0.69	0.30	-5.29	0.21
800	0.80	-0.69	0.30	-5.29	0.21
1000	0.80	-0.69	0.30	-5.59	0.21
1500	0.80	-0.79	0.90	-5.79	0.14
2000	0.80	-0.79	0.90	-5.50	0.14

Tabela 5.1: Parâmetros cosmológicos inferidos a partir de diferentes amostras.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho foi investigada a possibilidade de encontrar limites sobre a cinemática do Universo sem assumir qualquer modelo *a priori*. A filosofia básica por trás desta ideia é expandir em série todas as quantidades físicas sob exame em torno de $z = 0$. Em particular, através da expansão de $a(t)$ até a quarta ordem em t , encontramos limites para as derivadas de $a(t)$, calculados em $z = 0$. Isto fornece restrições sobre quantidades cinemáticas tais como q_0 , j_0 e s_0 , discutido pioneiramente na referência [26] e estendida posteriormente nas referências [28], [65]-[67]. Uma vez que este conjunto de parâmetros cosmológicos é independente do modelo, ele pode ser usado para impor limites sobre os parâmetros livres de um determinado modelo.

A expansão de $a(t)$ em série de Taylor diverge para valores de $|z| \geq 1$, induzindo ao $LT_c(z)$, proveniente da inversão desta série, obter problemas para altos- z , fazendo com que a análise cosmológica, utilizando testes de idade para o estudo cinemático e dinâmico do Universo, se torne problemática ou falha, já que temos objetos observáveis no Universo com *redshift* $z \geq 1$. Para a solução deste problema, utilizamos a parametrização $y = z/(1+z)$ [29] nos fornecendo uma análise completa de todos os valores possíveis de z , ou seja, $0 \leq y \leq 1 \rightarrow 0 \leq z \leq \infty$ (correspondendo ao passado do Universo) aumentando o raio de convergência para z .

Dando continuidade a este trabalho, pretendemos futuramente:

- Encontrar os erros dos parâmetros livres inferidos do *Lookback Time* cosmológico;
- Fazer as mesmas análises desta dissertação, porém marginalizando sobre o parâmetro

de Hubble H ;

- Montar a figura de mérito (FoM) para as amostras cosmográficas do LT e verificar se existem melhorias com o tamanho das mesmas.
- Uma análise estatística mais elaborada a partir de amostras sintéticas para $LT_c(y)$. Nestas, assumiremos um erro de distribuição observacional de $\sigma_t = 5\%$ nos dados de $t(z)$.

Finalmente, queremos enfatizar que o método desenvolvido nesta dissertação (LT_c) pode ser comparado para qualquer modelo cosmológico, não somente para uma Cosmologia usual - Λ CDM.

Apêndice A

Demonstração dos Parâmetros Atuais via Cosmografia Utilizando o Modelo Λ CDM

Neste apêndice, apresentamos a demonstração matemática dos parâmetros q_0 , j_0 e s_0 em termos do parâmetro densidade Ω_m utilizando o modelo Λ CDM. Iniciamos com as equações (3.46), (3.47) e (3.48):

$$q(t) = -\frac{\dot{H}}{H^2} - 1, \quad (\text{A.1})$$

$$j(t) = \frac{\ddot{H}}{H^3} - 3q - 2, \quad (\text{A.2})$$

$$s(t) = \frac{\dddot{H}}{H^4} + 4j + 3q(q + 4) + 6, \quad (\text{A.3})$$

onde temos os parâmetros desaceleração, *jerk* e *snap*, respectivamente, para um tempo qualquer. Neste modelo, o parâmetro de Hubble pode ser descrito da seguinte forma

$$H(z) = H_0[\Omega_m(1+z)^3 + 1 - \Omega_m]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.4})$$

