Universidade do Estado do Rio Grande do Norte

Faculdade de Ciências Exatas e Naturais - FANAT

Departamento de Física

Programa de Pós-Graduação em Física

Leandro Fábio Reges Sousa

A relação entre o índice entrópico q e a idade das estrelas do campo galáctico

Mossoró

Setembro de 2015

Leandro Fábio Reges Sousa

A relação entre o índice entrópico *q* e a idade das estrelas do campo galáctico

Dissertação apresentada ao programa de Pós-graduação em Física da Universidade do Estado do Rio Grande do Norte como parte dos requisitos para obtenção do título de MESTRE EM FÍSICA

Orientador: Prof. Dr. José Ronaldo Pereira da Silva

Mossoró

Setembro de 2015

Catalogação da Publicação na Fonte.
Universidade do Estado do Rio Grande do Norte.

Sousa, Leandro Fábio Reges
A relação entre o índice entrópico q e a idade das estrelas do campo galáctico. / Leandro Fábio Reges Sousa . - Mossoró, RN, 2015.

48 f.
Orientador(a): Prof. Dr. José Ronaldo Pereira da Silva

Dissertação (Mestrado em Física). Universidade do Estado do Rio Grande do Norte. Programa de Pós-Graduação em Física.

1. Rotação estelar. 2. Momentum angular estelar. 3. Estatística não extensiva. Estrelas do campo. I. Silva, José Ronaldo Pereira da. II. Universidade do Estado do Rio Grande do Norte. III.Título.

UERN/BC CDD 530

Bibliotecária: Jocelania Marinho Maia de Oliveira CRB 15 / 319

Leandro Fábio Reges Sousa

A relação entre o índice entrópico q e a idade das estrelas do campo galáctico

Dissertação apresentada ao programa de Pós-graduação em Física da Universidade do Estado do Rio Grande do Norte como parte dos requisitos para obtenção do título de MESTRE EM FÍSICA

Aprovada em 09/09/2015

Banca Examinadora

Prof. Dr. José Ronaldo Pereira da Silva
Orientador
UERN

Prof. Dr. Antonio Carlos da Silva Miranda
Examinador externo
UFRPE

Prof. Dr. Braúlio Batista Soares
Examinador interno
UERN

Dedico esta

dissertação à minha família.

Agradecimentos

- Agradeço a Deus por tudo que Ele tem realizado em minha vida.
- A minha mãe Noeme Célia Reges Sousa, a quem devo muito ao que sou hoje. E por todo esforço e dedicação em minha formação estudantil.
- A meu pai Alfredo Mendes de Sousa (*in memoriam*), pelo exemplo de transparência e honestidade em tudo que fazia. E por ser um apreciador dos acontecimentos relacionados à astronomia. Exemplo que me fez insistir nesse ramo da ciência.
- Aos meus irmãos Alexandre Magno Reges Sousa, Elvis Maikon Reges Sousa, Eduardo Albert Reges Sousa, por todo apoio e companheirismo, principalmente nesta fase tão importante para mim.
- A Marcelo Nobre e Daniele Lima, por todo o esforço e confiança que depositaram em mim, para que eu prosseguisse e desbravasse novos horizontes. E pela amizade, pois sem a qual, talvez minha vida tivesse outro rumo.
- A Francimar e Socorro Costa pelo acolhimento e apoio nesta jornada de mestrado.
- A toda família de Afonso Ligório e Ana, pela força e ajuda não só neste período acadêmico, mas em vários momentos da minha vida.
- A Adriano Santiago, Lessandro Jorge e Caio Eduardo, pela amizade e colaboração diante dos desafios da vida acadêmica.

- Aos professores da graduação Carlos Braga e Aureliano pelo incentivo e pela ajuda na formação acadêmica.
- Ao Prof. Dr. José Ronaldo Pereira da Silva, pela orientação, pela confiança, pelas dicas de como se portar diante das apresentações e pelos conselhos que me ajudaram a chegar até aqui.
- Ao Prof. Dr. Braúlio Batista Soares pela coorientação, e pelas palavras motivadoras que me foram de grande ajuda em certas ocasiões.
- A todos os amigos e colegas de mestrado, pelas ocasiões de dificuldade enfrentadas e pelos bons momentos que passamos.
- Ao Prof. Dr. Nilson Sena de Almeida, cujos conselhos e sugestões me guiaram em várias ocasiões no mestrado.
- A Universidade do Estado do Rio Grande do Norte, em especial aos professores e funcionários do PPGF, que contribuiram para a minha formação acadêmica. E ao secretário da pós-graduação Tiago Martins.
- A CAPES pela ajuda financeira.

