

Universidade do Estado do Rio Grande do Norte
Faculdade de Ciências Exatas e Naturais-FANAT
Departamento de Física
Programa de Pós-Graduação em Física

Marcelo Nobre dos Santos Beserra

Termodinâmica e Energia Escura

Mossoró

2014

Marcelo Nobre dos Santos Beserra

Termodinâmica e Energia Escura

Dissertação apresentada ao programa
de Pós-graduação em Física como parte
dos requisitos para obtenção do título
de MESTRE EM FÍSICA

Orientador: Prof. Dr. Fábio Cabral Carvalho

Mossoró

2014

Marcelo Nobre dos Santos Beserra

Termodinâmica e Energia Escura

Dissertação apresentada ao programa
de Pós-graduação em Física como parte
dos requisitos para obtenção do título
de MESTRE EM FÍSICA

Aprovada em 27/01/2014

Banca Examinadora

Prof. Dr. Fábio Cabral Carvalho
Orientador

Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto
Examinador externo

Prof. Dr. Edésio Miguel Barboza Júnior
Examinador interno

Sumário

Lista de Figuras	ii
1 Introdução	1
2 O Modelo Cosmológico Padrão	7
2.1 O Princípio Cosmológico	7
2.2 Diagrama de Hubble	9
2.3 A Métrica de Robertson-Walker	11
2.4 A Teoria da Relatividade Geral	16
2.5 Modelos de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	19
2.5.1 Universo Dominado por Matéria	19
2.6 Evolução Térmica do Universo após o Big Bang	23
3 Termodinâmica e Relatividade Especial	27
3.1 Leis da Termodinâmica	28
3.2 Transformações de Lorentz para grandezas termodinâmicas	29
3.2.1 Volume e Pressão	30
3.2.2 Energia e Trabalho	32
3.2.3 Entropia	34
3.2.4 Calor e Temperatura	34

3.2.5	Aspectos Qualitativos da Transformação de Temperatura . . .	36
4	Termodinâmica Aplicada a Energia Escura	37
4.1	Lei de Evolução da Temperatura	37
4.2	Distribuição Espectral e a Natureza da Energia Escura	40
4.3	Um Modelo Paramétrico para a Energia Escura	42
4.3.1	Parametrização I	43
4.3.2	Parametrização II	43
4.3.3	Parametrização III	44
5	Conclusões e Perspectivas	51
	Bibliografia	54

Lista de Figuras

1.1	Distribuição percentual da densidade total de energia do Universo. A matéria ordinária que compõem as estrelas e galáxias contribuem com 4,9% da densidade tota de energia do Universo. Matéria escura, que é detectada indiretamente devido sua influência gravitacional sobre matéria ordinária, corresponde a 26,8%, enquanto energia escura, a componente misteriosa que é responsável por acelerar a expansão do Universo responde por 68,3%. Figura retirada de ESA and the Planck Collaboration	4
2.1	Representação de um Universo homogêneo e isotrópico.	8
2.2	Triângulo definido por três galáxias em um Universo em expansão uniforme.	9
2.3	Gráfico da velocidade versus distância estimada para um conjunto de 1355 galáxias. A relação linear implica na lei de Hubble. O espalhamento considerável é devido às incertezas, mas o <i>best-fit</i> coincide precisamente com a lei de Hubble. Figura retirada de [1].	10
2.4	Representação das possíveis geometrias do Universo.	16
2.5	Esboço da evolução da densidade de energia: (i) radiação, (ii) matéria e (iii) constante cosmológica.	18

2.6	Evolução do fator de escala nos modelos FLRW aberto (curva de cima), FLRW plano (curva do meio) e FLRW fechado (curva de baixo). . . .	22
2.7	Evolução Térmica do Universo.	25
3.1	Sistemas de coordenadas O e O'.	30
3.2	Volume medido por um observador movendo-se com velocidade \vec{v} . . .	31
4.1	Evolução da lei de temperatura para as componentes: (i) radiação (linha pontilhada), (ii) matéria (linha tracejada) e (iii) constante cosmológica (linha cheia)	40
4.2	Parametrização I.	45
4.3	Como podemos observar nos gráficos acima, a componente de energia escura tem temperaturas diferentes no passado, altos <i>redshifts</i> , dependendo dos valores dos parâmetros ω_0 e ω_1 , negativos ou positivos. Em qualquer situação, a temperatura da componente de energia escura hoje, medida em unidades de T_0 , independe do valor do parâmetro ω_1 .	46
4.4	Parametrização II.	47
4.5	Podemos observar nesse gráficos que o nível de temperatura da componente de energia escura depende fortemente dos valores de ω_0 e ω_1 em ambos os limites de baixos e altos <i>redshifts</i> . É importante observar que o modelo com $\omega_1 = -0,3$, dominante no passado, prevê um nível de temperatura menor que o modelo com $\omega_1 = -0,7$ a partir de $z = 1,7$. O modelo com $\omega_1 = -0,7$, subdominante no passado, torna-se dominante hoje. Nos casos em que atribuímos valores positivos para ω_1 ocorreu uma inversão completa. Os regimes dominantes no passado tornaram-se dominantes hoje.	48
4.6	Parametrização III	49

4.7 Os modelos com valores de ω_1 negativos prevêem um nível de temperatura para a energia escura menor que o estimado pelo modelo Λ CDM. No entanto, a temperatura da componente de energia escura independe de ω_1 hoje. Nos casos em que atribuímos valores positivos para ω_1 os três modelos diferem fortemente no passado, mas prevêem a mesma razão T/T_0 hoje. 50

Agradecimentos

- À Deus, pela sua fascinante criação e pelo dom da vida;
- À minha avó “D. Zefinha” (*in memoriam*), pelo amor e educação que recebi;
- Ao meu primo, Vladson, pelo modelo em que procuro me espelhar sempre e por ter-me ensinado a ser nobre, na essência da palavra;
- À todos os meus familiares, irmãos, primos, tios e sobrinhos, que direta ou indiretamente me incentivaram;
- Aos meus amigos, Adriano, Lessandro e Tiago, pelos momentos divididos juntos que tornaram mais leve meu trabalho. Aos poucos nos tornamos mais que amigos, quase irmãos... Obrigado por dividir comigo as angústias e alegrias e ouvirem minhas bobagens. Foi bom contar com vocês;
- À minha amada noiva, Daniele, por ser tão importante na minha vida. Sempre ao meu lado, me colocando para cima e me fazendo acreditar que posso mais que imagino. Devido a seu companheirismo, amizade, “paciência”, compreensão, apoio, alegria e amor, este trabalho pôde ser concretizado. Obrigado por ter feito do meu sonho o nosso sonho;
- Aos meus futuros sogros, Francimar e Socorro, pelo incentivo e apoio. Obrigado pelo carinho;

- Aos professores, funcionários e colegas do Curso de Licenciatura Plena em Física da FAFIDAM (UECE), pelos ensinamentos, orientações e amizade, que me ajudaram ativa ou passivamente neste projeto. Vocês também foram referenciais para mim;
- Ao meu orientador, Prof. Dr. Fábio Cabral Carvalho, muito obrigado pela ajuda, ensinamentos, orientações e contribuições. Por me receber em sua sala de portas abertas e sempre estar à disposição, respondendo minhas dúvidas e me incentivando a acreditar que tudo daria certo. Realmente, deu certo, e você é parte essencial desse trabalho;
- Ao professor Dr. Edésio Miguel Barboza Júnior, pela competência e disposição em compartilhar experiências ao longo das disciplinas ministradas;
- Ao Prof. Dr. Nilson Sena de Almeida, por contribuir para o meu crescimento profissional e por ser também um exemplo a ser seguido.
- Aos demais professores, funcionários e colegas do Programa de Pós-Graduação em Física da UERN, pela oportunidade ímpar de crescimento acadêmico e também pessoal. A todos, obrigado pelo privilégio de aprender e contribuir;
- À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta dissertação estudamos propriedades termodinâmicas de modelos de energia escura. Obtemos a lei de temperatura para os modelos de energia escura dependentes do tempo com equação de estado parametrizada. Analisamos, em particular, o comportamento de três parametrizações: (i) $\omega(z) = \omega_0 + \omega_1 \frac{z}{1+z}$, (ii) $\omega(z) = \omega_0 + \omega_1 \ln(1+z)$ e (iii) $\omega(z) = \omega_0 + \omega_1 \frac{z(1+z)}{1+z^2}$. As parametrizações (i) e (ii) são os conhecidos modelos CPL e logarítmico, respectivamente. Estas parametrizações possuem divergências conhecidas na literatura para alguns valores de *redshift*. A parametrização CPL diverge em $z \rightarrow -1$ e a parametrização logarítmica diverge em $z \rightarrow \infty$. Por outro lado, a parametrização (iii), proposta pelos autores de [2], é bem definida em todo o intervalo de *redshift*. Mostramos que a temperatura da componente de energia escura hoje, prevista pelo modelo (i), é independente dos valores de ω_1 . Enquanto a temperatura da energia escura depende fortemente dos valores do parâmetro ω_1 em altos *redshifts*. No caso do modelo (ii), a temperatura da componente de energia escura depende fortemente dos valores de ω_1 . Observamos, também, nesta parametrização, uma inversão completa de domínio, visto que modelos subdominantes no passado se tornam dominantes hoje. Descobrimos ainda que a temperatura da componente da energia escura hoje, prevista pelo modelo (iii), é independente dos valores de ω_1 , mas varia fortemente no Universo primordial.

Abstract

In this dissertation we study thermodynamic properties of dark energy models. We obtain the temperate law for time-dependent dark energy models with parametrized equation of state. We analyse, in particular, the the behavior of three parameterizations: (i) $\omega(z) = \omega_0 + \omega_1 \frac{z}{1+z}$, (ii) $\omega(z) = \omega_0 + \omega_1 \ln(1+z)$ e (iii) $\omega(z) = \omega_0 + \omega_1 \frac{z(1+z)}{1+z^2}$. The parameterizations (i) and (ii) are the models CPL and logarithmic, respectively. These parameterizations have divergences known in the literature for some values of redshift. The parameterization CPL diverge in $z \rightarrow -1$ and the parameterization logarithmic diverge in $z \rightarrow \infty$. On the other hand, the parameterization (iii), proposed by the authors of [2], is well-defined over the whole redshift interval. We show that the current temperature of the dark energy component, predicted by the model (i), is independent of the values of ω_1 . While the dark energy temperature depends strongly of the values of the parameter ω_1 at high redshifts. In the case of the model (ii), the temperature of the dark energy component depends strongly of the values of the parameter ω_1 at low and high redshifts. Also, we observe, in this parameterization, a complete inversal of domain, since the subdominant models in the past become dominants today. We find out that the current temperature of the dark energy component, predicted by the model (iii), is independent of the values of ω_1 , but varies strongly with the values of the parameter ω_1 in the primordial Universe.

Capítulo 1

Introdução

Nos últimos vinte anos, o entendimento da formação e evolução do Universo teve avanços notáveis. Projetos como o COBE (Cosmic Background Explorer Satellite) [3], HST (Hubble Space Telescope) [4], WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) [5], CHANDRA (Chandra X-ray Observatory) [6] e SCP (Supernove Cosmology Project) [7, 8] nos ajudaram a construir um quadro muito rico da história do Universo, desde épocas primordiais até os dias atuais. O satélite COBE inaugurou uma nova era na Cosmologia, chamada por alguns de era da precisão. Suas principais descobertas, agraciadas com o Prêmio Nobel de Física de 2006, foram a constatação que a radiação cósmica de fundo (RCF) tinha um espectro de corpo negro perfeito com temperatura de $2.725 \pm 0.002K$ [9] e que possuía anisotropias intrínsecas extremamente fracas, i.e, a intensidade da radiação cósmica de fundo (RCF) varia de cerca de uma parte em 100.000 [10]. Estas duas características do Universo haviam sido previstas por George Gamow e colaboradores na década de 40, quando buscavam entender a formação de hélio no Universo primordial. As descobertas de Gamow ajudaram a tornar o Modelo do Big Bang a teoria mais amplamente aceita sobre a origem e evolução do Universo. O satélite WMAP complementou as descobertas do COBE e de diversos experimentos posteriores que estudavam as anisotropias da RCF

(ver, p. ex., [11, 12, 13, 14]), mostrando que tais anisotropias implicavam em um Universo espacialmente plano, além de indicar a possibilidade da RCF ser polarizada [15]. O segundo conjunto de dados do WMAP, publicado em 2006, permitiu testar vários modelos de inflação cosmológica e o descarte de alguns modelos do tipo lei de potência [16, 17, 18, 19].

Do ponto de vista teórico, o modelo do Big Bang, baseado na hipótese fundamental de que no início de sua formação o Universo seria extremamente quente e denso, fornece um cenário segundo o qual sua densidade total de energia é constituída por quatro componentes fundamentais: matéria relativística ou quente (radiação), matéria não-relativística ou fria (bárions), matéria escura e energia escura. Radiação e bárions representam apenas 5% do conteúdo total de energia, enquanto as componentes escuras representam expressivos 95%. A base matemática do modelo do Big Bang é construída supondo-se a validade da Relatividade Geral e do princípio cosmológico, segundo o qual, em larga escala, o Universo é homogêneo e isotrópico. Portanto, se a Relatividade Geral realmente estiver correta em grande escala, 95% do Universo é “escuro”, i.e., só interage gravitacionalmente com a matéria bariônica. Como ainda não conhecemos a natureza física do setor escuro, podemos afirmar que o entendimento atual que temos do Universo é bastante incompleto.

A matéria escura foi descoberta na década de 30, quando o astrônomo suíço Fritz Zwicky mostrou que a maior parte da massa de um aglomerado não interage com a matéria visível. Ele chegou a essa conclusão estudando as velocidades das galáxias no aglomerado de Coma e aplicando o teorema do virial. A matéria escura é caracterizada por ter pressão nula e só interagir gravitacionalmente com as outras componentes do Universo.

No contexto do modelo do Big Bang, ela é uma componente muito importante do Universo, pois define a formação de galáxias e aglomerados de galáxias, influencia

todos os aspectos de sua estrutura, além de ter efeitos mensuráveis sobre a anisotropia da RCF. Sua distribuição pode ser mapeada diretamente por meio de lentes gravitacionais e pode ser inferida indiretamente tanto da dinâmica de galáxias e de gás intergalático como da estrutura das flutuações na RCF. Recentemente, a equipe do telescópio de raios-X Chandra, da NASA, divulgou a primeira observação direta da matéria escura [6, 20, 21]. Vale salientar que, além do Chandra, os astrônomos precisaram utilizar os telescópios Hubble, VLT e Magellan para completar suas observações. Para mapear o comportamento do campo gravitacional durante a colisão de duas galáxias, os astrofísicos do Chandra, liderados por Doug Clowe (Arizona) e Maxim Markevitch (CfA), utilizaram o conhecido fenômeno das lentes gravitacionais, que prevê a alteração da trajetória da luz proveniente de galáxias mais distantes devido à ação gravitacional de grandes massas.