Podemos calcular as equações (3.49), (3.50) e (3.51) utilizando a equação anterior. Para isso, temos que derivá-la em relação à z , ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{dH(z)}{dz} &= H_0 \frac{d}{dz} [\Omega_m(1+z)^3 + 1 - \Omega_m]^{\frac{1}{2}}, \\ \frac{dH(z)}{dz} &= \frac{3H_0\Omega_m(1+z)^2}{2H(z)}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Utilizando a relação

$$\frac{dt}{dz} = -\frac{1}{(1+z)H(z)}, \quad (\text{A.6})$$

conhecida na literatura como idade diferencial e manipulando a Eq.(A.5), nos fornece

$$\begin{aligned}\frac{dt}{dz} \frac{dH(z)}{dt} &= \frac{3H_0^2 \Omega_m (1+z)^2}{2H(z)}, \\ -\frac{1}{(1+z)H(z)} \dot{H}(z) &= \frac{3H_0^2 \Omega_m (1+z)^2}{2H(z)}, \\ \dot{H}(z) &= \frac{3H_0^2 \Omega_m (1+z)^3}{2}.\end{aligned}\tag{A.7}$$

Substituindo as equações (A.4) e (A.7) na Eq.(A.1) e fazendo $z = 0$ ($t = t_0$), obtemos

$$\begin{aligned}q_0 &= -\frac{-\frac{3H_0^2 \Omega_m}{2}}{H_0^2} - 1, \\ q_0 &= \frac{3}{2} \Omega_m - 1.\end{aligned}\tag{A.8}$$

Derivando a Eq.(A.7) em relação à z , temos

$$\begin{aligned}\frac{d\dot{H}(z)}{dz} &= -\frac{3}{2} H_0^2 \Omega_m \frac{d}{dz} [(1+z)^3], \\ \frac{d\dot{H}(z)}{dz} &= -\frac{9}{2} H_0^2 \Omega_m (1+z)^2.\end{aligned}\tag{A.9}$$

Utilizando a Eq.(A.6) na Eq.(A.9), temos

$$\begin{aligned}-\frac{1}{(1+z)H(z)} \frac{d\dot{H}(z)}{dt} &= -\frac{9}{2} H_0^2 \Omega_m (1+z)^2, \\ \ddot{H}(z) &= \frac{9}{2} H_0^2 \Omega_m H(z) (1+z)^3.\end{aligned}\tag{A.10}$$

Para $t = t_0$, implica dizer que $z = 0$ e utilizando este valor na Eq.(A.2), nos dá

$$j_0 = \frac{\ddot{H}}{H^3} \Big|_{z=0} - 3q_0 - 2.\tag{A.11}$$

Logo, substituindo as equações (A.8) e (A.10) (para $z = 0$), nos fornece

$$\begin{aligned}j_0 &= \frac{9}{2} \Omega_m - 3 \left(\frac{3}{2} \Omega_m - 1 \right) - 2, \\ j_0 &= 1.\end{aligned}\tag{A.12}$$

Agora, derivamos a Eq.(A.10) em relação à z :

$$\frac{d\ddot{H}(z)}{dz} = \frac{9}{2} H_0^3 \{ (1+z)^3 [\Omega_m (1+z)^3 + 1 - \Omega_m]^{\frac{1}{2}} \},\tag{A.13}$$

onde substituímos Eq.(A.4) na Eq.(A.10). Com isso, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d\ddot{H}(z)}{dz} &= \frac{9}{2}H_0^3\Omega_m \left\{ 3(1+z)^2[\Omega_m(1+z)^3 + 1 - \Omega_m]^{\frac{1}{2}} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2}(1+z)^3[\Omega_m(1+z)^3 + 1 - \Omega_m]^{-\frac{1}{2}}3\Omega_m(1+z)^2 \right\}, \\ \frac{d\ddot{H}(z)}{dz} &= \frac{9}{2}H_0^3\Omega_m \left[3(1+z)^2\frac{H(z)}{H_0} + \frac{3}{2}\Omega_m(1+z)^5\frac{H_0}{H(z)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Utilizando a Eq.(A.6) na Eq.(A.14), nos dá

$$\begin{aligned} -\frac{1}{(1+z)H(z)}\frac{d\ddot{H}(z)}{dt} &= \frac{9}{2}H_0^3\Omega_m \left[3(1+z)^2\frac{H(z)}{H_0} + \frac{3}{2}\Omega_m(1+z)^5\frac{H_0}{H(z)} \right], \\ \ddot{H}(z) &= \frac{9}{2}H_0^3\Omega_m \left[3(1+z)^3\frac{H(z)}{H_0} + \frac{3}{2}\Omega_m(1+z)^6\frac{H_0}{H(z)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Para $z = 0$, a Eq.(A.3) resulta em

$$s_0 = \frac{\ddot{H}}{H^4}\Big|_{z=0} + 4j_0 + 3q_0(q_0 + 4) + 6. \quad (\text{A.16})$$