Resumo

Neste trabalho relacionamos o índice entrópico q com a idade das estrelas do campo. Utilizando a Mecânica Estatística Não-Extensiva, através da função de distribuição teórica proposta por Soares *et al.*(2006), obtemos o índice entrópico q a partir da distribuição das velocidades projetadas $V\sin\, i$ das estrelas do campo com massa variando entre 0,9 - 1,1 $M_{\odot}$ e faixa de idade entre 1 - 10 G·anos. Interpretando o índice entrópico q como parâmetro de memória, nós mostramos a existência de uma anti-correlação entre os valores de q e a idade das estrelas do campo, um resultado semelhante ao encontrado para as estrelas de aglomerado observado por Silva *et al.*(2013). Entretanto, para as estrelas do campo, que os valores de q tendem para a unidade somente para idades em torno de 13 G·anos. Esta idade é superior a idade na qual as estrelas de aglomerados galácticos abertos, tendem a perder a memória do seu *momentum* angular inicial, que é por volta de 100 M·anos. Nosso trabalho sugere ainda que a memória do *momentum* angular inicial das estrelas do campo perde-se com a idade de forma mais lenta do que ocorre com as estrelas de aglomerados abertos.

Palavras-chave: Rotação estelar, *Momentum* angular estelar, Estatística não-extensiva, Estrelas do campo.

Abstract

In this paper we relate the entropic index q with the age of the field stars. Using the Statistical Mechanics Non-Extensive, through theoretical distribution function proposed by Soares *et al.*(2006), get the entropic index q from the distribution of projected speeds $V\sin\, i$ of the field of stars with mass varying from 0.9 to 1.1 $M_\odot$ and age range between 1 - 10 G·years. Interpreting the entropic index q as memory parameter, we show the existence of an anti-correlation between the values of q and age of the field of stars, a result similar to that found for the cluster of stars observed by Silva *et al.*(2013). However, the stars of the field, that the q values tend to unity only for ages around 13 G·years. This age is higher than the age at which the stars of galaxy clusters open, they tend to lose memory of its initial angular *momentum*, which is about 100 M·years. Our work also suggests that the memory of the initial angular *momentum* of the field of stars is lost with age more slowly than occurs with the stars of open clusters.

Keywords: Stellar rotation, Stellar angular *momentum*, Statistical non-extensive, Field stars.

Sumário

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

A astrofísica estuda o comportamento evolutivo das estrelas, desde sua formação, até o fim de sua existência como estrela. Nesse campo de estudos, a rotação pode contribuir para acionar e manter os mais diversos fenômenos como: o vento estelar que causa perda de massa e a consequente evolução do *momentum* angular, o processo de nucleossíntese que altera a abundância de elementos químicos, dentre outros. Infelizmente existem poucos dados observacionais de velocidade rotacional equatorial verdadeira, o que em parte prejudica a investigação de diversos tipos de fenômenos nessa área. Uma das soluções utilizadas para contornar esse problema é analisar as velocidades de rotações projetadas, $V\sin i$.

1.1 Velocidade de Rotação Projetada

A maioria das medidas de rotação é obtida pelo alargamento Doppler das linhas espectrais. A rotação da estrela provoca o alargamento das linhas espectrais da radiação nas diversas partes do disco estelar. Portanto temos que a luz vista da parte que se aproxima do observador, provoca um deslocamento das linhas para a região azul do espectro. E a luz do disco que afasta-se do observador desloca as linhas espectrais para a região do vermelho. Como resultado da superposição das linhas espectrais provenientes das diferentes regiões do disco estelar, temos um alargamento das linhas espectrais.