A expansão acelerada do Universo foi descoberta em 1997 por dois grupos (Supernovae Cosmology Project (SCP) [7] e High-Z Supernovae Search Team (HZSNST) [8]) que, de forma independente, mediram distâncias de luminosidade de supernovas do tipo Ia. Esta foi a primeira comprovação direta de que o modelo de matéria escura fria (CDM) deveria ser abandonado. No modelo CDM, o Universo é formado apenas por bárions (elementos pesados), fótons, neutrinos e matéria escura. Isso gera uma densidade de massa insuficiente para produzir um Universo plano como mostrado por observações da RCF.

No entanto, a energia escura, se existe, possui propriedades físicas incomuns e, devido a este fato, é muito difícil decifrar sua natureza física. Por exemplo, ela deve ter pressão negativa, o que implica numa gravidade repulsiva e uma vez que diferentemente da matéria escura, ela não se aglomera mais em alguns lugares que em outros, devendo estar espalhada suavemente por toda parte. Seus efeitos só são percebidos, em escalas cosmológicas, na dinâmica da taxa de expansão do Universo.

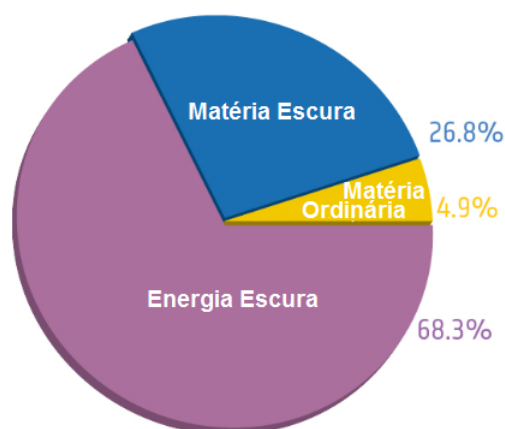


Figura 1.1: Distribuição percentual da densidade total de energia do Universo. A matéria ordinária que compõem as estrelas e galáxias contribuem com 4,9% da densidade tota de energia do Universo. Matéria escura, que é detectada indiretamente devido sua influência gravitacional sobre matéria ordinária, corresponde a 26,8%, enquanto energia escura, a componente misteriosa que é responsável por acelerar a expansão do Universo responde por 68,3%. Figura retirada de ESA and the Planck Collaboration

Atualmente existe um grande número de modelos que conseguem explicar satisfatoriamente os dados astrofísicos que mostram que, recentemente, o Universo entrou em uma fase de expansão acelerada [22, 23]. Na verdade essa degenerescência de modelos constitui um problema adicional à hipótese da energia escura, pois mesmo considerando todos os dados observacionais disponíveis hoje, não temos condições de afirmar qual desses modelos apresenta a melhor descrição do fenômeno em questão. Até o momento, o critério mais claro que temos para dizer qual é o melhor modelo de energia escura é o da simplicidade. E por este critério, o modelo Λ CDM, que adiciona mais um ingrediente ao antigo modelo CDM (a constante cosmológica de Einstein), é o preferido pela maioria dos cosmólogos. Uma característica interessante desse modelo é que a energia escura descrita pela constante cosmológica está associada à densidade de energia do vácuo [24, 25]. No entanto, o modelo Λ CDM

apresenta um grande problema, chamado *problema da constante cosmológica*, que é uma incompatibilidade, aparentemente sem solução, entre a densidade de energia do vácuo prevista pelo modelo e a densidade observada. Os dois valores diferem por 120 ordens de grandeza. Outro problema do modelo Λ CDM é que ele não explica o motivo pelo qual a densidade de energia hoje é comparável à densidade de matéria. Este é o chamado *problema da coincidência*.

Diante desses problemas, muitos autores começaram a trabalhar com modelos de energia escura dinâmicos, tais como os modelos de quintessência. Nesses modelos, a energia escura é descrita por um campo escalar, cuja dinâmica é definida pela energia potencial associada a ele. Os modelos de quintessência têm a vantagem de amenizar alguns problemas do modelo Λ CDM, mas não os resolvem completamente e, em geral, são complicados e difíceis de extrair informações sobre sua evolução cosmológica. Além disso, a origem desses modelos é desconhecida, o que dificulta a escolha do potencial do campo escalar. A melhor possibilidade é que os modelos de quintessência estejam relacionados com a física de dimensões extras. Modelos mais “exóticos” de energia escura, como aqueles baseados no gás de Chaplygin [26]; e modelos de unificação entre matéria escura e energia escura, como modelos de quartessência [27, 28], também têm sido bastante explorados na literatura. O que parece claro, devido às dificuldades que temos enfrentado com o modelo Λ CDM, é que, para estudar as propriedades do Universo primordial, no contexto da Relatividade Geral, é mais conveniente trabalhar com modelos dinâmicos como quintessência, quartessência etc.

O presente trabalho encontra-se assim organizado. No capítulo 2 fazemos uma abordagem simples, mas objetiva, sobre o Modelo Cosmológico Padrão. Apresentamos o Princípio Cosmológico (PC), enunciado inicialmente por Milne, em 1933 [29] e a Teoria da Relatividade Geral (TRG), proposta por Einstein no início do século XX. Neste capítulo também abordamos a Lei de Hubble, deduzimos o elemento de linha mais geral que descreve um espaço-tempo homogêneo e isotrópico e chegamos as

soluções das equações de Friedmann para um Universo dominado por matéria. Finalizamos o capítulo 2 com uma descrição matemática e conceitual da evolução térmica do nosso Universo.

No capítulo 3 usamos a Teoria da Relatividade Especial (TRE) proposta por Einstein em 1905 para realizarmos uma extensão da Termodinâmica clássica à sistemas relativísticos. Apresentamos as Leis da Termodinâmica e obtemos as Transformações de Lorentz para grandezas termodinâmicas.

No capítulo 4 investigamos as propriedades termodinâmicas de modelos de energia escura dinâmicos no contexto da Relatividade Geral. Obtemos a lei de evolução da temperatura de um Universo plano descrito pela métrica de Robertson-Walker e descrito pelas equações de estado: (i) $\omega(z) = \omega_0 + \omega_1 \frac{z}{1+z}$, (ii) $\omega(z) = \omega_0 + \omega_1 \ln(1+z)$ e (iii) $\omega(z) = \omega_0 + \omega_1 \frac{z(1+z)}{1+z^2}$.

Capítulo 2

O Modelo Cosmológico Padrão

O Modelo Cosmológico Padrão (MCP), conhecido também como teoria do *Big Bang*, tem como base o Princípio Cosmológico e a Teoria da Relatividade Geral de Einstein (TRG). De acordo com essa teoria o Universo surgiu de um estado extremamente quente e denso, chamado de plasma primordial. Neste estado a temperatura do Universo era elevada o suficiente para manter as quatro interações fundamentais - gravitacional, eletromagnética, nuclear fraca e nuclear forte - acopladas. O mecanismo responsável por iniciar a expansão do plasma primordial não é conhecido, visto que não existe uma teoria de gravitação quântica que forneça uma descrição física satisfatória desse período do Universo.

2.1 O Princípio Cosmológico

O princípio cosmológico estabelece que em escalas suficientemente grandes o Universo é homogêneo e isotrópico, i.e., suas características gerais são as mesmas para

qualquer observador [30].

No caso da homogeneidade supõe-se que a matéria está uniformemente distribuída através do espaço em larga escala. No caso da isotropia supõe-se que o Universo é o mesmo quando visto em qualquer direção.

Assim, os cosmólogos supuseram que ao olharmos em qualquer direção do espaço, desde que em escalas suficientemente grandes, devemos observar a mesma distribuição de matéria [31]. Isto significa que no Universo não existe referenciais ou direções privilegiadas. Este princípio, referente às características do Universo em grande escala, foi enunciado inicialmente por Milne em 1933 [29].

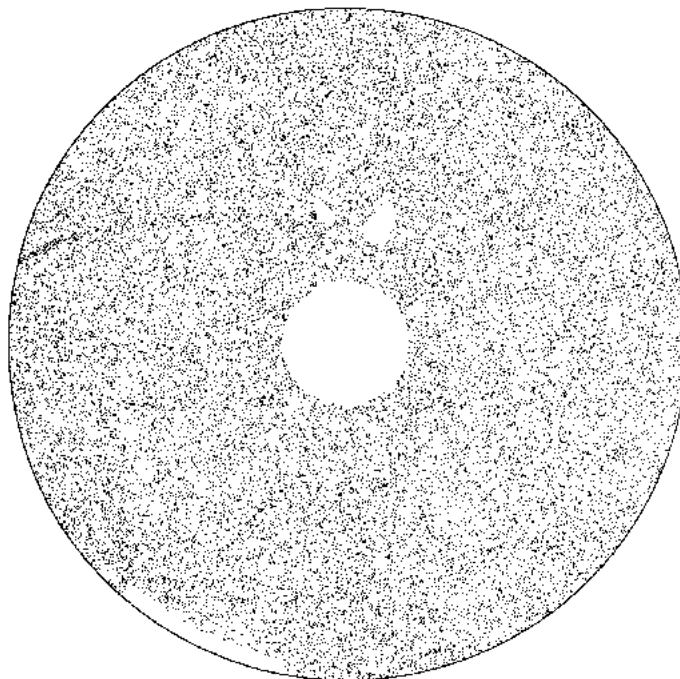


Figura 2.1: Representação de um Universo homogêneo e isotrópico.

2.2 Diagrama de Hubble

Para visualizarmos as consequências do Princípio Cosmológico consideremos três galáxias, cujas posições são \vec{r}_1 , \vec{r}_2 e \vec{r}_3 . Elas formam um triângulo cujos lados possuem os seguintes comprimentos: $r_{12} \equiv |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$, $r_{13} \equiv |\vec{r}_3 - \vec{r}_1|$ e $r_{23} \equiv |\vec{r}_3 - \vec{r}_2|$. Se a expansão é uniforme e homogênea, então a forma do triângulo é preservada com o movimento das galáxias. Manter a relação correta para os lados do triângulo em dois instantes quaisquer requer uma lei de expansão da forma:

$$r_{12}(t) = a(t)r_{12}(t_0), \quad (2.1)$$

$$r_{13}(t) = a(t)r_{13}(t_0) \quad (2.2)$$

e

$$r_{23}(t) = a(t)r_{23}(t_0), \quad (2.3)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala. O fator de escala $a(t)$ nos diz como a expansão (ou possível contração) do Universo depende do tempo.

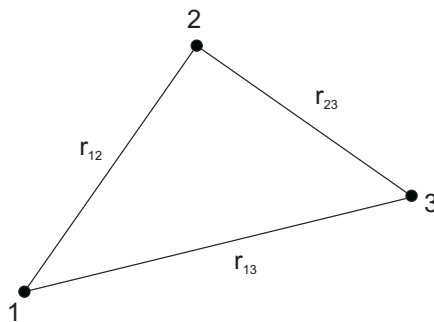


Figura 2.2: Triângulo definido por três galáxias em um Universo em expansão uniforme.

Em qualquer instante, t , um observador na galáxia 1 verá as outras galáxias se moverem com velocidades:

$$v_{12}(t) = \frac{dr_{12}}{dt} = \dot{a}r_{12}(t_0) = \frac{\dot{a}}{a}r_{12}(t) \quad (2.4)$$

e

$$v_{13}(t) = \frac{dr_{13}}{dt} = \dot{a}r_{13}(t_0) = \frac{\dot{a}}{a}r_{13}(t). \quad (2.5)$$

De forma similar um observador na galáxia 2 ou na galáxia 3 também encontrará uma relação linear entre velocidade e distância. Assim, podemos escrever a relação:

$$\vec{v} = H(t)\vec{r}, \quad (2.6)$$

conhecida como lei de Hubble, onde $H(t) \equiv \dot{a}/a$ é o parâmetro de Hubble. Seu valor atual é $H_0 = 72 \pm 8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

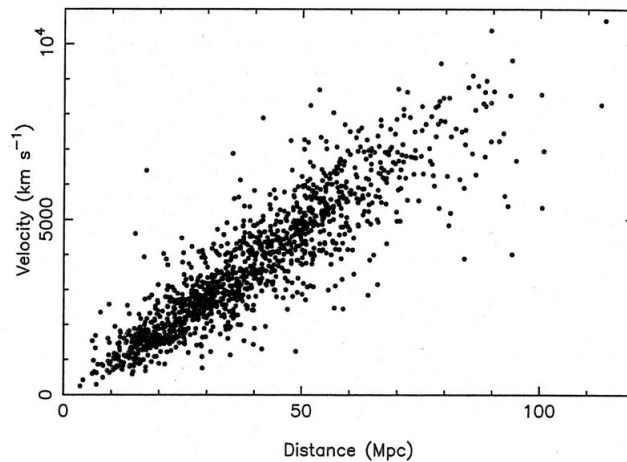


Figura 2.3: Gráfico da velocidade versus distância estimada para um conjunto de 1355 galáxias. A relação linear implica na lei de Hubble. O espalhamento considerável é devido às incertezas, mas o *best-fit* coincide precisamente com a lei de Hubble. Figura retirada de [1].

Quando observamos uma galáxia verificamos que o comprimento de onda da luz emitida por essa galáxia, λ_{em} , é diferente do medido por um observador na Terra,

λ_{ob} . Por esse motivo, define-se uma grandeza z da seguinte forma:

$$z = \frac{\lambda_{ob} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}. \quad (2.7)$$

Quando z é negativo, ele é chamado *blueshift*, ou seja, há um desvio para o azul no espectro de frequência da luz emitida pelas estrelas da galáxia (neste caso a galáxia está se aproximando do observador). Quando z é positivo, ele é chamado de *redshift*, ou seja, há um desvio para o vermelho no espectro de frequência da luz emitida pelas estrelas da galáxia (neste caso a galáxia está se afastando do observador). O fator de escala e o *redshift* estão relacionadas por:

$$1 + z = \frac{a_0}{a} = \frac{1}{a}, \quad (2.8)$$

onde a_0 é fator de escala hoje.

2.3 A Métrica de Robertson-Walker

Nesta seção iremos deduzir a métrica de Robertson-Walker, para isso consideremos o elemento de linha mais geral que descreve o espaço-tempo:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{00} dt^2 + 2g_{0\mu} dt dx^\mu - \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.9)$$

onde γ_{ij} é a métrica do 3-espaço. Sabemos que o princípio cosmológico afirma que o Universo é isotrópico, isso garante que os coeficientes $g_{0\mu}$'s sejam nulos, caso contrário existiria direções privilegiadas. Além disso, podemos adotar o tempo próprio como coordenada temporal, isso implica que $g_{00} = c^2$. Assim, podemos reescrever o elemento de linha acima da seguinte forma:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2, \quad (2.10)$$

onde dl^2 representa a parte espacial da métrica do espaço-tempo.