Logo, substituindo as equações (A.8), (A.12) e (A.15) ($z = 0$), obtemos

$$\begin{aligned} s_0 &= -\frac{9}{2}\Omega_m \left[3 + \frac{3}{2}\Omega_m \right] + 4.1 + 3 \left(\frac{3}{2}\Omega_m - 1 \right) \left(\frac{3}{2}\Omega_m - 1 + 4 \right) + 6, \\ s_0 &= -\frac{27}{2}\Omega_m - \frac{27}{4}\Omega_m^2 + 4 + \left(\frac{9}{2} - 3 \right) \left(\frac{3}{2} + 3 \right) + 6, \\ s_0 &= -\frac{27}{2}\Omega_m - \frac{27}{4}\Omega_m^2 + \frac{27}{4}\Omega_m^2 + \frac{27}{2}\Omega_m - \frac{9}{2}\Omega_m - 9 + 10, \\ s_0 &= 1 - \frac{9}{2}\Omega_m. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Invertendo as equações (A.8) e (A.17)

$$\Omega_{m,q_0} = \frac{2}{3}(1 + q_0), \quad (\text{A.18})$$

$$\Omega_{m,s_0} = \frac{2}{9}(1 - s_0), \quad (\text{A.19})$$

ou, utilizando a Eq.(A.12), encontramos

$$\Omega_{m,q_0,j_0} = \frac{2}{3}(j_0 + q_0). \quad (\text{A.20})$$

Apêndice B

Demonstração Matemática do *Lookback time* Cosmográfico

Neste apêndice, apresentamos a demonstração matemática do *Lookback Time* cosmográfico em termos dos parâmetros cosmológicos atuais e em função do z – *redshift* e y – *redshift* respectivamente. Como ponto de partida, consideremos a relação do *redshift* cosmológico em termos do fator de escala da forma

$$z = \frac{a_0}{a(t)} - 1, \quad (\text{B.1})$$

onde $a(t)$ pode ser escrito em termos de uma expansão de Taylor em torno de $t = t_0$, ou seja,

$$a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)^n}{n!} \left. \frac{d^n a(t)}{dt^n} \right|_{t=t_0} \quad (\text{B.2})$$

que por sua vez, vimos no Cap.2 que este pode ser escrito em termos dos parâmetros atuais de Hubble, desaceleração, *jerk* e *snap*

$$a(t) = a_0 \left[1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2!} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 + \frac{1}{3!} j_0 H_0^3 (t - t_0)^3 + \frac{1}{4!} s_0 H_0^4 (t - t_0)^4 + \dots \right]. \quad (\text{B.3})$$

Substituindo a Eq.(B.3) na Eq.(B.1), obtemos

$$z = \left[1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2!} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 + \frac{1}{3!} j_0 H_0^3 (t - t_0)^3 + \frac{1}{4!} s_0 H_0^4 (t - t_0)^4 + \dots \right]^{-1} - 1. \quad (\text{B.4})$$

Fazendo

$$x = H_0(t - t_0) - \frac{1}{2!}q_0H_0^2(t - t_0)^2 + \frac{1}{3!}j_0H_0^3(t - t_0)^3 + \frac{1}{4!}s_0H_0^4(t - t_0)^4, \quad (\text{B.5})$$

e lembrando que

$$(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots, \quad (\text{B.6})$$