Para obtermos $V\sin i$, temos que considerar a estrela girando como um corpo sólido sobre seu eixo e com uma velocidade angular $\vec{\Omega}$ para qualquer ponto escolhido sobre a superfície da estrela definido pelo vetor $\vec{R}$. Vemos pela figura 1.1 que a linha de visada coincide com o eixo z, formando um ângulo i com o eixo de rotação localizado no plano $y-z$. E a velocidade

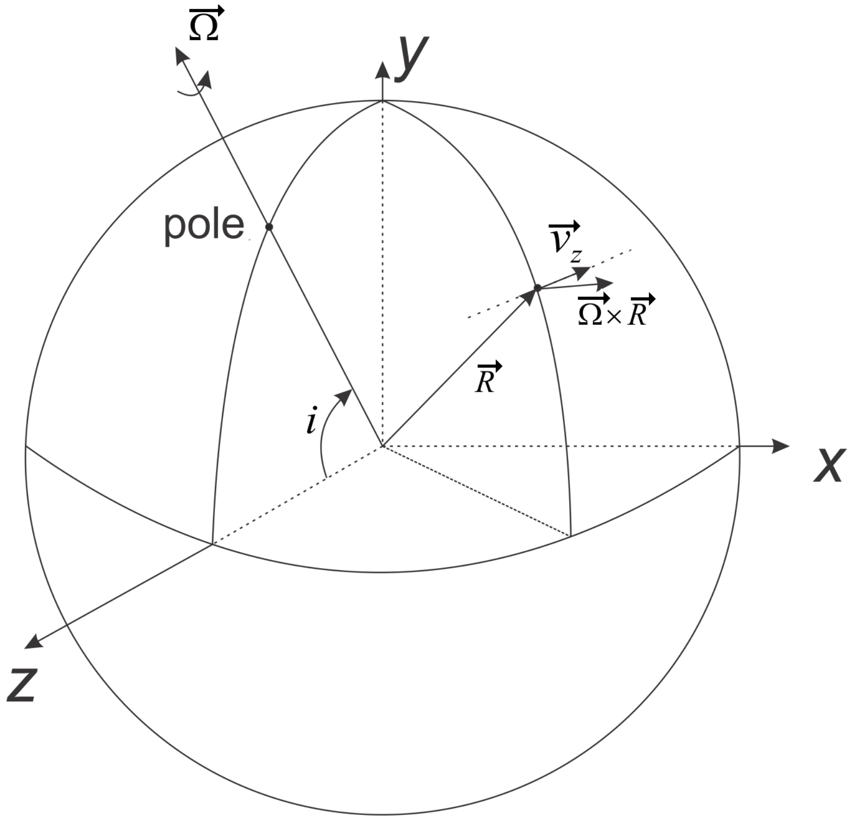

Figura 1.1: *Estrela girando como um corpo rígido. O ângulo i entre o eixo de rotação e a linha de visada, representada pelo eixo z. Onde $\vec{\Omega}$ está no plano $y - z$. A velocidade é $\vec{V} = \vec{\Omega} \times \vec{R}$ para qualquer ponto da superfície representada pelo vetor $\vec{R}$.*

equatorial é

$$\vec{V} = \vec{\Omega} \times \vec{R}. \tag{1.1}$$

O efeito Doppler dado pela componente da velocidade rotacional na linha de visada é dado por:

$$V_z = \Omega_x R_y - \Omega_y R_x. \tag{1.2}$$

Como $\Omega_x = 0$ e $\Omega_y = \Omega \sin\, i$, teremos:

$$V_z = -R_x \Omega \sin\, i. \tag{1.3}$$

E terá valor máximo com $|R_x| = R$, portanto:

$$V_z = R\Omega \sin i. \tag{1.4}$$

E assim:

$$V_z = V \sin i, \tag{1.5}$$

onde V é a velocidade equatorial verdadeira. E vemos que por causa do fator $\sin i$, a velocidade obtida é sempre inferior ao valor da velocidade equatorial verdadeira. Utilizando dados de $V \sin i$, é possível realizar diversas investigações sobre a física da estrutura e do comportamento da evolução das estrelas. A velocidade de rotação das estrelas diminui com tempo, graças ao fenômeno conhecido como freio magnético, que resulta na perda do *momentum* angular estelar.

1.2 Perda de *momentum* angular relacionado ao freio magnético

No processo da evolução, encontram-se alguns fatores que influenciam na rotação estelar. Na literatura encontramos trabalhos que mostram uma queda na velocidade de rotação com tempo [1, 2]. Essa queda de rotação muitas vezes está associada ao freio magnético [3, 4]. A grande maioria das estrelas possuem um campo magnético remanescente da nuvem principal. Em outras estrelas o campo magnético se desenvolveu posteriormente por algum processo de dínamo. A seguir veremos algumas formas onde ocorrem a perda de *momentum* angular das estrelas pela atuação do campo magnético.