Os primeiros modelos cosmológicos relativísticos supõem um Universo plano, ou seja, com curvatura espacial nula. Assim, pelo teorema de Pitágoras, o elemento de linha espacial de uma hiperfície tridimensional plana é dado por:

$$dl^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \quad (2.11)$$

Substituindo a Eq. (2.11) na Eq. (2.10), obtém-se a métrica de Minkowski:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - [(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2]. \quad (2.12)$$

Em 1922, Friedmann obteve uma solução das equações de Einstein para um Universo fechado, ou seja, com curvatura espacial positiva constante. Ele supôs que o Universo pudesse ser a hiperfície tridimensional de uma quadri-esfera. Seja a equação da quadri-esfera dada por:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = a^2, \quad (2.13)$$

onde a é o raio de uma esfera 3D. A distância entre dois pontos em um espaço 4D é dada por:

$$dl^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2. \quad (2.14)$$

Resolvendo a Eq. (2.13) para x^4 e diferenciando, obtemos:

$$dx^4 = -\frac{x^i dx^i}{\sqrt{a^2 - x^i x^i}}, \quad (2.15)$$

onde $i = 1, 2, 3$. Substituindo a Eq. (2.15) na Eq. (2.14), o elemento de linha fica:

$$dl^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + \frac{(x^i dx^i)^2}{a^2 - x^i x^i}. \quad (2.16)$$

Em coordenadas esféricas

$$x^1 = r \sin \theta \cos \phi,$$

$$x^2 = r \sin \theta \sin \phi$$

e

$$x^3 = r \cos \theta.$$

Assim, teremos:

$$dx^i dx^i = dr^2 + r^2 d\theta^2 + (r \sin \theta)^2 d\phi^2, \quad (2.17)$$

$$x^i dx^i = r dr \quad (2.18)$$

e

$$x^i x^i = r^2. \quad (2.19)$$

Substituindo as Eqs. (2.18) e (2.19) na Eq. (2.16), obtemos:

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.20)$$

As coordenadas (r, θ, ϕ) são coordenadas co-móveis, ou seja, as coordenadas de um referencial que move-se com o fluido que preenche o Universo.

Substituindo a Eq. (2.20) na Eq. (2.10), obtêm-se a métrica:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \left[\frac{dr^2}{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (2.21)$$

A Eq. (2.21) é conhecida como a métrica de Friedmann para o Universo fechado com curvatura espacial positiva constante.

Em 1924, Friedmann obteve soluções cosmológicas para um Universo aberto, ou seja, com curvatura espacial negativa constante. Ele supôs que o Universo poderia ser uma hipersfície tridimensional de um quadri-hiperbolóide. A equação do quadri-hiperbolóide é dada por:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - (x^4)^2 = -a^2. \quad (2.22)$$

Neste caso a é apenas uma constante. O elemento de linha espacial do quadri-hiperbolóide (2.22) é dado pela equação:

$$dl^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (dx^4)^2. \quad (2.23)$$

Resolvendo a Eq. (2.22) para x^4 e diferenciando, obtemos:

$$dx^4 = \frac{x^i dx^i}{\sqrt{a^2 + x^i x^i}}, \quad (2.24)$$

onde $i = 1, 2, 3$. Substituindo a Eq. (2.24) na Eq. (2.23), o elemento de linha fica:

$$dl^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - \frac{(x^i dx^i)^2}{a^2 + x^i x^i}. \quad (2.25)$$

Substituindo as Eqs. (2.18) e (2.19) na Eq. (2.25), obtemos:

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.26)$$

As coordenadas (r, θ, ϕ) são coordenadas co-móveis, ou seja, as coordenadas de um referencial que move-se com o fluido que preenche o Universo.

Substituindo a Eq. (2.26) na Eq. (2.10), obtêm-se a métrica:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \left[\frac{dr^2}{1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (2.27)$$

A Eq. (2.27) é conhecida como métrica de Friedmann para um Universo aberto, com curvatura espacial negativa constante.

As métricas acima discutidas foram obtidas de maneira independente pelos matemáticos H.P. Robertson e A.G. Walker em 1935 e 1936 respectivamente. Ambos apresentam uma expressão geral para os casos de curvatura espacial positiva e negativa constante. Esta expressão englobava a métrica plana (2.12) e as métricas de Friedmann (2.21) e (2.27). Eles propuseram que o Universo poderia ser a hiperfície tridimensional de uma quadri-geometria que obedecia a seguinte expressão:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + k(x^4)^2 = \frac{a^2}{k}. \quad (2.28)$$

onde k é a constante de curvatura espacial. Para $k = 0$, obtém-se uma esfera de raio infinito que pode ser considerada como sendo uma superfície plana. Para $k = 1$, a

equação (2.28) resulta na quadri-esfera (2.13) e para $k = -1$ no quadri-hiperbolóide (2.22). O elemento de linha espacial da quadri-geometria (2.28) é dado por:

$$dl^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + k(dx^4)^2. \quad (2.29)$$

Resolvendo a Eq. (2.28) para x^4 e diferenciando, obtemos:

$$dx^4 = -\frac{x^i dx^i}{\sqrt{a^2 - kx^i x^i}}, \quad (2.30)$$

onde $i = 1, 2, 3$. Substituindo a Eq. (2.30) na Eq. (2.29), o elemento de linha fica:

$$dl^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + \frac{(x^i dx^i)^2}{a^2 - kx^i x^i}. \quad (2.31)$$

Substituindo as Eqs. (2.18) e (2.19) na Eq. (2.31), obtemos:

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - k\left(\frac{r}{a}\right)^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.32)$$

Considerando $r' = ar$ e substituindo a Eq. (2.32) na Eq. (2.10) obtém-se

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2 \left[\frac{dr'^2}{1 - k\left(\frac{r'}{a}\right)^2} + r'^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (2.33)$$

Na Eq. (2.33) a constante a não possui dependência no tempo cósmico. Pode-se assumir, no caso mais geral, que $a = a(t)$ e reescrever a métrica (2.33) na forma:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (2.34)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala do Universo. A Eq. (2.34) descreve um espaço-tempo homogêneo e isotrópico e é conhecida como a métrica de Robertson-Walker [32].

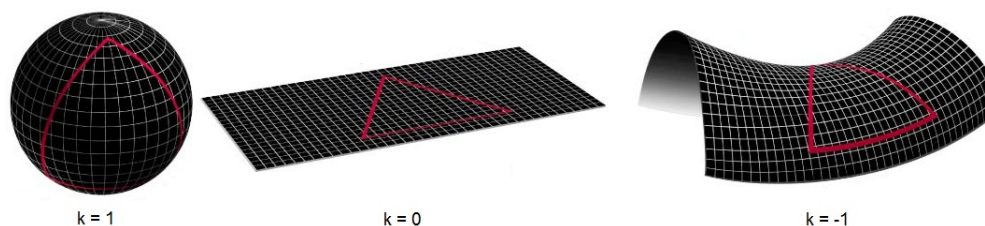


Figura 2.4: Representação das possíveis geometrias do Universo.

2.4 A Teoria da Relatividade Geral

No início do século XX Einstein desenvolveu a Teoria da Relatividade Geral (TRG) introduzindo na física alguns conceitos e ideias inovadoras. Um destes conceitos está relacionado ao fato de que sistemas acelerados são fisicamente equivalentes a sistemas submetidos a campos gravitacionais, tornando equivalente a massa inercial e a massa gravitacional de um corpo. Essa ideia ficou conhecida como Princípio da Equivalência. A TRG é uma teoria geométrica da gravitação. Neste caso, o conceito clássico de força gravitacional é substituído pela geometria espaço-temporal, ou seja, a gravitação passa a ser interpretada como uma manifestação da própria curvatura do espaço-tempo, causada pela presença de massa.

Um dos principais conceitos introduzidos pela TRG é o de espaço-tempo curvo, cujas principais características são: curvatura não-nula; geometria não-euclidiana; é Lorentziano, ou seja, as métricas do espaço-tempo devem ter a assinatura de Lorentz [29, 33].

Combinando o princípio cosmológico com a TRG podemos construir um modelo cosmológico para estudar a origem e evolução do Universo. A equação de Einstein que descreve a dinâmica do campo gravitacional relacionando a geometria do espaço-tempo com o conteúdo material é a seguinte:

$$R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R = \kappa T^{\alpha\beta} + \Lambda g^{\alpha\beta}, \quad (2.35)$$

onde $R^{\alpha\beta}$ é o tensor de Ricci, $g^{\alpha\beta}$ é o tensor métrico, R é o escalar de curvatura, $T^{\alpha\beta}$ é o tensor de energia-momento e Λ é a constante cosmológica de Einstein. Aqui $\kappa \equiv 8\pi G/c^2$. Na Eq. (2.35), o lado esquerdo está associado às propriedades geométricas do espaço-tempo, enquanto que o direito representa o conteúdo material do Universo [33, 34]. O conteúdo material é usualmente modelado como um fluido contínuo e homogêneo, sem viscosidade. Dessa forma, $T^{\alpha\beta}$ assume a forma do tensor energia-momento para um fluido perfeito, dado por:

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p)u^\alpha u^\beta - pg^{\alpha\beta}, \quad (2.36)$$

onde as quantidades u^α e u^β definem as quadri-velocidades do elemento de volume do fluido no referencial co-móvel.

Adicionalmente, temos a equação da conservação de energia, obtida da quadri-divergência do tensor energia-momento do fluido perfeito $\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0$:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0. \quad (2.37)$$

Além disso, temos a equação de estado do fluido dada por $p = \omega\rho$.

Para um Universo preenchido somente por matéria não-relativística, $\omega = 0$, a Eq. (2.37), fornece:

$$\rho_m = \rho_{0m} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3}. \quad (2.38)$$

Para um Universo preenchido apenas por radiação, cujo parâmetro da equação de estado, é $w = 1/3$, a Eq. (2.37) nos mostra que:

$$\rho_r = \rho_{0r} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4}. \quad (2.39)$$

Para um Universo dominado pelo vácuo quântico, $w = -1$, a Eq. (2.37) nos leva a:

$$\rho_\Lambda = \rho_{0\Lambda}. \quad (2.40)$$

A Eq. (2.38) expressa a conservação da massa de repouso e a Eq. (2.39) nos mostra que a densidade de energia da radiação decai mais rapidamente do que a^{-3} , sendo portanto dominante no Universo primordial. O fator a^{-4} pode ser pensado como uma combinação do fator a^{-3} que expressa a diminuição do número de fótons (densidade de fótons), com o fator a^{-1} que ocorre devido ao fato do Universo está em expansão, o que foi comprovado pela observação do fenômeno do desvio para o vermelho dos fótons (*redshift*). A Eq. (2.40) expressa claramente o fato que, no passado, a energia de vácuo era subdominante.

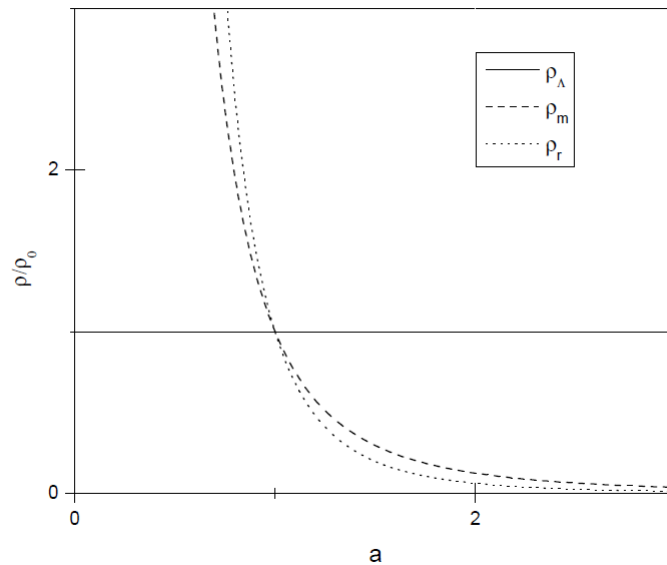


Figura 2.5: Esboço da evolução da densidade de energia: (i) radiação, (ii) matéria e (iii) constante cosmológica.

2.5 Modelos de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Inserindo a métrica (2.34) na Eq. (2.35) as equações de movimento tornam-se:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.41)$$

e

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} = -8\pi G\frac{p}{c^2} + \Lambda. \quad (2.42)$$

A Eq. (2.41) é conhecida como equação de Friedmann. Elas descrevem a dinâmica da evolução do Universo cujo conteúdo de energia-momento é o fluido perfeito [29].

Combinando a Eq. (2.41) com a Eq. (2.42) obtemos:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + 3\frac{p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.43)$$

conhecida como equação da aceleração. A Eq. (2.43) nos mostra que em um Universo dominado por matéria $\ddot{a} < 0$, ou seja, a expansão do Universo é desacelerada. Porém, se o Universo é dominado por uma componente cuja equação de estado $\omega < -1/3$, a expansão será acelerada.

2.5.1 Universo Dominado por Matéria

Para um Universo dominado por matéria, supondo que o termo Λ na Eq. (2.41) é nulo, podemos escrever:

$$1 - \frac{8\pi G}{3H^2}\rho = -\frac{k}{a^2H^2}, \quad (2.44)$$

onde $H \equiv \dot{a}/a$ é o parâmetro de Hubble. Definindo a densidade crítica do Universo como $\rho_{cr} \equiv 3H^2/8\pi G$, obtemos a seguinte expressão:

$$(1 - \Omega) = -\frac{k}{a^2 H^2}, \quad (2.45)$$

onde $\Omega \equiv \rho/\rho_c$ é o parâmetro de densidade. Com a Eq. (2.45) podemos determinar a geometria da seção espacial do Universo usando o parâmetro de densidade. Dessa forma, se $k = 1$, então $\Omega > 1$ (Universo fechado), se $k = 0$, então $\Omega = 1$ (Universo plano) e finalmente se $k = -1$, então $\Omega < 1$ (Universo aberto).

Vamos agora resolver as equações de Friedmann para um Universo dominado por matéria e analisar a evolução do fator de escala.