que por sua vez, $x = v + w$ com $v = aT + bT^2$ e $w = cT^3 + dT^4$, onde

$$a = H_0, \quad (\text{B.7})$$

$$b = -\frac{1}{2}q_0H_0^2, \quad (\text{B.8})$$

$$c = \frac{1}{6}j_0H_0^3, \quad (\text{B.9})$$

$$d = \frac{1}{24}s_0H_0^4 \quad (\text{B.10})$$

e

$$T = (t - t_0), \quad (\text{B.11})$$

podemos calcular

$$\begin{aligned} x^2 &= (v + w)^2 = v^2 + 2vw + w^2 \\ x^2 &= a^2T^2 + 2abT^3 + b^2T^4 + 2acT^4 + \dots = a^2T^2 + 2abT^3 + (b^2 + 2ac)T^4 + \dots \\ x^2 &= H_0^2T^2 + 2H_0 \left(-\frac{1}{2}q_0H_0^2 \right) T^3 + \left(\frac{q_0^2H_0^4}{4} + 2H_0 - \frac{1}{6}j_0H_0^3 \right) T^4 + \dots \\ x^2 &= H_0^2T^2 - q_0H_0^3T^3 + \frac{1}{12}(3q_0^2 + 4j_0)H_0^4T^4 \\ x^2 &= H_0^2(t - t_0)^2 - q_0H_0^3(t - t_0)^3 + \frac{1}{12}(3q_0^2 + 4j_0)H_0^4(t - t_0)^4, \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{aligned} x^3 &= (v + w)^3 = (v + w)^2(v + w) \\ x^3 &= [a^2T^2 + 2abT^3 + (b^2 + 2ac)T^4 \dots](aT + bT^2 + cT^3 + dT^4 \dots) \\ x^3 &= a^3T^3 + a^2bT^4 + 2a^2bT^4 + \dots = a^3T^3 + 3a^2bT^4 + \dots \\ x^3 &= H_0^3T^3 + 3H_0^2 \left(-\frac{1}{2}q_0H_0^2 \right) T^4 + \dots \\ x^3 &= H_0^3(t - t_0)^3 - \frac{3}{2}q_0H_0^4(t - t_0)^4 + \dots, \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$$x^4 = a^4 T^4 + \dots = H_0^4 T^4 + \dots, \quad (\text{B.14})$$

então,

$$\begin{aligned} z &= 1 - H_0(t - t_0) + \frac{1}{2}q_0 H_0^2(t - t_0)^2 - \frac{1}{6}j_0 H_0^3(t - t_0)^3 - \frac{1}{24}s_0 H_0^4(t - t_0)^4 + \\ &H_0^2(t - t_0)^2 - q_0 H_0^3(t - t_0)^3 + \frac{1}{12}(3q_0^2 + 4j_0)H_0^4(t - t_0)^4 - H_0^3(t - t_0)^3 + \\ &\frac{3}{2}q_0 H_0^4(t - t_0)^4 + H_0^4(t - t_0)^4 + \dots - 1 \\ z &= H_0(t_0 - t) + \frac{1}{2}(2 + q_0)H_0^2(t - 0 - t)^2 + \frac{1}{6}(6 + 6q_0 + j_0)H_0^3(t_0 - t)^3 + \\ &\frac{1}{24}(24 + 36q_0 + 6q_0^2 + 8j_0 - s_0)H_0^4(t_0 - t)^4 + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Podemos calcular o *Lookback time* a partir da equação acima, utilizando o método de inversão de série, ou seja,

$$z = eT + fT^2 + gT^3 + hT^4, \quad (\text{B.16})$$

$$T = \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4. \quad (\text{B.17})$$

Substituindo a Eq.(B.16) na Eq.(B.17), obtemos

$$\begin{aligned} T &= \alpha(eT + fT^2 + gT^3 + hT^4) + \beta(eT + fT^2 + gT^3 + hT^4)^2 + \\ &\gamma(eT + fT^2 + gT^3 + hT^4)^3 + \delta(eT + fT^2 + gT^3 + hT^4)^4, \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

com

$$e = H_0, \quad (\text{B.19})$$

$$f = \frac{1}{2}(2 + q_0)H_0^2, \quad (\text{B.20})$$

$$g = \frac{1}{6}(6 + 6q_0 + j_0)H_0^3, \quad (\text{B.21})$$

$$h = \frac{1}{24}(24 + 36q_0 + 6q_0^2 + 8j_0 - s_0)H_0^4 \quad (\text{B.22})$$

e $T = t_0 - t$ sendo α , β , γ e δ constantes a ser determinadas. Fazendo $u = eT + fT^2$ e $t = gT^3 + hT^4$ e lembrando que