1.2.1 Freio magnético devido ao aclopamento estrela-disco

Outro fenômeno ao qual relacionamos a perda de *momentum* angular é a interação do campo magnético da estrela com o campo magnético do seu disco de acreção [5]. A perda de *momentum* angular como resultado da interação magnética no aclopamento estrela-disco ocorre nas fases da pré-sequência principal e da sequência principal precoce [6]. Nesse mesmo período ocorre a acreção de matéria do disco para a estrela, aumentando sua massa e elevando o valor do *momentum* angular da estrela. Mas a interação magnética da estrela com o seu disco reduz o *momentum* magnético, contrabalaçando o aumento deste *momentum* que resulta da acreção de matéria [7].

1.2.2 Relação entre freio magnético e vento estelar

Existem alguns mecanismos propostos que tentam explicar a ejeção de massa por ventos estelares. São mecanismos como os ventos coronais, ventos causados pela poeira circunstelar, ventos causados pela radiação e campo magnético: ondas de Alfvén [8]. Os ventos estelares também são responsáveis pela perda de *momentum* angular nas estrelas, pois parte da matéria da superfície estelar ganha energia e é ejetada para o espaço, sendo essa uma das principais formas de perda de massa.

Essa perda de massa pode ocorrer de forma catastrófica, na explosão de uma supernova ou de forma discreta e contínua como no Sol [9]. Na figura 1.2 vemos a correlação entre o vento estelar e o campo magnético. Representando a atuação do vento solar na fase de declínio do ciclo de atividade solar 23 [10]. Percebe-se que os picos de maior intensidade tanto do campo magnético quanto dos ventos estelares coincidem.

As ondas de Alfvén são um dos principais mecanismos de produção dos ventos estelares em estrelas sem regiões coronais extensas ou fluxos radioativos. E também um dos principais fenômenos que ocorrem na presença de campo magnético mesmo em estrelas de baixa rotação. As ondas de Alfvén são ondas transversais que se propagam por meio das linhas do campo magnético. A figura 1.3 ilustra o mecanismo dos ventos estelares, demonstrando como a matéria é ejetada da estrela através das linhas de campo.

Uma vez que o vento estelar realiza a ejeção de matéria para o espaço e posteriormente perdendo *momentum* angular, o campo magnético pode atuar como uma extensão do raio da matéria distribuida ao redor da estrela, causando a perda de *momentum* angular e consequentemente a queda na velocidade rotacional. Esse mecanismo de desaceleração estelar gradativa é conhecido como freio magnético [3, 4], e ocorre principalmente em estrelas da sequência principal. Neste contexto a rotação estelar pode ser usada como um cronômetro pelo qual se pode estimar a idade das estrelas. Neste trabalho iremos relacionar o índice entrópico q obtido a partir da distribuição das rotações estelares com a idade estelar como objetivo de testar se este índice pode também ser usado como relógio para estimar a idade estelar. O índice q é o principal parâmetro no formalismo não-extensivo proposto por Tsallis [11], o qual passamos a descrever.