Para um Universo plano $k = 0$. Usando a Eq. (2.38) podemos reescrever a Eq. (2.44) da seguinte forma:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \Rightarrow \int a^{1/2} da = \frac{2}{3}a^{3/2} + c = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_0 a_0^3}{3}}t. \quad (2.46)$$

No instante do Big Bang, $t = 0$ e $a = 0$, portanto $c = 0$. Usando $a_0 = 1$ e o fato de que para um Universo plano $\rho_0 = \rho_{cr}$, temos:

$$a = \left(\frac{3H_0}{2}\right)^{2/3} t^{2/3}. \quad (2.47)$$

Note que, a partir da Eq. (2.47), obtemos a idade do Universo, t_0 , fazendo $a = a_0 = 1$:

$$t_0 = \frac{2}{3H_0}. \quad (2.48)$$

Para um Universo fechado $k = 1$. Usando a Eq. (2.38) na expressão (2.44), temos:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 - \frac{1}{a^2} \Rightarrow dt = \frac{da}{\sqrt{\frac{8\pi G\rho_0 a_0^3}{3a} - 1}}. \quad (2.49)$$

Dividindo ambos os lados da Eq. (2.49) por a , definindo o tempo conforme $d\eta \equiv dt/a$ e integrando, chegamos ao seguinte resultado:

$$\int d\eta = \int \frac{da}{\sqrt{\frac{8\pi G\rho_0 a_0^3}{3}a - a^2}}. \quad (2.50)$$

Usando as Eqs. (2.45) e a relação $\Omega = \rho/\rho_c$, podemos definir a seguinte constante:

$$A \equiv \frac{4\pi G\rho_0}{3} = \frac{H_0^2\Omega_0}{2} = \frac{\Omega_0}{2\Omega_0 - 2}. \quad (2.51)$$

Então:

$$\eta - \tilde{\eta} = \int_0^a \frac{d\tilde{a}}{\sqrt{2A\tilde{a} - \tilde{a}^2}} = \sin^{-1} \left(\frac{a - A}{A} \right) + \frac{1}{2}\pi. \quad (2.52)$$

Por outro lado, a condição $\eta = 0$ em $a = 0$ implica que $\tilde{\eta} = 0$. Assim, temos:

$$\frac{a - A}{A} = \sin \left(\eta - \frac{1}{2}\pi \right) = \cos \eta \Rightarrow a = A(1 - \cos \eta). \quad (2.53)$$

Agora, $dt = ad\eta$, leva-nos a:

$$t - \tilde{t} = \int ad\eta = A(\eta - \sin \eta). \quad (2.54)$$

Mas, a condição $t = 0$ em $a = 0$ implica que $\tilde{t} = 0$. Assim, obtemos a dependência do fator de escala a em termos do tempo t parametrizado pelo tempo conforme η como:

$$a = \frac{\Omega_0}{2\Omega_0 - 2}(1 - \cos \eta) \quad (2.55)$$

e

$$t = \frac{\Omega_0}{2\Omega_0 - 2}(\eta - \sin \eta). \quad (2.56)$$

Finalmente, temos o Universo aberto, no qual $k = -1$. Usando a Eq. (2.38) na Eq. (2.44) ficamos com:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 + \frac{1}{a^2} \Rightarrow \int dt = \int \frac{da}{\sqrt{\frac{8\pi G\rho_0 a_0^3}{3a} + 1}}. \quad (2.57)$$

Seguindo os mesmos procedimentos realizados para $k = 1$ chegamos à seguinte equação:

$$\eta - \tilde{t}a = \int_0^a \frac{d\tilde{a}}{\sqrt{2A\tilde{a} + \tilde{a}^2}} = \ln \left(\frac{a + A + \sqrt{a(2A + a)}}{A} \right) = \cosh^{-1} \left(\frac{a}{A} + 1 \right), \quad (2.58)$$

onde $A = \Omega_0/(2\Omega_0 - 2)$. Mas, a condição $\eta = 0$ em $a = 0$ implica que $\tilde{\eta} = 0$. Assim, temos:

$$\frac{a + A}{A} = \cosh \eta \Rightarrow a = A(\cosh \eta - 1). \quad (2.59)$$

Agora, $dt = ad\eta$, leva-nos a:

$$t - \tilde{t} = \int ad\eta = A(\sinh \eta - \eta). \quad (2.60)$$

Mas, fazendo $\eta = 0$ em $t = 0$, a Eq. (2.60) leva-nos à $\tilde{t} = 0$. Assim, finalmente obtemos a dependência do fator de escala a em termos do tempo t parametrizado pelo tempo conforme η como:

$$a = \frac{\Omega_0}{2\Omega_0 - 2}(\cosh \eta - 1) \quad (2.61)$$

e

$$t = \frac{\Omega_0}{2\Omega_0 - 2}(\sinh \eta - \eta). \quad (2.62)$$

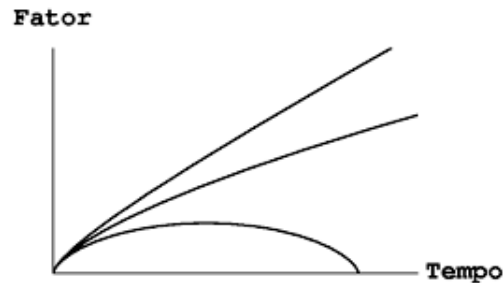


Figura 2.6: Evolução do fator de escala nos modelos FLRW aberto (curva de cima), FLRW plano (curva do meio) e FLRW fechado (curva de baixo).

2.6 Evolução Térmica do Universo após o Big Bang

Consideremos a Primeira Lei da Termodinâmica:

$$dQ = dE + PdV, \quad (2.63)$$

onde dQ é fluxo de calor para dentro ou para fora de uma região, dE é a mudança na energia interna, P é a pressão e dV é a mudança no volume da região. Se o Universo é perfeitamente homogêneo, então para qualquer volume $dQ = 0$. Assim, a Primeira Lei da Termodinâmica aplicada ao Universo em expansão é a seguinte:

$$\frac{dE}{dt} + P \frac{dV}{dt} = 0. \quad (2.64)$$

Sendo $E = mc^2 = \rho c^2 V$ e levando em consideração que $V \propto a^3(t)$, chegamos a seguinte relação:

$$\dot{\rho} = -3 \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) \frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.65)$$

Usando a Eq. (2.41) e considerando um Universo plano dominado por matéria ($P = 0$), temos:

$$\rho^{-3/2} \dot{\rho} = -\sqrt{24\pi G},$$

que pode ser integrada em relação ao tempo, tendo como solução:

$$\rho_m = \frac{1}{6\pi G t^2} \quad (2.66)$$

para um Universo dominado por matéria.

Para um Universo plano dominado por radiação ($P = \rho c^2/3$). Usando a Eq. (2.41) e a Eq. (2.65), temos:

$$\rho^{-3/2} \dot{\rho} = -\sqrt{\frac{128\pi G}{3}},$$

que pode ser integrada em relação ao tempo, tendo como solução:

$$\rho_{rad} = \frac{3}{32\pi G t^2} \quad (2.67)$$

para um Universo dominado por radiação.

Se os fótons fossem os únicos componentes relativísticos de massa-energia presentes, poderíamos escrever:

$$\rho_{rel} = \rho_{rad} = \frac{\alpha T^4}{c^2},$$

onde α é a constante da densidade de radiação de Stefan-Boltzmann, já que a densidade de energia para um corpo negro de temperatura t é dada por $u = \alpha T^4$ e como $E = mc^2$, $\rho_{rad} = u/c^2$. Entretanto, em altas temperaturas, a produção de pares de partículas-antipartículas ocorre. Se escrevermos então que:

$$\rho_{rel} = q\rho_{rad} = q\frac{\alpha T^4}{c^2},$$

onde q é um número inteiro maior que um, dependente da temperatura, já que a produção de pares depende da temperatura. Assim, podemos escrever:

$$T = \frac{1}{q^{1/4}} \left(\frac{3c^2}{32\pi G \alpha} \right)^{1/4} t^{-1/2}. \quad (2.68)$$

As soluções das equações de campo de Einstein juntamente com evidências observacionais indicam que o Universo começou sua evolução a partir de um estado em que toda sua energia estava concentrada em um volume de dimensões desprezíveis, ou seja, sua densidade e temperatura eram extremamente altas.

Segundo a teoria da Nucleossíntese Primordial [35, 36] o Universo era formado por um plasma quente de fótons, elétrons e bárions. Num primeiro momento o Universo era dominado por radiação e devido sua alta energia os átomos neutros não permaneciam estáveis. Assim, foi preciso que o Universo esfriasse para então haver a formação de elementos leves, como o deutério, hélio e lítio. Esta época é chamada de recombinação.

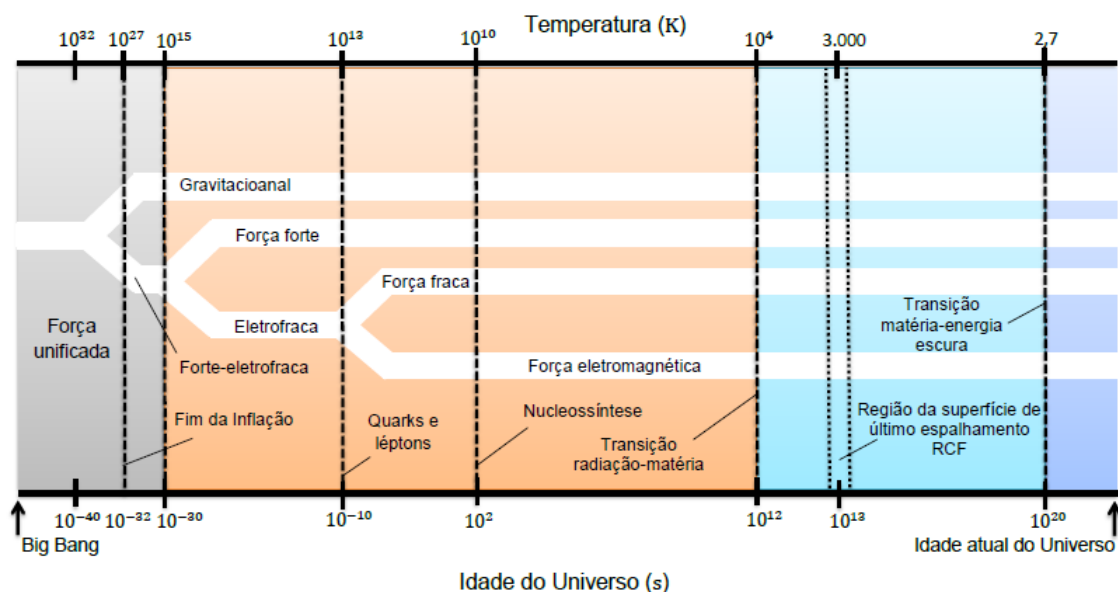


Figura 2.7: Evolução Térmica do Universo.

Após a recombinação veio o desacoplamento e o último espalhamento, época em que a radiação deixa de interagir com a matéria e passa a se expandir livremente pelo Universo. A Radiação Cósmica de Fundo (RCF) prevista em 1948 por George Gamow e detectada em 1964 por Arno A. Penzias e Robert W. Wilson corresponde a maior evidência desse período do Universo.

Em 1998, as medidas de distância e velocidade de afastamento das supernovas mostraram, com grande precisão, que o Universo está se expandindo aceleradamente. Esse resultado alterou drasticamente a nossa visão sobre o Universo, pois, sendo a gravidade uma força atrativa, a expansão deveria ser desacelerada, conforme se acreditou durante décadas.

No contexto da teoria da relatividade geral, proposta por Einstein em 1915, esse fenômeno pode ser explicado pela existência da chamada quintessência ou energia escura, uma componente extra e desconhecida de energia cujo efeito gravitacional

líquido é repulsivo e supera a atração gravitacional ordinária entre as partes do Universo. Isoladamente, essa descoberta gerou um novo desafio às próprias leis da Física, já que a nova componente não é prevista pelo modelo padrão da Física de partículas.

Capítulo 3

Termodinâmica e Relatividade Especial

Com o advento da teoria da relatividade proposta por Einstein em 1905, surgiu a necessidade de generalizar a termodinâmica através dessa nova teoria. Existe na literatura diversas leis de transformações para T e dQ . Cada uma delas obtida baseando-se nas diferentes definições de outras quantidades termodinâmicas, tais como o trabalho.

Planck [37] e Einstein [38] previram que um sistema teria uma temperatura menor para um observador em movimento em relação ao sistema e que o fluxo de calor também seria menor.

Em 1963, Ott [39] obteve leis de transformação para a temperatura e para o fluxo de calor inversas às de Planck, ou seja, a temperatura medida por um observador em movimento em relação ao sistema seria maior e o fluxo de calor também.

Quando propôs a Teoria da Relatividade Especial, em 1905, Einstein deu início a uma nova era da ciência moderna. Em 1915, na Teoria da Relatividade Geral, Einstein generaliza os princípios debatidos em 1905 ao unificar a geometria espaço-temporal e a distribuição de matéria e energia de um sistema, de forma a criar uma

nova teoria da gravitação universal, em contraponto à teoria newtoniana.

Em 1926, W. Lenz [40] publicou um dos primeiros artigos relacionando Termodinâmica a modelos cosmológicos. Em seu artigo, Lenz faz uma análise do equilíbrio entre radiação e matéria no modelo de Universo fechado de Einstein utilizando-se da Termodinâmica clássica e poucos conceitos da Relatividade. Após calcular o volume próprio, V_0 , e a energia de repouso, mc^2 , do sistema, Lenz aplica as equações da Termodinâmica clássica e analisa os resultados, mostrando uma relação entre o quadrado da temperatura e o raio do Universo.

3.1 Leis da Termodinâmica

Neste capítulo, iremos realizar uma extensão da Termodinâmica clássica para sistemas com velocidades relativísticas e a espaços curvos, como desenvolvido por Tolman [41]. Tal extensão é fundamental para que se compreenda a posterior generalização para sistemas termodinâmicos envolvendo campos gravitacionais. Na Termodinâmica clássica, desenvolvida nos primórdios do século XIX e abordada em diversos livros textos de cursos de graduação, consideramos apenas sistemas que se encontram em repouso em relação ao observador. Partimos, assim, da lei que relaciona a variação de energia interna, trabalho e calor, conhecida como a Primeira Lei da Termodinâmica:

$$dE = \bar{d}Q - \bar{d}W, \quad (3.1)$$

onde dE mede a variação da energia interna devida ao fluxo de calor $\bar{d}Q$ e o trabalho $\bar{d}W$ realizado pelo sistema. É fácil ver que tal relação nada mais é do que uma expressão para a conservação de energia, por incluir calor como uma forma de energia. Por outro lado, sabemos, da teoria da Relatividade Restrita, que a variação de massa

de um sistema qualquer devido à transferência de energia pode ser obtida da relação:

$$dE = c^2 dm. \quad (3.2)$$

Este resultado é geral e pode ser combinado com a Primeira Lei da Termodinâmica para estudar sistemas que envolvem mudanças na massa de repouso.