$$(u + t)^2 = e^2 T^2 + 2efT^3 + (f^2 + 2eg)T^4 + \dots$$

$$(u + t)^3 = e^3 T^3 + 3e^2 f T^4 + \dots$$

$$(u + t)^4 = e^4 T^4 + \dots$$

que substituídos na equação Eq.(B.18), nos fornece

$$\begin{aligned} T = & \alpha e T + \alpha f T^2 + \alpha g T^3 + \alpha h T^4 + \beta e^2 T^2 + 2\beta e f T^3 + \\ & \beta(f^2 + 2eg)T^4 + \gamma e^3 T^3 + 3\gamma e^2 b T^4 + \delta e^4 T^4 + \dots \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} T = & \alpha e T + (\alpha f + \beta e^2)T^2 + (\alpha g + 2\beta e f + \gamma e^3)T^3 + \\ & (\alpha h + \beta f^2 + 2\beta e g + 3\gamma e^2 f + \delta e^4). \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Percebe-se que

$$\alpha e = 1,$$

$$\alpha f + \beta e^2 = 0,$$

$$\alpha g + 2\beta e f + \gamma e^3 = 0,$$

$$\alpha h + \beta f^2 + 2\beta e g + 3\gamma e^2 f + \delta e^4 = 0.$$

Com as equações acima, podemos encontrar as constantes α , β , γ e δ , ou seja,

$$\alpha = \frac{1}{H_0}, \quad (\text{B.24})$$

$$\beta = -\frac{2 + q_0}{2H_0}, \quad (\text{B.25})$$

$$\gamma = \frac{6 + 6q_0 + 3q_0^2 - j_0}{6H_0}, \quad (\text{B.26})$$

$$\delta = \frac{-24 - 36q_0 - 36q_0^2 - 15q_0^3 + 10q_0 j_0 + 12j_0 + s_0}{24H_0}, \quad (\text{B.27})$$

que substituídos na Eq.(B.17), nos dá

$$\begin{aligned} LT_c = t_0 - t = & \frac{1}{H_0} \left[z - \frac{1}{2}(2 + q_0)z^2 + \frac{1}{6}(6 + 6q_0 + 3q_0^2 - j_0)z^3 + \right. \\ & \left. \frac{1}{24}(-24 - 36q_0 - 36q_0^2 - 15q_0^3 + 10q_0 j_0 + 12j_0 + s_0)z^4 + \right. \\ & \left. + O(z^5) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

que é o *Lookback Time* cosmográfico (LT_c) em função do z – *redshift* até a quarta ordem. Podemos facilmente calcular o LT_c cosmográfico em função de y – *redshift* utilizando a parametrização já comentada no Cap.2

$$z = \frac{y}{1-y},$$

que substituída na Eq.(B.28) nos fornece

$$LT_c = \frac{1}{H_0} \left[y(1-y)^{-1} - \frac{1}{2}(2+q_0)y^2(1-y)^{-2} + \frac{1}{6}(6+6q_0+3q_0^2-j_0)y^3(1-y)^{-3} + \frac{1}{24}(-24-36q_0-36q_0^2-15q_0^3+10q_0j_0+12j_0+s_0)y^4(1-y)^{-4} + O(y^5) \right]. \quad (\text{B.29})$$

Utilizando as expansões

$$\begin{aligned} (1-y)^{-1} &= 1+y+y^2+y^3+\dots, \\ (1-y)^{-2} &= 1+2y+3y^2+\dots, \\ (1-y)^{-3} &= 1+3y+\dots, \\ (1-y)^{-4} &= 1+\dots, \end{aligned}$$

temos,

$$LT_c = \frac{1}{H_0} \left[y(1+y+y^2+y^3+\dots) - \frac{1}{2}(2+q_0)y^2(1+2y+3y^2+\dots) + \frac{1}{6}(6+6q_0+3q_0^2-j_0)y^3(1+3y+\dots) + \frac{1}{24}(-24-36q_0-36q_0^2-15q_0^3+10q_0j_0+12j_0+s_0)y^4 + O(y^5) \right], \quad (\text{B.30})$$

ou

$$LT_c = \frac{1}{H_0} \left[y - \frac{q_0}{2}y^2 + \frac{1}{6}(3q_0^2-j_0)y^3 + \frac{1}{24}(-15q_0^3+10q_0j_0+s_0)y^4 + O(y^5) \right], \quad (\text{B.31})$$

que é o *Lookback Time* cosmográfico em função do y – *redshift* até a ordem 4.