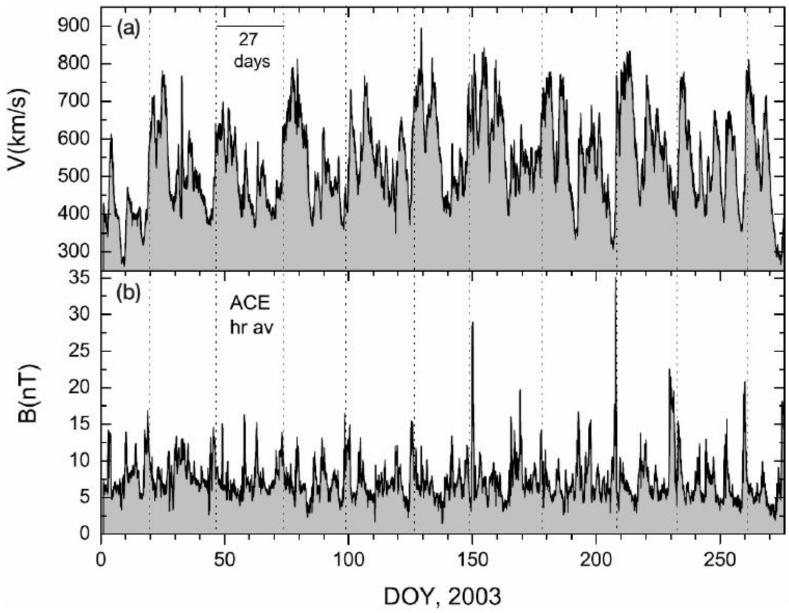

Figura 1.2: *O painel (a) representa as flutuações da velocidade do vento solar no período do ano de 2003 medidos a 1 UA (unidade astronômica) pelo telescópio espacial ACE (Advanced Composition Explorer). O painel (b) representa as flutuações da intensidade do campo magnético também medidos sob as mesmas condições que a velocidade do vento [10].*

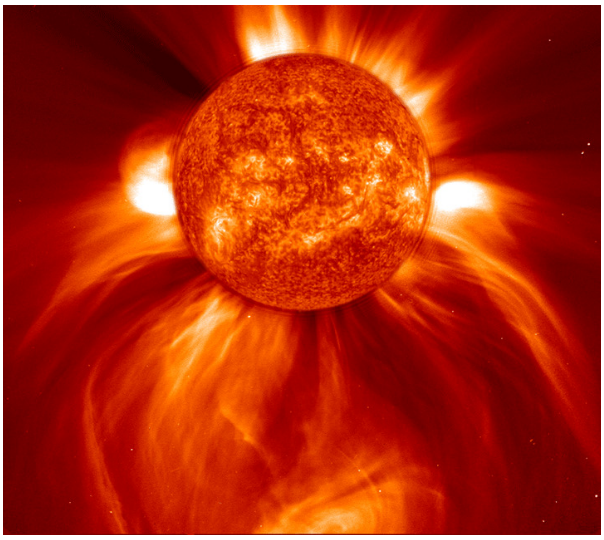

Figura 1.3: *Observação dos ventos estelares feita pelo SOHO (Solar Heliospheric Observatory). Fonte: http://soho.nascom.nasa.gov/lenticular/Suncombo1.jpg*

Capítulo 2

Formalismo não-extensivo

Na estatística, mesmo que não haja um conhecimento completo do sistema, ela nos permite extrair o maior número de dados desse sistema. Diante de um número muito grande de átomos e partículas constituintes da matéria, se torna muito difícil calcular as equações do movimento para cada partícula, de acordo com a mecânica (newtoniana). A partir da integração da mecânica com a estatística surgiu a possibilidade de se obter algumas informações macroscópicas a partir de um grande número de informações microscópicas.

A mecânica estatística foi se desenvolvendo ao longo dos séculos, mas as maiores contribuições da termodinâmica obtidas com relação a entropia foram realizadas por Ludwig Boltzmann (1844-1906), Josiah Gibbs (1839-1903) e Claude Shannon (1916-2001). Os conceitos de energia e entropia são essenciais para definir várias questões referentes a essa área, a energia está sujeita a uma lei de conservação, onde ela apenas se transforma, não podendo ser criada ou destruída. Já a entropia segue a lei de evolução, havendo sempre um crescimento, pois na natureza os sistemas tendem espontaneamente ao seu estado equilíbrio. A mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs-Shannon, descreve com sucesso os sistemas simples, onde a entropia é considerada uma grandeza extensiva. As propriedades extensivas, são aquelas que apresentam dependência direta com a quantidade de substância do sistema. Exemplos disso são a massa, volume, quantidade de substância, etc. Essa propriedade tem por consequência a aditividade. Ao contrário disso, existem as propriedades intensivas, as quais não demonstram dependência com a quantidade de substância do sistema. Podemos exemplificá-la na temperatura, densidade, pressão, etc, e consequentemente caracterizada como não-aditiva. A energia e entropia são consideradas propriedades extensivas para a mecânica estatística de

Boltzmann-Gibbs-Shannon. A extensividade tem a característica de desprezar as interações microscópicas ou interações de longo alcance, seguindo a seguite regra

$$S_{BG}(A+B) = S_{BG}(A) + S_{BG}(B). \tag{2.1}$$

A entropia na visão da mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs-Shannon, denotada para a totalidade de microestados acessíveis do sistema W, estabelecida para os microestados estados equiprováveis é tida como

$$S_{BG} = k_B \ln W, \tag{2.2}$$

onde k_B é a constante de Boltzmann.