A Segunda Lei da Termodinâmica nos permite extrair informação sobre a reversibilidade de um processo ao qual o sistema está submetido, relacionando-a ao aumento ou não da entropia do mesmo:

$$\Delta S \geq \int \frac{dQ}{T}. \quad (3.3)$$

Aqui a igualdade vale para processos reversíveis.

Finalmente, pela Terceira Lei da Termodinâmica, devemos ter:

$$(dS)_{T=0} \rightarrow 0 \quad (3.4)$$

ou seja, a entropia de qualquer sistema tende a se anular quando a temperatura se aproxima do zero absoluto.

3.2 Transformações de Lorentz para grandezas termodinâmicas

Consideraremos sistemas termodinâmicos que podem ser descritos como um fluido isotrópico cujo estado pode ser facilmente descrito por duas variáveis, tais como energia interna e volume. Primeiramente, iremos considerar quantidades que possuem natureza mecânica, estendendo posteriormente para quantidades cujo conceito é puramente termodinâmico. As transformações de Lorentz entre dois referenciais inerciais

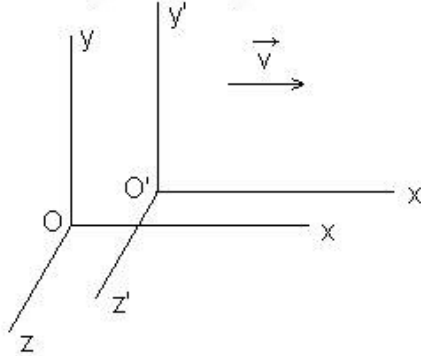


Figura 3.1: Sistemas de coordenadas O e O'.

O e O' [c.f. Fig. (3.1)] para um *boost* com velocidade \vec{V} na direção x são dadas por:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - V_x t), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{xV_x}{c^2}\right), \end{aligned} \tag{3.5}$$

onde $\gamma = 1/\sqrt{1 - V_x^2/c^2}$ é denominado fator de Lorentz [42].

3.2.1 Volume e Pressão

Considerando a contração de Lorentz para comprimentos, é fácil verificar que o volume se modifica de forma que:

$$V = \frac{V_0}{\gamma}, \tag{3.6}$$

onde V_0 é o volume próprio do sistema, ou seja, medido por um observador em repouso em relação ao sistema.

A pressão é definida como força por unidade de área, de forma que, para um *boost* na direção do eixo-x, teremos as forças como:

$$F_x = F_{x,0} \quad , \quad F_y = \frac{F_{y,0}}{\gamma} \quad , \quad F_z = \frac{F_{z,0}}{\gamma} . \quad (3.7)$$

Sendo $F_{x,0}$, $F_{y,0}$ e $F_{z,0}$ as forças medidas por um observador em repouso em relação ao sistema. Cada componente da força irá agir em uma área cuja normal seja paralela a mesma, ou seja F_x irá agir numa área A_{yz} , que, diferente das outras, não sofrerá contração de Lorentz. Já F_y e F_z irão agir em áreas que sofrem contrações de forma que $A = A_0/\gamma$, ou seja:

$$p_y = \frac{F_y}{A_{xz}} = \frac{F_{y,0}}{A_{xz,0}} = p_{y,0} . \quad (3.8)$$

Além disso, podemos mostrar que $p_z = p_{z,0}$. Portanto, $p = p_0$. A pressão é invariante para as transformações de Lorentz.

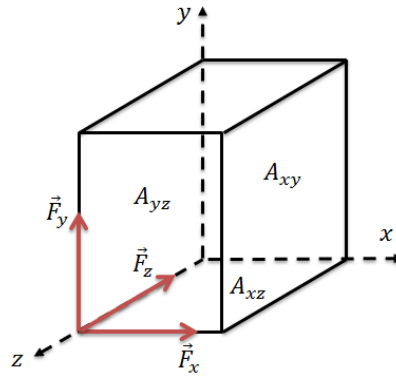


Figura 3.2: Volume medido por um observador movendo-se com velocidade \vec{v} .

3.2.2 Energia e Trabalho

Para obtermos uma expressão para a energia devemos, inicialmente, considerar o trabalho necessário para acelerar o sistema de um estado inicial em repouso até uma velocidade \vec{u} , de forma que a aceleração seja quasi-estática e adiabática, sem alterar o que é visto por um observador em repouso em relação ao sistema.

Primeiramente, partindo da Eq. (3.2), podemos extrair uma relação para a quantidade de momento que é transferido nesta conversão de massa em energia. Se tivermos uma quantidade de energia E sendo transferida com velocidade \vec{u} , o momento associado a tal transferência é $E\vec{u}/Vc^2$.

Para um fluido isotrópico, temos

$$\vec{g} = \rho \frac{\vec{u}}{c^2} + p \frac{\vec{u}}{c^2}, \quad (3.9)$$

onde $\vec{g} \equiv \vec{G}/V$ é a densidade volumétrica de momento associada a densidade de fluxo de energia e $\vec{G} \equiv m\vec{u}$ é o momento transferido. Na Eq. (3.9), o termo $\rho\vec{u}$ está associado a densidade de momento da massa do fluido, enquanto o segundo termo da expressão é relacionado ao momento adicional devido ao fluxo de energia resultante do trabalho feito no fluido pela pressão que age neste. Desta forma o momento transferido será

$$\vec{G} = \frac{E + pV}{c^2} \vec{u}. \quad (3.10)$$

Pela definição de força, $\dot{\vec{G}} = \vec{F}$. Assim,

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \left(\frac{E + pV}{c^2} \vec{u} \right). \quad (3.11)$$

Por outro lado, o trabalho total será a soma do trabalho realizado pela força externa \vec{F} e a ação da pressão p na mudança de volume V do sistema, de tal forma

que:

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{u} - p \frac{dV}{dt}. \quad (3.12)$$

Usando a invariância da pressão e substituindo a Eq. (3.11) para \vec{F} chegamos ao seguinte resultado:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dt} \frac{u^2}{c^2} + p \frac{u^2}{c^2} \frac{dV}{dt} + \frac{E + pV}{c^2} u \frac{du}{dt} - p \frac{dV}{dt}, \quad (3.13)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{1}{E + pV} \frac{d}{dt}(E + pV) = \frac{1}{c^2} \frac{u}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \frac{du}{dt} \quad (3.14)$$

Integrando a Eq. (3.14), temos

$$E + pV = \frac{E_0 + p_0 V_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (3.15)$$

A constante de integração foi determinada usando o fato que quando o observador estiver em repouso, teremos $E + pV = E_0 + p_0 V_0$. Usando a Eq. (3.6) e a invariância da pressão, encontramos

$$E = \frac{E_0 + p_0 V_0 \frac{u^2}{c^2}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (3.16)$$

como a energia relativística do nosso sistema.

Trabalho

A transferência de momento gera um trabalho extra que é dado por:

$$dW = p dV - \vec{u} \cdot d\vec{G}, \quad (3.17)$$

em que o primeiro termo é o trabalho devido a pressão e o segundo termo é o trabalho associado com a força externa necessária para manter a velocidade constante. A invariância da pressão, e as Eqs. (3.6) e (3.15) leva-nos a

$$dW = \frac{dW_0}{\gamma} - \gamma \frac{u^2}{c^2} d(E_0 + p_0 V_0). \quad (3.18)$$

3.2.3 Entropia

Consideramos, agora, um sistema termodinâmico em algum estado interno de interesse, porém, em repouso e com entropia definida S_0 . Vamos, então, acelerá-lo até a velocidade \vec{u} de forma reversível e adiabática sem alterar o estado interno do sistema. Desta forma, teremos que:

$$dS = 0. \quad (3.19)$$

Ou seja, a entropia é um invariante de Lorentz.

3.2.4 Calor e Temperatura

Calor é a grandeza termodinâmica diretamente associada a transferência de energia. Combinando a primeira lei da Termodinâmica, Eq. (3.1), com as Eqs. (??) e (3.18), podemos obter:

$$dQ = \gamma \left[dE_0 + d(p_0 V_0) \frac{u^2}{c^2} \right] + \frac{dW_0}{\gamma} - \gamma [dE_0 + d(p_0 V_0)] \frac{u^2}{c^2} = (dE_0 + dW_0) \gamma. \quad (3.20)$$

Mas $dQ_0 = dE_0 + dW_0$. Assim, a transformação de Lorentz para o calor se dá por:

$$dQ = \frac{dQ_0}{\gamma}. \quad (3.21)$$

Temperatura

Para obtermos uma expressão para a temperatura, partiremos da segunda lei da Termodinâmica, Eq. (3.3), cujo observador em repouso em relação ao sistema irá medir:

$$\Delta S_0 \geq \int \frac{dQ_0}{T}. \quad (3.22)$$

Por outro lado, visto que $dS = dS_0$ e $dQ = dQ_0/\gamma$, podemos escrever:

$$\Delta S_0 \geq \int \frac{dQ_0}{\gamma} \frac{1}{T}. \quad (3.23)$$

Combinado as Eqs. (3.22) e (3.23), obtemos a temperatura medida por um observador com velocidade \vec{u} em relação ao sistema

$$T = \frac{T_0}{\gamma}. \quad (3.24)$$

Embora Planck tenha chegado a esta expressão utilizando conceitos comuns à Relatividade Especial [41], a contração ou dilatação da temperatura ainda é um assunto em aberto tanto na física teórica quanto na experimental. Em um artigo publicado em 1963, Ott [39], utilizando-se de diferentes definições para força, chegou a uma expressão inversa a de Tolman, onde a temperatura iria se dilatar ao invés de contrair.

$$T = \gamma T_0. \quad (3.25)$$

Em 2003, Avramov [43] demonstra fortes evidências fenomenológicas para que a temperatura seja um invariante de Lorentz ao observar o brilho de galáxias distantes. Segundo a Eq. (3.24), as galáxias distantes deveriam ser frias e invisíveis, já de acordo com a Eq. (3.25), elas deveriam ser quentes e infinitamente brilhantes. Como nenhum dos casos realmente acontece, Avramov argumenta que a temperatura deve ser invariante.

3.2.5 Aspectos Qualitativos da Transformação de Temperatura

Vamos agora analisar as propriedades termodinâmicas de um gás, para isso considere a equação de estado no sistema de referência em repouso $PV^{(0)} = nRT^{(0)}$. Um observador em movimento decide obter a temperatura através dessa equação, ele sabe que P e n são ambos invariantes, e que $V = \gamma^{-1}V^{(0)}$. Assim, ele conclui que $T = \gamma^{-1}T^{(0)}$. Por outro lado, suponha que ele queira identificar a temperatura através da equação de estado $E^{(0)} = \frac{3}{2}nRT^{(0)}$, válida no sistema de referência em repouso. Assim, um observador em movimento conclui que $T = \gamma T^{(0)}$, já que $E = \gamma E^{(0)}$.

Observamos que as propriedades do gás ideal que fornecem condições qualitativas da temperatura, consistentes no sistema de referência em repouso, geram conflitos no sistema em movimento. Sendo assim, não podemos mais confiar nas noções mais elementares de temperatura. Por outro lado, precisamos preservar pelo menos a condição que o equilíbrio térmico de dois sistemas interagindo implica na igualdade de suas temperaturas.

Portanto, se a igualdade de temperaturas for tomada como critério fundamental do equilíbrio térmico, então a temperatura de qualquer sistema deve ser tomada como a temperatura no sistema em repouso, ou seja, a temperatura deve ser um invariante de Lorentz. Uma característica muito importante da temperatura invariante de Lorentz é que as temperaturas de fusão e ebulição permanecem como propriedades intrínsecas das substâncias, assim como na termodinâmica convencional.

Capítulo 4

Termodinâmica Aplicada a Energia Escura

Neste capítulo obtemos a lei de evolução da temperatura para qualquer modelo de energia escura cuja equação de estado varie no tempo. Em particular iremos estudar modelos de energia escura cuja equação de estado possa ser parametrizada em função do *redshift*. Aplicamos o resultado para três modelos e investigamos a evolução térmica do Universo no contexto de cada um deles.

4.1 Lei de Evolução da Temperatura

Supondo que a energia escura é um tipo de fluido simples relativístico, seus estados termodinâmicos são caracterizados por um tensor energia-momento $T^{\alpha\beta}$, uma corrente de partículas N^α e uma corrente de entropia S^α dadas por:

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p)u^\alpha u^\beta - pg^{\alpha\beta}, \quad (4.1)$$

$$N^\alpha = nu^\alpha \quad (4.2)$$

e

$$S^\alpha = n\sigma u^\alpha, \quad (4.3)$$

onde $u^\alpha = dx^\alpha/dt$ é a 4-velocidade do fluido e n e σ são a densidade do número de partículas e a entropia específica (por partícula), respectivamente. Usando as leis de conservação para a energia e para a densidade do número de partículas, encontramos o seguinte:

$$\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = \dot{\rho}_x + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_x + p_x) = 0 \quad (4.4)$$

e

$$\nabla_\alpha N^\alpha = \dot{n} + 3\frac{\dot{a}}{a}n = 0, \quad (4.5)$$

onde o ponto significa derivada temporal.

Vamos agora determinar a equação geral para a lei de temperatura do fluido relativístico. Consideremos que a densidade de energia ρ e a pressão p do fluido são funções das variáveis termodinâmicas n e T . Assim podemos escrever:

$$d\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial n}\right)_T dn + \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_n dT. \quad (4.6)$$

Nas Eqs. (4.1), (4.2) e (4.3), as quantidades ρ , p , n e σ estão relacionadas à temperatura T pela lei de Gibbs [44]:

$$nTd\sigma = d\rho - \frac{\rho + p}{n}dn. \quad (4.7)$$

Combinando a Eq. (4.6) com a Eq. (4.7), obtemos:

$$d\sigma = \frac{1}{nT} \left[\left(\frac{\partial\rho}{\partial n}\right)_T - \frac{\rho + p}{n} \right] dn + \frac{1}{nT} \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_n dT. \quad (4.8)$$

Tomando n e T como variáveis termodinâmicas independentes e usando o fato que $d\sigma$ é uma diferencial exata, podemos escrever:

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{nT} \left[\left(\frac{\partial\rho}{\partial n}\right)_T - \frac{\rho + p}{n} \right] \right)_n = \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{1}{nT} \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_n \right]_T, \quad (4.9)$$

que resulta em:

$$T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_n = \rho + p - n \left(\frac{\partial\rho}{\partial n}\right)_T. \quad (4.10)$$

Derivando a Eq. (4.6) em relação ao tempo, obtemos:

$$\dot{\rho} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_n \dot{T} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial n} \right)_T \dot{n}. \quad (4.11)$$

Combinando as Eqs. (4.4) e (4.5) com a Eq. (4.11), obtemos:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_n \dot{T} = -3 \frac{\dot{a}}{a} \left[\rho + p - \left(\frac{\partial \rho}{\partial n} \right)_T n \right]. \quad (4.12)$$

Comparando a Eq. (4.10) com Eq. (4.12) e usando a Eq. (4.5) chegamos ao seguinte resultado:

$$\frac{\dot{T}}{T} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_n \frac{\dot{n}}{n}. \quad (4.13)$$

Usando a relação $p = \omega\rho$, a Eq. (4.5) e integrando a Eq. (4.13), obtemos a seguinte equação:

$$T = T_0 \exp \left[-3 \int \frac{\omega}{a} da \right]. \quad (4.14)$$

Usando a relação $1 + z = 1/a$, podemos reescrever a Eq. (4.14) da seguinte forma:

$$T = T_0 \exp \left[3 \int \frac{\omega dz}{(1+z)} \right]. \quad (4.15)$$

De acordo com a Eq. (4.15), para um Universo constituído por matéria ($\omega = 0$), temos $T = T_0$, ou seja, a temperatura do Universo permanece constante. Já para um Universo constituído por radiação ($\omega = 1/3$), temos $T = T_0(1+z)$, ou seja, a temperatura do Universo em seu estado inicial era extremamente elevada e diminui quando o Universo expande. Por outro lado, para um Universo constituído por uma constante cosmológica ($\omega = -1$), a Eq. (4.15) leva-nos a $T = T_0/(1+z)^3$, mostrando que em tal Universo, sua temperatura inicial era nula e aumenta com a expansão.