Referências Bibliográficas

- [1] LEMAÎTRE, G. *Annales de la Societe Scietifique de Bruzelles*, v. 47, p. 49, 1927.
- [2] EINSTEIN, A. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, p. 844-847, 1915.
- [3] FRIEDMANN, A. Z. *Zeitschrift fur Physik*, v. 10, p. 377, 1922.
- [4] HUBBLE, E. P. *A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae*, *Proc. Natl. Acad. Sci.* v. 15, p. 168, 1929.
- [5] HUBBLE, E. P. and HUMASON, M. L. *The velocity-distance relation among extragalactic nebulae*, *Astrophysical Journal*, v. 74, p. 43, 1931.
- [6] GAMOW G., *My world line*, *Wiking press, 1st Ed. New York, N. Y.*, 1970
- [7] PERSIC, P. S. M. and STEL, F. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 281, p. 27, 1996.
- [8] RIESS, A. G. *et al.*, *Astrophys. J.*, v. 116, p. 1009, 1998.
- [9] ASTIER, P. *et al.*, *Astron. Astrop.*, v. 447, p. 31, 2006.
- [10] BERNARDIS, P. de. *et al.*, *Nature (London)*, v. 404, p. 995, 2000.
- [11] SPERGEL, D. N. *et al.*, *ApJS*, v. 148, p. 175, 2003.
- [12] SPERGEL, D. N. *et al.* *arxiv: 0603.449.*, v. 447.
- [13] TEDMARK, M. *et al.*, *Astrophys. J.*, v. 484, p. 581, 1997.
- [14] EISENSTEIN, D. *et al.*, *Astrophys. J.*, v. 663, p. 560, 2005.
- [15] KRAUSS, L. and TURNER, M. *Gen. Rel. Grav.*, v. 27, p. 1137, 1995.
- [16] CHABOYER, B. *Nuclear Physics B Proceedings Supplements*, v. 51, p. 10, 1996.
- [17] JIMENEZ, R. *ASP Conf. Ser. 126: From Quantum Fluctuations to Cosmological Structures*, v. 126, p. 411, 1997.
- [18] ALCANIZ, J. and LIMA, J. *Astrophys. J.*, v. 87, p. 521, 1999a.
- [19] CALBERG, R. *et al.*, *Astrophys. J.*, v. 462, p. 32, 2006.

- [20] PERLMUTTER, S. *et al.*, *Astrophys. J.*, v. 517, p. 565, 1999.
- [21] CARROL, S. *Liv. Rev. Rel.*, v. 4, p. 1, 2001.
- [22] TEGMARK M. *et al.*, *Phys.Rev.*, 103501 D69, 2004.
- [23] OZER, M. and TAHA, M. O., *Phys. Lett.* B171, p. 363, 1986
- [24] OZER, M. and TAHA, M. O., *Phys. Lett.* B287, p. 776, 1987
- [25] BERTOLAMI, O., *Nuovo Cimento Soc. Ital. Fis.*, B93, P. 36, 1986
- [26] WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General of Relativity*. 1^a Ed., New York: Wiley; 1972.
- [27] LUONGO, O. *Cosmography with the hubble parameter*. Word Scientific, v. 26, p. 14591466, 2011.
- [28] VISSER, M. *Cosmography: Cosmology without the einstein equations*. *Gen.Rel.Grav. arXiv:gr-qc/0411131*, v. 37, p. 15411548, 2005.
- [29] CATTOEN, C. and VISSER, M. *The hubble series: Convergence properties and redshift variables*. *Class.Quant.Grav. arXiv:0710.1887*, v. 1, 2007.
- [30] BUTKOV, E. *Mathematical Physics*. 1^a Ed., Addison-Wesley; 1973.
- [31] ADE, P. and AGHANIM, N. *et al. Planck Collaboration*, *arXiv:1303.5076*, 2013
- [32] GAMOW, G. *Phys. Rev.*, v. 70, p. 572, 1946.
- [33] SCHRAMM, D. and TURNER, M. *Rev. Mod. Phys.*, v. 70, p. 303318, 1998.
- [34] STEIGMAN, G. *Measuring and Modeling the Universe*. p. 169, 2004.
- [35] STEIGMAN, G. *The Local Group as an Astrophysical Laboratory*. p. 16, 2006.
- [36] MATHER, J. C. *et al.*, *Astrophys. J.*, v. 512, p. 511, 1999.
- [37] MATHER, J. *et al.*, *Astrophys. J.*, v. 511, p. 512, 1999.
- [38] RYDEN, B. *Introduction in Cosmology*, 2006.
- [39] HINSHAW, G. *et al.*, *Astrophys. J. Supp.*, v. 148, p. 135, 2003.
- [40] LARSON. *et al.*, *arXiv:1001.4635*.
- [41] DANTAS, M. A. *Galáxias em altos redshifts e a natureza da energia escura*. Dissertação (Mestrado), Rio de Janeiro.
- [42] STAROBINSKY, A. A. , *JETP Lett.*, v. 30, p. 682, 1979.
- [43] KAZANAS, D., *Astrophys. J.*, L59, 241, 1980.