Até aqui vimos a entropia ser tratada em sistemas simples, sendo analizada como propriedade extensiva. Mas para estudá-la em sistemas de longo alcance, não a observamos mais como propriedade extensiva. Sendo tratada agora nos estudos de sistemas complexos. Nesses trabalhos sobre a não-extensividade o físico greco-brasileiro Constantino Tsallis [11], propôs uma forma generalizada para a mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs-Shannon. Onde nessa estatística a entropia é dada pela soma das entropias de cada subsistema, de modo que na forma generalizada, proposta por Tsallis, temos

$$S_q(A+B) = S_q(A) + S_q(B) + (1-q)S_q(A)S_q(B), \tag{2.3}$$

onde q é o índice entrópico do sistema e também uma medida da não-extensividade do sistema. S_q representa a forma generalizada da entropia para sistemas não-extensivos. Nota-se que quando $q \to 1$ a entropia assume sua forma usual, onde vale a propriedade aditiva.

A partir de seus estudos, Tsallis generalizou a fórmula para a entropia da seguinte maneira,

$$S_q = k_B \frac{W^{1-q} - 1}{1-q}. \tag{2.4}$$

As funções exponencial e^x e logarítmica $\ln x$ foram generalizadas para as funções q-exponencial e q-logarítmica, respectivamente,

$$e_q^x \equiv [1 + (1-q)x]^{\frac{1}{1-q}} \tag{2.5}$$

e

$$\ln_q x \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1-q}. \tag{2.6}$$

Podemos verificar na função 2.6, que a propriedade de pseudo-aditividade é satisfeita, isto é,

$$\ln_q(x_A x_B) = \ln_q(x_A) + \ln_q(x_B) + (1-q)\ln_q(x_A)\ln_q(x_B). \tag{2.7}$$

Na mecânica não-extensiva notamos a existência de uma relação da energia com as possibilidades de um sistema se encontrar em um determinado estado, já a entropia corresponde as probabilidades em que essas possibilidades ocorrem. O aumento da energia acarreta num aumento do número de possibilidades, que trazem consigo uma dada probabilidade. Em sistemas simples, temos que se as possibilidades, W crescem de forma rápida, a desordem cresce de forma lenta. Em sistemas complexos a desordem cresce de uma forma mais lenta ou mais rápida de acordo com a função logarítmica, significando que há uma diferença da velocidade de crescimento vista nos sistemas e a velocidade em que a desordem cresce conforme se eleva o número de possibilidades do sistema complexo. Os sistemas complexos exibem diversas propensões para examinar suas possibilidades. Propensão esta, vista como uma tendência, uma inclinação, uma forma de parciabilidade. Assim a propensão representa uma espécie de tendência que o sistema tem em realizar um determinado comportamento complexo, ao invés de outro mais simples. Como no caso de um tornado, onde por mais que a probabilidade de seu movimento complexo seja baixa, existe a tendência da trajetória das moléculas do ar seguirem esse movimento correlacionado, em vez de seu movimento aleatório das moléculas, como ventos em trajetórias independentes e com diferentes intensidades [12]. Assim podemos verificar a propensão em diversos sistemas da natureza, e estudá-la em diversas áreas das ciência. Para o nosso caso estudamos a ocorrência da propensão para a perda da memória do *momentum* angular inicial transferido da nuvem principal para as estrelas em formação com a idade. Nós associamos o índice entrópico q à propensão para a redução do *momentum* angular com o tempo, e reforçamos a ideia que a memória desse *momentum* pode ser escalonada pelo índice q.