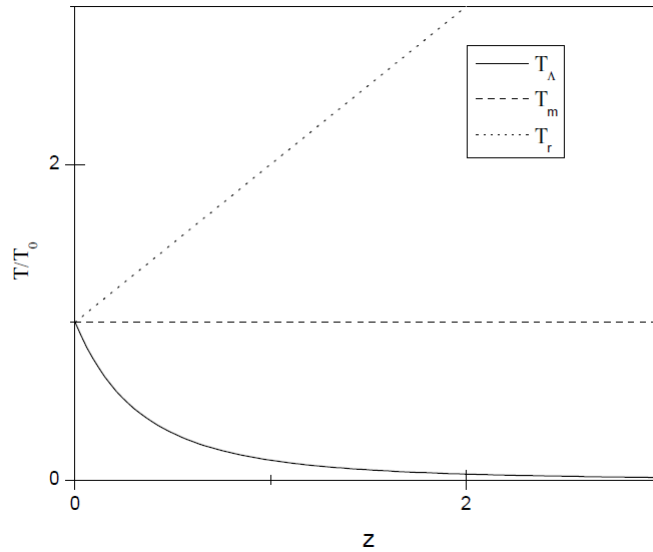


Figura 4.1: Evolução da lei de temperatura para as componentes: (i) radiação (linha pontilhada), (ii) matéria (linha tracejada) e (iii) constante cosmológica (linha cheia)

4.2 Distribuição Espectral e a Natureza da Energia Escura

Para o caso em que o parâmetro ω é constante, obtemos através da Eq. (4.15) a seguinte relação:

$$T = T_0(1 + z)^{3\omega}. \quad (4.16)$$

Para $\omega \neq 0$, temos:

$$T^{\frac{1}{\omega}} V = T_0^{\frac{1}{\omega}}, \quad (4.17)$$

onde $V \propto a^3$ é o volume da porção considerada dentro do fluido. Observamos a partir da Eq. (4.17) que, se ω é positivo a expansão adiabática implica no resfriamento da componente dominante. Por outro lado, para ω negativo observa-se o aquecimento de tal componente. No primeiro caso o resfriamento é porque o fluido realiza trabalho termodinâmico às custas de sua energia interna, enquanto que no segundo caso o

trabalho termodinâmico é realizado sobre o sistema.

Resolvendo a Eq. (4.4), obtemos:

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+\omega)}. \quad (4.18)$$

Combinando a Eq. (4.18) com a Eq. (4.17) e redefinindo os termos contantes, obtemos a Lei Generalizada de Stefan-Boltzmann:

$$\rho = \eta_\omega T^{\frac{1+\omega}{\omega}}, \quad (4.19)$$

para $\omega = -1$, encontra-se $\rho = cte$, como dever ser para um Universo preenchido por uma constante cosmológica.

Podemos encontrar outra quantidade de interesse, a entropia, através da relação de Euler da termodinâmica:

$$TS - PV + \mu N = E, \quad (4.20)$$

onde T , P e V , são respectivamente, a temperatura, a pressão e o volume do fluido. Usando a Eq. (4.20) e supondo que o potencial químico é nulo, encontramos a entropia:

$$S = \frac{(\rho + p)V}{T}, \quad (4.21)$$

onde $\rho = E/V$. Substituindo a Eq. (4.19) na Eq. (4.21) chegamos à entropia:

$$S(T, V) = \eta_\omega (1 + \omega) T^{\frac{1}{\omega}} V. \quad (4.22)$$

Na Eq. (4.22) observamos que aparece um limite inferior na equação de estado da energia escura, isto é, $\omega \geq -1$, pois os casos em que a entropia é negativa são fisicamente proibidos.

Partindo para uma análise microscópica, podemos estudar os efeitos da expansão nos modos da energia escura. Baseando-se no teorema adiabático, o qual

afirma que se uma cavidade oca contendo energia escura muda seu volume adiabaticamente, então a razão entre a energia de um dado modo e a correspondente frequência permanece constante, ou seja, $E_\nu/\nu = cte.$, usando a Eq. (4.19), obtemos:

$$T^{\frac{1+\omega}{\omega}} V/\nu = cte. \quad (4.23)$$

Sendo $T^{1/\omega} V = cte$, segue que T/ν também é. Portanto se uma cavidade oca contendo energia escura está em expansão adiabática, o comprimento de cada modo satisfaz a seguinte relação:

$$\lambda T = cte, \quad (4.24)$$

já que $c = \lambda\nu$. Assim, podemos entender o motivo pelo qual um fluido com ω negativo sofre um aumento em sua temperatura ao passar por uma expansão adiabática. Pela Eq. (4.24), observamos que o aumento na temperatura é acompanhado pela diminuição em cada comprimento de onda λ , portanto a energia em cada porção da energia escura aumenta, justificando o aumento de temperatura.

4.3 Um Modelo Paramétrico para a Energia Escura

A natureza da energia escura ainda é desconhecida, mas existem possíveis candidatas, tais como a constante cosmológica Λ que possui uma densidade de energia associada ao vácuo quântico. Ela surge como uma possibilidade simples e natural, mas traz à tona uma situação incompatível entre Física de Partícula e Cosmologia. A densidade de energia calculada é $\rho_\Lambda \lesssim 10^{71} GeV^4$, enquanto que a densidade de energia medida experimentalmente é $\rho_\Lambda \lesssim 10^{-47} GeV^4$, ou seja, uma diferença de mais de 100 ordens de magnitude [2]. Logo, embora a constante cosmológica seja capaz de explicar várias observações deve haver uma explicação para essa enorme discrepância entre teoria e observação.

Para encontrarmos uma solução capaz de explicar satisfatoriamente a aceleração do Universo é necessário admitirmos que a equação de estado da energia escura, ω , deixe de ser constante e passe a depender do *redshift*. A seguir abordaremos três parametrizações conhecidas.

4.3.1 Parametrização I

Nesta parametrização a equação de estado para a energia escura é definida como segue:

$$\omega(z) = \omega_0 + \omega_1 \frac{z}{1+z}, \quad (4.25)$$

onde ω_0 e ω_1 são constantes fixadas pelas observações.

Usando a Eq. (4.25) na Eq. (4.15), obtemos a Lei de Evolução da temperatura:

$$T = T_0(1+z)^{3(\omega_0+\omega_1)} \exp\left(-3\omega_1 \frac{z}{1+z}\right). \quad (4.26)$$

Como podemos observar nos gráficos da Fig. (4.3), a componente de energia escura tem temperaturas diferentes no passado, altos *redshifts*, dependendo dos valores dos parâmetros ω_0 e ω_1 , negativos ou positivos. Em qualquer situação, a temperatura da componente de energia escura hoje, medida em unidades de T_0 , independe do valor do parâmetro ω_1 .

4.3.2 Parametrização II

Essa parametrização é uma função logarítmica do *redshift*. Sendo expressa pela seguinte equação:

$$\omega(z) = \omega_0 + \omega_1 \ln(1+z), \quad (4.27)$$

onde ω_0 e ω_1 são constantes fixadas pelas observações.

Usando a Eq. (4.27) na Eq. (4.15), obtemos a Lei de Evolução da temperatura:

$$T = T_0(1+z)^{3\omega_0} \exp \left\{ \frac{3}{2}\omega_1 [\ln(1+z) \ln(1+z) - 1] \right\}. \quad (4.28)$$

Neste caso, podemos observar nos gráficos da Fig. (4.5) que o nível de temperatura da componente de energia escura depende fortemente dos valores de ω_0 e ω_1 em ambos os limites de baixos e altos *redshifts*. É importante observar que o modelo com $\omega_1 = -0,3$, dominante no passado, prevê um nível de temperatura menor que o modelo com $\omega_1 = -0,7$ a partir de $z = 1,7$. O modelo com $\omega_1 = -0,7$, subdominante no passado, torna-se dominante hoje. Nos casos em que atribuímos valores positivos para ω_1 ocorreu uma inversão completa. Os regimes dominantes no passado tornaram-se dominantes hoje.

4.3.3 Parametrização III

Já esta parametrização discutida por [2], é expressa pela seguinte equação:

$$\omega(z) = \omega_0 + \omega_1 \frac{z(1+z)}{1+z^2}, \quad (4.29)$$

onde ω_0 e ω_1 são constantes fixadas pelas observações.

Usando a Eq. (4.29) na Eq. (4.15), obtemos a Lei de Evolução da temperatura:

$$T = T_0(1+z)^{3\omega_0}(1+z^2)^{\frac{3}{2}\omega_1}. \quad (4.30)$$

Os modelos com valores de ω_1 negativos prevêem um nível de temperatura para a energia escura menor que o estimado pelo modelo Λ CDM. No entanto, a temperatura da componente de energia escura independe de ω_1 hoje. Nos casos em que atribuímos valores positivos para ω_1 os três modelos diferem fortemente no passado, mas prevêem a mesma razão T/T_0 hoje.

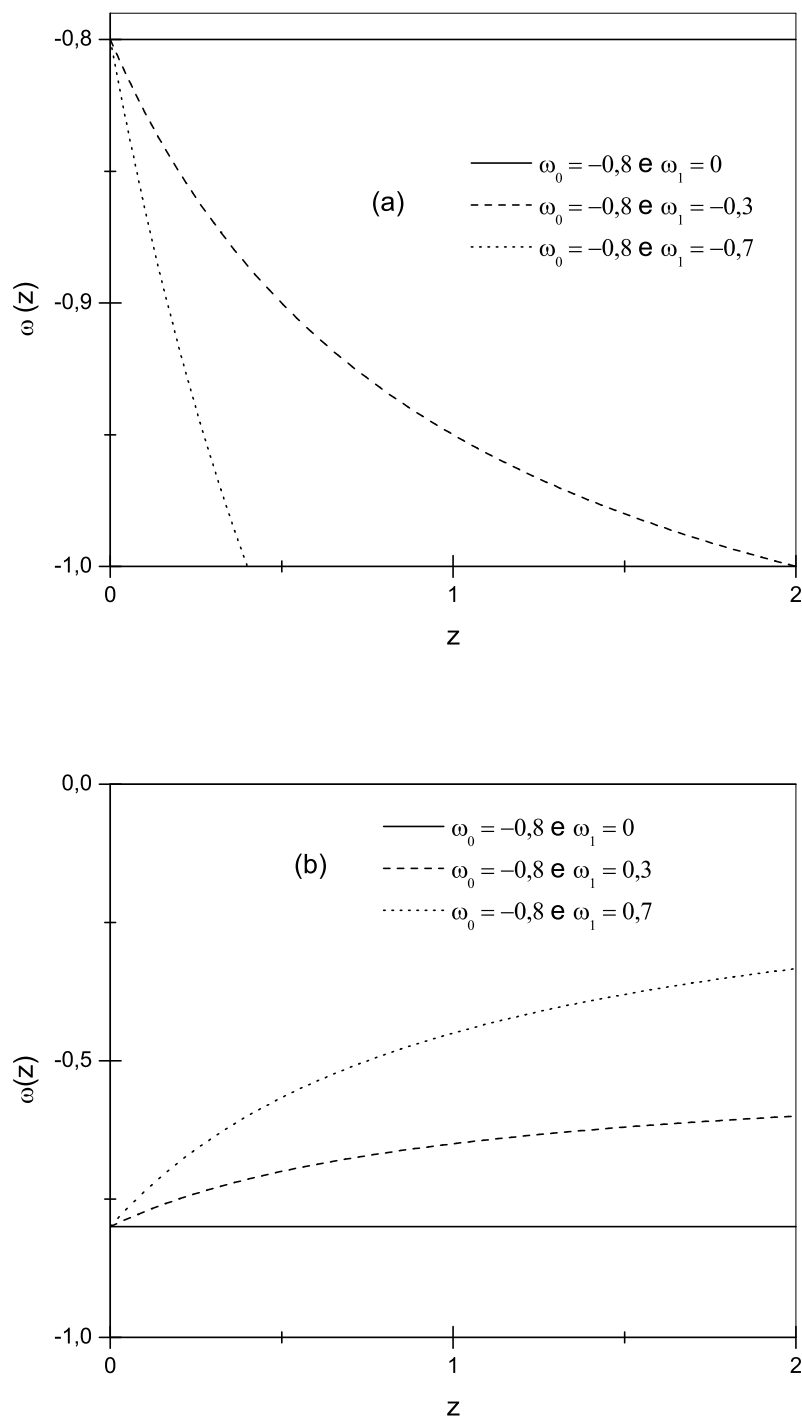


Figura 4.2: Parametrização I.