- [44] SATO, K. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 195, p. 467, 1981.
- [45] GUTH, A. *Phys. Rev.*, D23, p. 347, 1981.
- [46] LINDE, A. D. *Phys. Lett. B* v. 108, p. 389, 1982.
- [47] ALBRECHT, A. and STEINHARDT, P. *Phys. Rev. Lett.* v. 48, p. 1220, 1982.
- [48] VISSER, M. *General relativistic energy conditions: The Hubble expansion in the epoch of galaxy formation. doi:10.1103/PhysRevD.56.7578*, *Phys. Rev.*, v. D, p. 56, 1997.
- [49] CAPOZZIELLO, S. *et al. Cosmographic constraints and cosmic uids. Galaxies*, v. 1, p. 216260, 2013.
- [50] WEINBERG, S. *Cosmology*. 1^a Ed. United States: Oxford, 1972.
- [51] PEEBLES, P. J. E. *Principles of physical cosmology*, Princeton University Press, 1993.
- [52] ARFKEN, G. and WEBER, H. *Mathematical Methods for Physicists*. 5^a Ed. Harcourt, 2001.
- [53] DANTAS, M. A. *Cosmologias alternativas: aspectos observacionais e teóricos*. Tese (Doutorado)-ON, Abril 2011.
- [54] SIMON, J., VERDE, L. and JIMENEZ, J. *Phys. Rev.*, D71, p. 123001, 2005.
- [55] TREU, T. *et al. MNRAS*, v. 308, p. 1037, 1999.
- [56] TREU, T. *et al. MNRAS*, v. 326, p. 221, 2001.
- [57] JIMENEZ, R. *et al, MNRAS*, v. 349, p. 240, 2004.
- [58] ABRAHAM, R. *et al., AJ*, 127, p. 2455, 2004.
- [59] DUNLOP, J. *et al. Nature*, v. 381, p. 581, 1996.
- [60] NOLAN, L., DUNLOP, J. and JIMENEZ, R. *MNRAS*, v. 323, p. 385, 2001.
- [61] SPERGEL, D. *et al. Astrophys. J. Suppl.*, v. 170, p. 377, 2007.
- [62] DUNKLEY, J. *et al. [WMAP Collaboration], Astrophys. J.*, v. 701, p. 1804, 2009.
- [63] CRAWFORD, S. M. *et. al. MNRAS*, v. 406, p. 2569, 2010
- [64] BENDALY, C. A. P. *et al. Forecasting cosmological constraints from age of high-z galaxies. Astron. Astrop.*, 2013.
- [65] VISSER, M. *Phys. Rev.*, D78, p. 063501, 2008.
- [66] REBOLO, R. *et al., Mon. Not. R. Astron. Soc.*, v. 353, p. 747, 2004.
- [67] POPE, A. C. *et al., Astrop. J.*, v. 607, p. 655 2004..