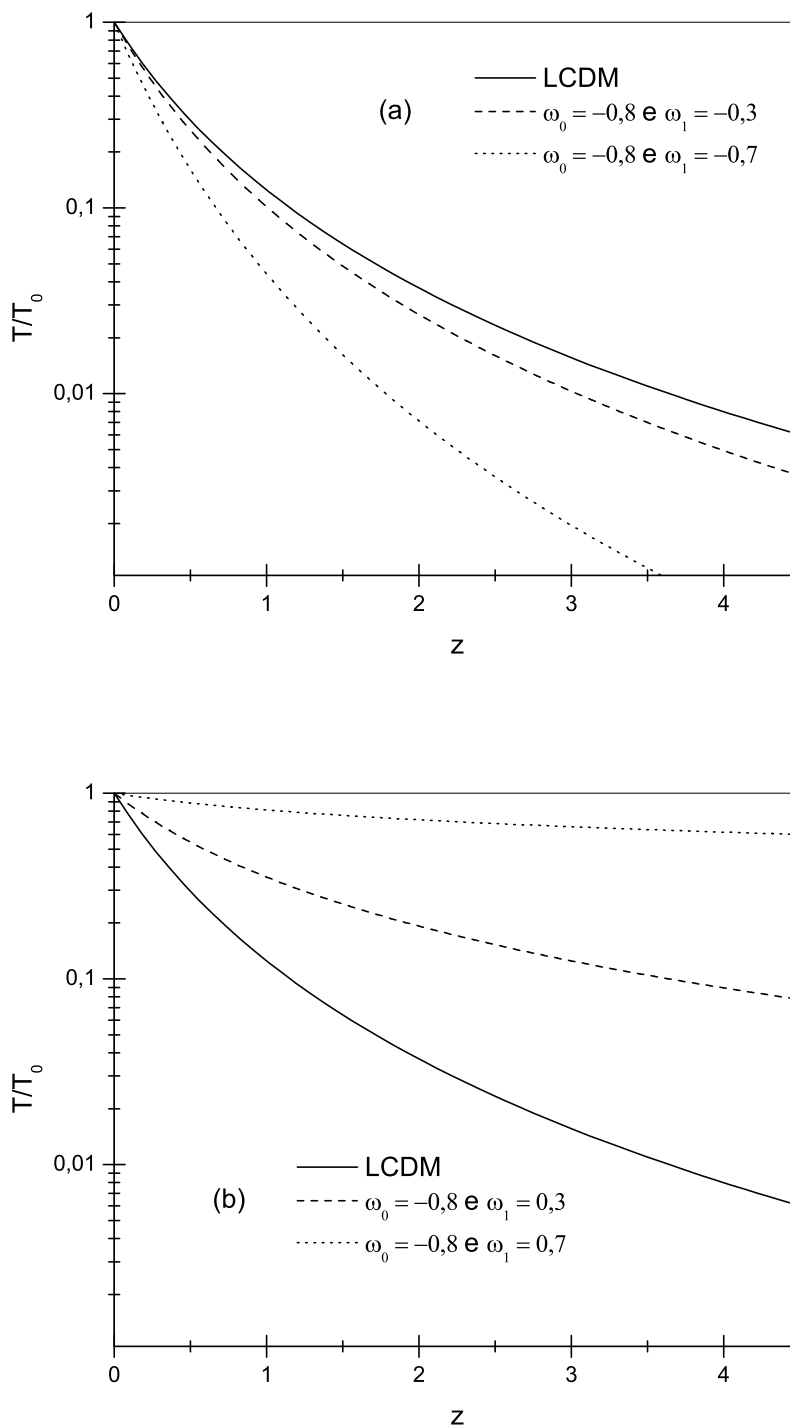


Figura 4.3: Como podemos observar nos gráficos acima, a componente de energia escura tem temperaturas diferentes no passado, altos *redshifts*, dependendo dos valores dos parâmetros ω_0 e ω_1 , negativos ou positivos. Em qualquer situação, a temperatura da componente de energia escura hoje, medida em unidades de T_0 , independe do valor do parâmetro ω_1 .

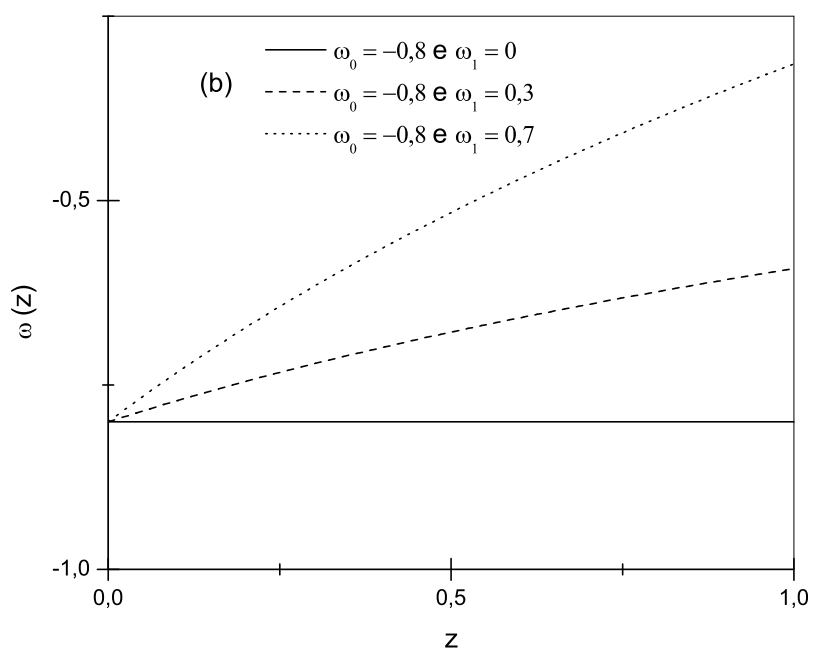
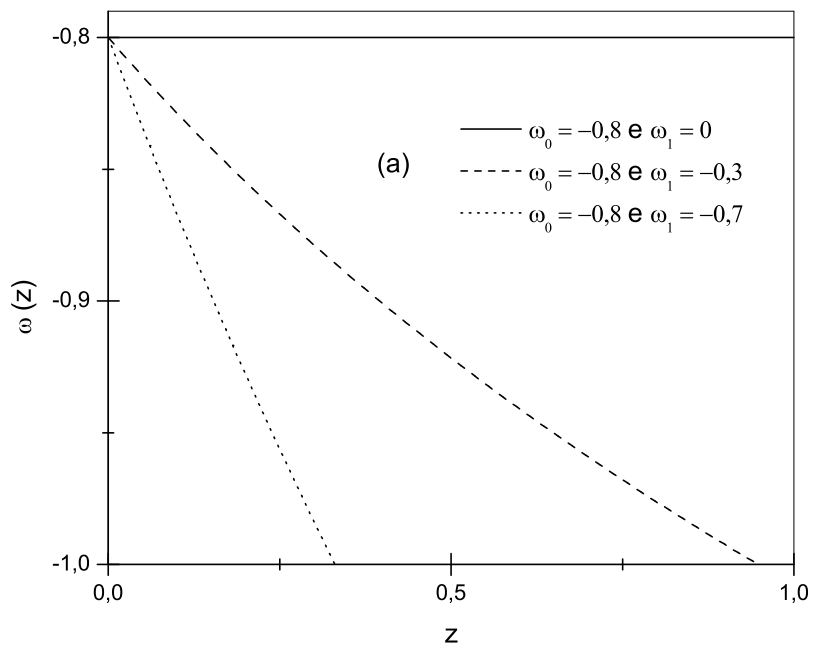


Figura 4.4: Parametrização II.

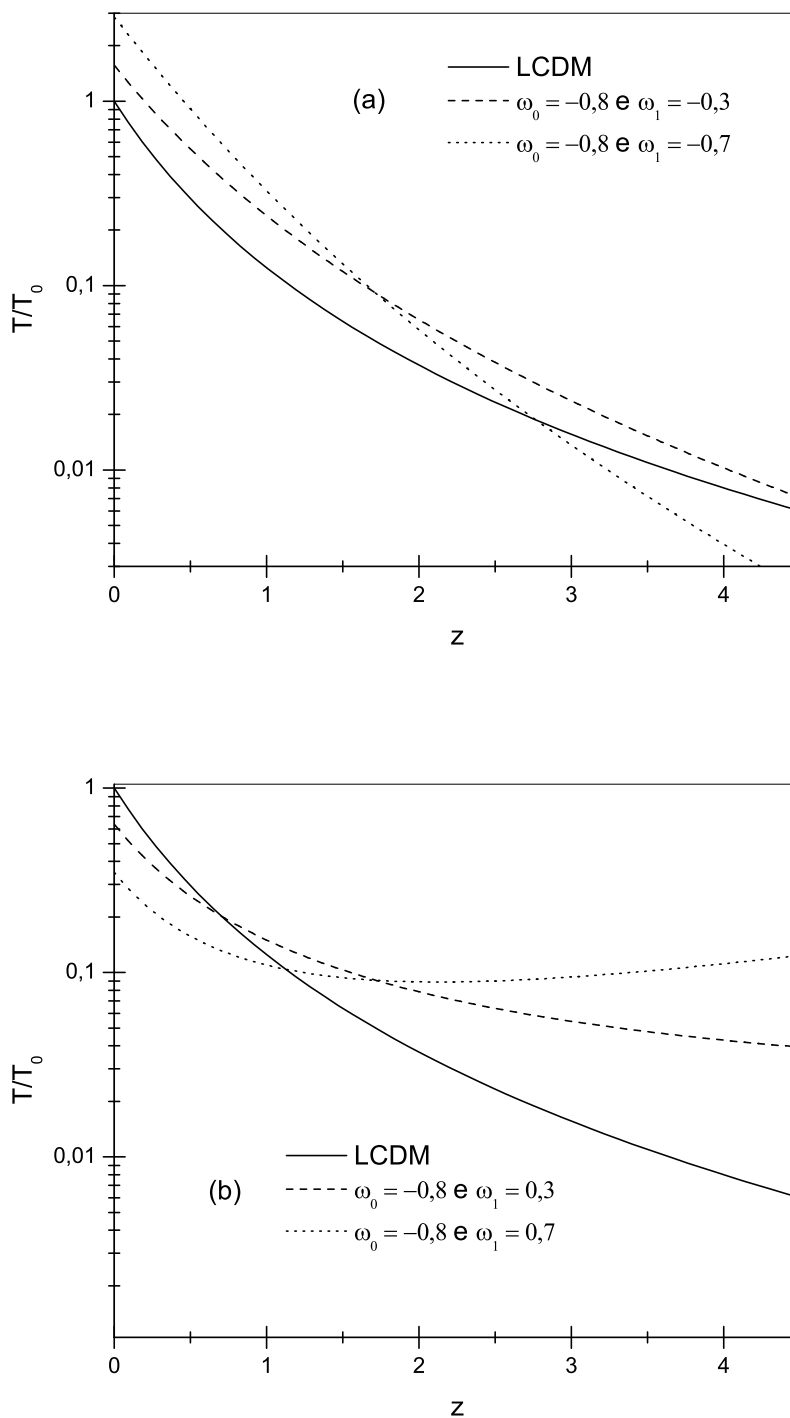


Figura 4.5: Podemos observar nesse gráficos que o nível de temperatura da componente de energia escura depende fortemente dos valores de ω_0 e ω_1 em ambos os limites de baixos e altos *redshifts*. É importante observar que o modelo com $\omega_1 = -0,3$, dominante no passado, prevê um nível de temperatura menor que o modelo com $\omega_1 = -0,7$ a partir de $z = 1,7$. O modelo com $\omega_1 = -0,7$, subdominante no passado, torna-se dominante hoje. Nos casos em que atribuímos valores positivos para ω_1 ocorreu uma inversão completa. Os regimes dominantes no passado tornaram-se dominantes hoje.

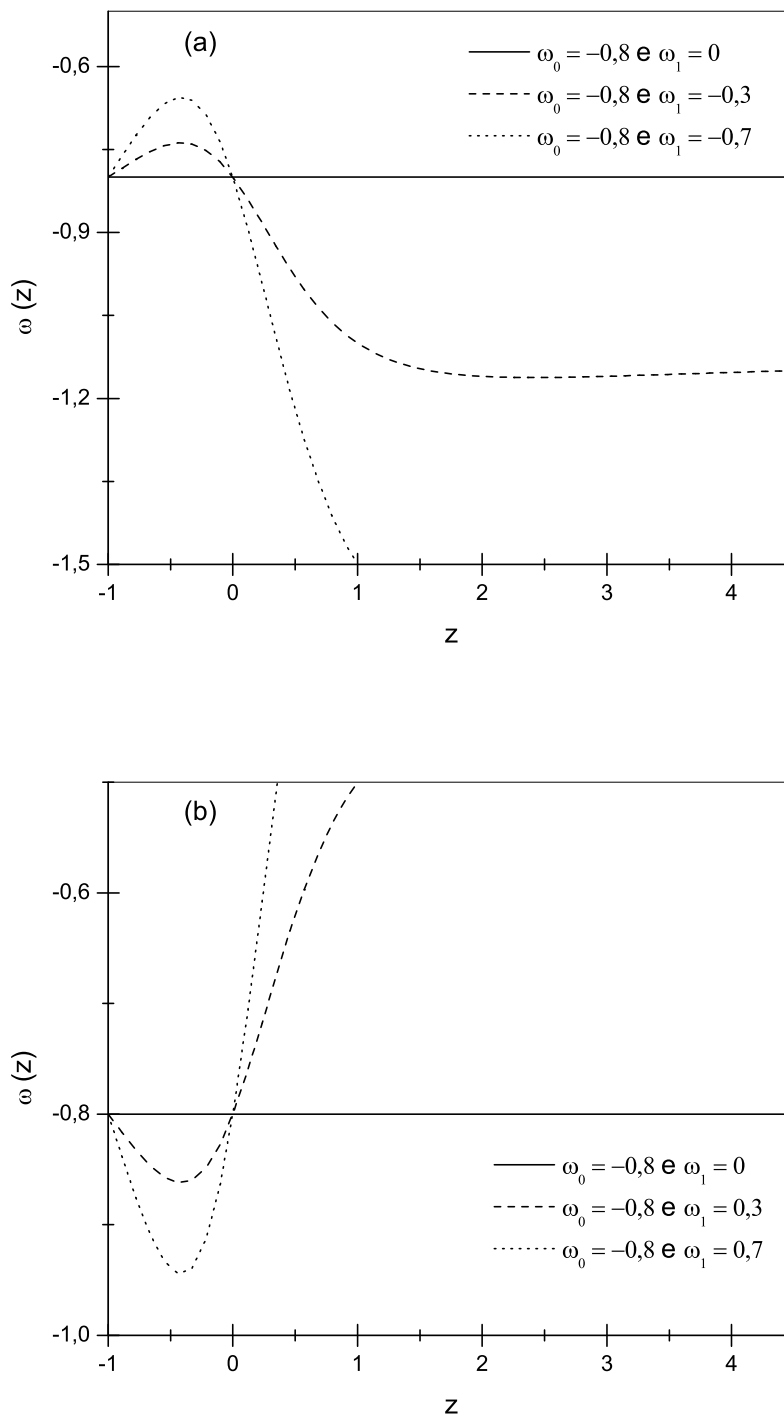


Figura 4.6: Parametrização III

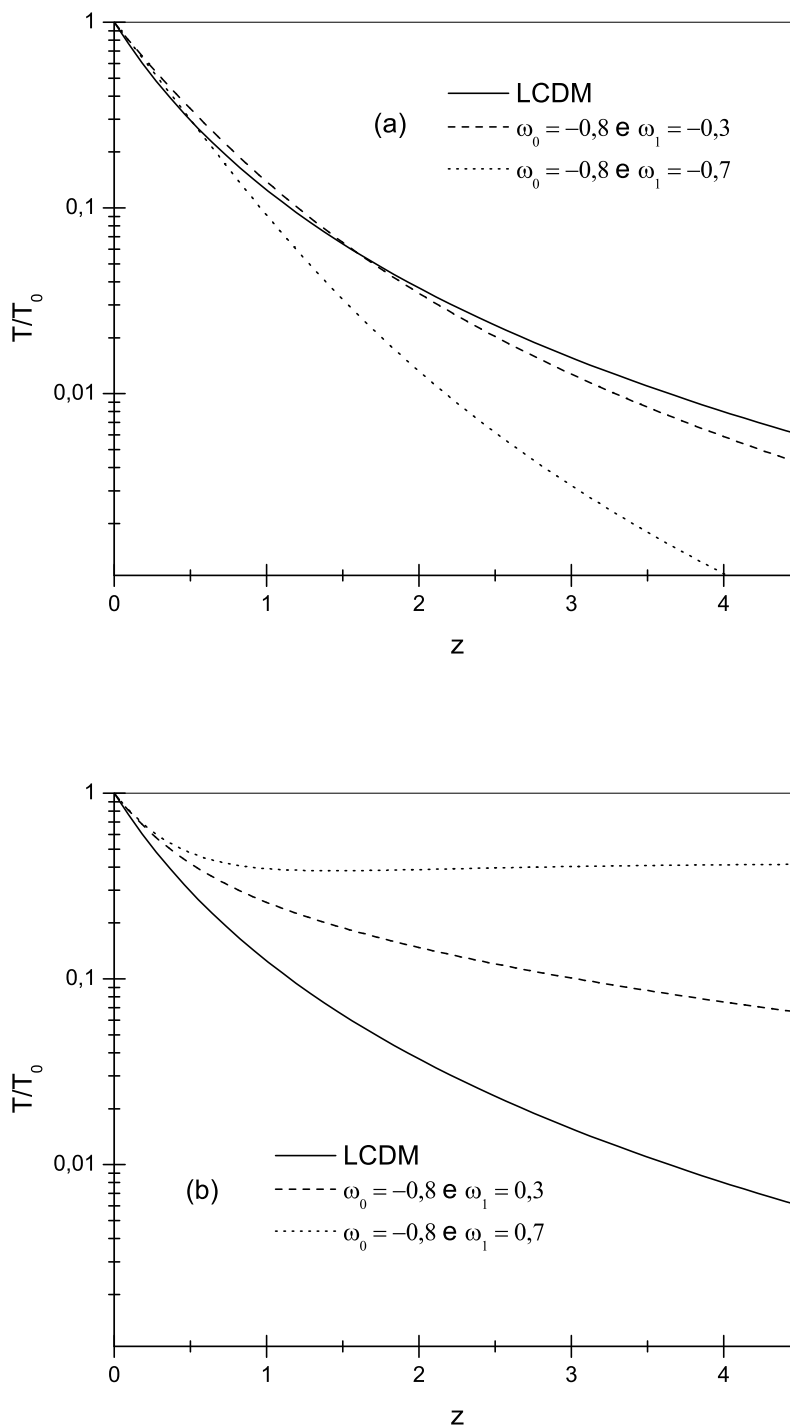


Figura 4.7: Os modelos com valores de ω_1 negativos prevêm um nível de temperatura para a energia escura menor que o estimado pelo modelo Λ CDM. No entanto, a temperatura da componente de energia escura independe de ω_1 hoje. Nos casos em que atribuímos valores positivos para ω_1 os três modelos diferem fortemente no passado, mas prevêm a mesma razão T/T_0 hoje.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Vamos começar nossas conclusões discutindo brevemente os principais resultados que foram deduzidos ou apresentados nesta dissertação.

No capítulo 2 abordamos o modelo cosmológico padrão. Embora o modelo MCP consiga explicar a atual fase de aceleração do Universo, ele possui alguns problemas sérios como o problema da constante cosmológica. Apesar disso é o modelo mais aceito pela comunidade científica, pois está de acordo com diferentes dados observacionais e com grande precisão. Iniciamos o capítulo explicando os conceitos de homogeneidade e isotropia do Universo impostas pelo princípio cosmológico. Partindo dessa hipótese deduzimos o elemento de linha que descreve o espaço-tempo de um Universo homogêneo e isotrópico, conhecido também como métrica de Robertson-Walker. De posse da equação da continuidade e considerando um fluido com equação de estado paramétrica constante chegamos à conclusão que a radiação era dominante no Universo primordial e que no passado a energia do vácuo era subdominante.

No Capítulo 4 deduzimos a lei de evolução da temperatura, Eq. (4.13), para qualquer constituinte do Universo que varie no tempo. A expressão obtida é válida para qualquer tipo de equação de estado que possa ser parametrizada em função do

redshift.

Inicialmente aplicamos a lei de temperatura para o modelo $\omega(z) = \omega_0 + \omega_1 \frac{z}{1+z}$. Como podemos observar nos gráficos da Fig. (4.3), a componente de energia escura tem temperaturas diferentes no passado, altos *redshifts*, dependendo dos valores dos parâmetros ω_0 e ω_1 , negativos ou positivos. Em qualquer situação, a temperatura da componente de energia escura hoje, medida em unidades de T_0 , independe do valor do parâmetro ω_1 .

Em seguida aplicamos a Eq. (4.13) para o modelo $\omega(z) = \omega_0 + \omega_1 \ln(1+z)$. Neste caso, podemos observar nos gráficos da Fig. (4.5) que o nível de temperatura da componente de energia escura depende fortemente dos valores de ω_0 e ω_1 em ambos os limites de baixos e altos *redshifts*. É importante observar que o modelo com $\omega_1 = -0,3$, dominante no passado, prevê um nível de temperatura menor que o modelo com $\omega_1 = -0,7$ a partir de $z = 1,7$. O modelo com $\omega_1 = -0,7$, subdominante no passado, torna-se dominante hoje. Nos casos em que atribuímos valores positivos para ω_1 ocorreu uma inversão completa. Os regimes dominantes no passado tornaram-se subdominantes hoje.

Finalmente, aplicamos lei de temperatura obtida para o modelo $\omega(z) = \omega_0 + \omega_1 \frac{z(1+z)}{1+z^2}$. Os modelos com valores de ω_1 negativos prevêem um nível de temperatura para a energia escura menor que o estimado pelo modelo Λ CDM. No entanto, a temperatura da componente de energia escura independe de ω_1 hoje. Nos casos em que atribuímos valores positivos para ω_1 os três modelos diferem fortemente no passado, mas prevêem a mesma razão T/T_0 hoje.

Perspectivas

Atualmente, algumas questões relacionadas com a entropia e a energia do Universo e seus limites precisam ser entendidos. Por exemplo, vemos claramente que as equações de Friedmann ficam mais complicadas quando campos quantizados compõem o conteúdo de matéria-energia do Universo. Em um trabalho recente [45], uma forte relação entre as equações de Friedmann, a entropia da teoria de campos conforme e o princípio holográfico foi estabelecida.

Neste trabalho, os autores mostram que a energia total, $E = E(S, V)$, é não-extensiva. A energia total $E(S, V)$ pode ser escrita como a soma de dois termos, um extensivo e outro subextensivo. O termo de energia subextensiva é a energia de Casimir. Os autores determinaram um limite holográfico na entropia subextensiva associada com a energia de Casimir. Além disso, eles mostraram que a entropia do Universo de FRW pode ser apresentada como um tipo entropia de Cardy-Verlinde (CV) [46, 47].

A proposta de trabalho futuro é discutir a entropia, as fórmulas tipo Cardy-Verlinde e relacionar as consequências do limite da entropia holográfica para um Universo de FRW preenchido por uma componente de energia escura onde a equação de estado depende do tempo. Esperamos que um melhor entendimento deste tópico possa lançar alguma luz nas questões sobre a origem das relações holográficas no Universo primordial bem como a aceleração atual do Universo, e a própria componente energia escura.

Bibliografia

- [1] FREEDMAN, W. L. et al. Final results from the hubble space telescope key project to measure the hubble constant. *The Astrophysical Journal*, v. 553, p. 47–72, 2001.
- [2] BARBOZA E.M., J.; ALCANIZ, J. A parametric model for dark energy. *Phys.Lett.*, B666, p. 415–419, 2008.
- [3] COBE. <http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe/>,.
- [4] HUBBLE Space Telescope. <http://hubblesite.org/>,.
- [5] WMAP. <http://map.gsfc.nasa.gov/>,.
- [6] CHANDRA. <http://chandra.harvard.edu/index.html>,.
- [7] SUPERNOVA Cosmology Project. <http://www-supernova.lbl.gov/>.
- [8] HIGH-Z SN Search Team. <http://www.cfa.harvard.edu/supernova/HighZ.html>,.
- [9] MATHER, J. C. et al. A preliminary measurement of the cosmic microwave background spectrum by the cosmic background explorer (cobe) satellite. *Astrophys.J.*, v. 354, p. L37–L40”, year = 1990, reportNumber = COBE–PREPRINT–90–01, SLACcitation =
- [10] WRIGHT, E. et al. Preliminary spectral observations of the galaxy with a 7 deg beam by the cosmic background explorer (cobe). *Astrophys.J.*, v. 381, p. 200–209, 1991.
- [11] BERNARDIS, P. de et al. A flat universe from high resolution maps of the cosmic microwave background radiation. *Nature*, v. 404, p. 955–959, 2000.
- [12] PADIN, S. et al. *Publ. of the Astr. Soc. of the Pacific*, v. 114, p. 83, 2002.
- [13] KUO, C.-l. et al. High resolution observations of the CMB power spectrum with ACBAR. *Astrophys.J.*, v. 600, p. 32–51, 2004.

- [14] HALVERSON, N. et al. Dasi first results: A measurement of the cosmic microwave background angular power spectrum. *Astrophys. J.*, v. 568, p. 38–45, 2002.
- [15] SPERGEL, D. et al. Wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) three year results: implications for cosmology. *Astrophys.J.Suppl.*, v. 170, p. 377, 2007.
- [16] EASTHER, R.; PEIRIS, H. *JCAP*, v. 0609, p. 010, 2006.
- [17] ALABIDI, L.; LYTH, D. H. *JCAP*, v. 0608, p. 013, 2006.
- [18] KINNEY E. W. KOLB, A. M. W. H.; RIOTTO, A. *Phys. Lett.*, D 74, p. 023502, 2006.
- [19] EASTHER, R.; PEIRIS, H. *ArXiv: astro-ph/0604214*.
- [20] CLOWE, D. et al. A direct empirical proof of the existence of dark matter. *Astrophys.J.*, v. 648, p. L109–L113, 2006.
- [21] BRADAC, M. et al. Strong and weak lensing united. 3. Measuring the mass distribution of the merging galaxy cluster 1E0657-56. *Astrophys.J.*, v. 652, p. 937–947, 2006.
- [22] CALDWELL, R. R.; DAVE, R.; STEINHARDT, P. J. Cosmological imprint of an energy component with general equation of state. *Phys. Rev. Lett.*, v. 80, p. 1582–1585, 1998.
- [23] WANG, L.-M. et al. Cosmic concordance and quintessence. *Astrophys. J.*, v. 530, p. 17–35, 2000.
- [24] ALCANIZ, J. S.; LIMA, J. A. S. *Phys. Lett.*, D 72, p. 063516, 2005.
- [25] ALCANIZ, J.; STEFANCIC, H. *Astron Astrophys*, v. 462, p. 443, 2007.
- [26] KAMENSHCHIK, A. Y.; MOSCHELLA, U.; PASQUIER, V. *Phys. Lett.*, v. 511, p. 265, 2001.
- [27] BILIC, N.; TUPPER, G. B.; VIOLLIER, R. D. *Phys. Lett.*, B 535, p. 17, 2002.
- [28] BENTO, M. C.; BERTOLAMI, O.; SEN, A. A. *Phys. Lett.*, D 66, p. 043507, 2002.
- [29] DELBEM, N. F. *Introdução Matemática aos Modelos Cosmológicos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, Outubro 2010.

- [30] GREGORY, P.; CONDON, J. The 87gb catalog of radio sources covering delta between 0 and +75 deg at 4.85ghz. *Astrophys.J.Suppl.*, v. 75, p. 1011–1291, 1991.
- [31] THE 87GB catalog of radio sources covering delta between 0 and + 75 deg at 4.85 GHz. *Astrophysical Journal Supplement Series*, v. 75, p. 1011–1291, 1991.
- [32] WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1972.
- [33] SILVA, F. E. da. *Anisotropias da Radiação Cósmica de Fundo e Vínculos em Modelos com Decaimento do Vácuo*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Julho 2005.
- [34] PEREZ, R. S. *Condições Iniciais para Inflação Cosmológica*. Dissertação (Mestrado) — Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, Fevereiro 2011.
- [35] DODELSON, S. *Modern Cosmology*. [S.l.]: Academic Press, 2003.
- [36] MUKHANOV, V. *Physical Foundations of Cosmology*. [S.l.]: Cambridge Univ. Press, 2005.
- [37] PLANCK, M. The dynamics of the system. *Ann. Physik*, v. 26, p. 1, 1908.
- [38] EINSTEIN, A. Planck's theory of radiation and the theory of specific heat. *Jahrb. Radioakt. Elektronik.*, v. 4, p. 411, 1907.
- [39] OTT, H. Lorentz transformation der warne und der temperature. *Z. Physik*, v. 175, p. 70, 1963.
- [40] LENZ, W. Das Gleichgewicht von Materie und Strahlung in Einsteins geschlossener Welt. *Phys. Zs.*, v. 27, p. 642–645, 1926.
- [41] TOLMAN, R. C. *Relativity Thermodynamics and Cosmology First Edition*. . Oxford University Press: , 1934. (,). . ISBN .
- [42] NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica: Ótica, Relatividade e Física Quântica*. 1ª edição. ed. São Paulo: [s.n.], 1998. ISBN 978-85-212-0163-2.
- [43] AVRAMOV, I. Relativity and temperature. *Russian Journal of Physical Chemistry*, v. 77, p. 179–182, 2003.
- [44] SILVA, R.; LIMA, J. A. S.; CALVÃO, M. O. *Gen. Rel. Grav.*, v. 34, p. 865, 2002.
- [45] VERLINDE, E. *ArXiv: hep-th/0008140*.
- [46] CARDY, J. *Nucl. Phys B*, v. 270, p. 186, 1986.
- [47] CARDY, J. *Nucl. Phys B*, v. 275, p. 200, 1986.