Capítulo 3

A Função de distribuição da rotação estelar

Na seção 1.1 descrevemos brevemente sobre a dificuldade de se obter dados de velocidades de rotação verdadeira, devido ao ângulo de inclinação, i, do eixo de rotação com a linha de visada. Somente um número muito pequeno de estrelas possui o ângulo i conhecido, para a grande maioria das estrelas não é possível se obter a velocidade de rotação verdadeira, e assim inferir a orientação dos eixos de rotação das estrelas. Para contornar esse problema, Chrandrasekhar & Münch [13] na década de 50 apresentaram o método, onde se determina a distribuição das velocidades de rotações verdadeiras através da distribuição das velocidades de rotação projetada. Segundo eles, conforme a distribuição, a média das velocidades de rotações equatoriais $\langle V \rangle$ é determinada a partir da média das velocidades projetadas, usando uma relação simples, dada por:

$$\langle V \rangle = \frac{4}{\pi} \langle V \sin\, i \rangle. \tag{3.1}$$

A convolução entre a distribuição da velocidade equatorial V e a distribuição do ângulo i resulta na função de densidade de probabilidade $V \sin\, i$, de acordo com a equação

$$\phi(V \sin\, i) = \int \varphi(V) P(V \sin\, i | V) dV, \tag{3.2}$$

onde $\varphi(V)$ é a função de distribuição de probabilidade das velocidades equatoriais e $P(V \sin\, i|V)$ é a probabilidade de $V \sin\, i$ estar no intervalo $[V, V + dV]$. Quando se tem uma distribuição aleatória para o ângulo entre o eixo de rotação e a linha de visada, temos a seguinte probabilidade condicional

$$P(V\sin\ i|V) = \begin{cases} \frac{V\sin\ i}{V\sqrt{V^2-(V\sin\ i)^2}}, & \text{se} \quad V > V\sin\ i \\ 0, & \text{se} \quad V \leq V\sin\ i. \end{cases}$$

Fazendo sua substituição na equação 3.2, obtemos

$$\phi(V\sin\ i) = \int_{V\sin\ i}^{\infty} \varphi(V) \frac{V\sin\ i}{V\sqrt{V^2 - (V\sin\ i)^2}} dV, \tag{3.3}$$

onde essa equação é uma integral abeliana, proposta pelo matemático Norueguês Niels Henrick Abel (1802-1829) e definida como $\int_0^x \frac{f(x)}{(x-y)^2} dy = g(x)$, para $0<\alpha<1$ e com $g(0) = 0$, e com solução $f(y) = \frac{1}{\pi}\sin(\pi\alpha)\frac{d}{dx}\int_0^y \frac{g(x)}{(y-x)^{1-\alpha}} dx$.

A solução analítica da equação 3.3 é dada pela seguinte expressão:

$$\varphi(V) = -\frac{2V^2}{\pi}\frac{d}{dV}\int_V^{\infty} \frac{V\phi(V\sin\ i)}{V\sin\ i^2\sqrt{V\sin\ i^2 - V^2}} d(V\sin\ i). \tag{3.4}$$

Esta solução entretanto não é muito prática, uma vez que é necessário calcular a diferencial de uma frequência observada, o que não constitui uma tarefa fácil. Pode-se no entanto conjecturar sobre a solução da equação levando-se em conta um ou mais parâmetros conforme a natureza física da função que soluciona a equação. Assim, o problema posto, o de encontrar a função de distribuição da rotação verdadeira, a despeito do ângulo i desconhecido, pode ser contornado encontrando-se a função de distribuição da rotação projetada, e usando a ideia proposta por Chrandrasekhar & Münch [13] para fazer a inversão. Na literatura, é possível encontrar diversas propostas de funções de distribuição de $V\sin\ i$, abaixo destacaremos a proposta de [14] e, posteriormente a proposta de [15] no contexto do formalismo não-extensivo.

3.1 Função de distribuição segundo Deutsch

Em 1970 Deutsch [14] publicou o trabalho no qual, através de uma amostra para estrelas da sequência principal de tipos espectrais na faixa de B2 - A2, compostas por 782 estrelas, ele determinou a distribuição das velocidades rotacionais, $V\sin\ i$. Para isso, ele supôs a homogeneidade da distribuição das velocidades rotacionais e que as componentes cartesianas do eixo de rotação eram independentes uma das outras. A função de distribuição proposta seguiu as definições da mecânica estatística de Maxwell-Boltzmann, resultando numa função de distribuição maxwelliana. A demonstração de Deutsch segue o roteiro que passaremos a descrever.

Primeiro toma-se um escalar ω, onde este é o módulo de um vetor $\vec{\omega}$. Assume-se que esse vetor possa ser decomposto em coordenadas cartesianas, que sua distribuição seja isotrópica e que suas componentes sejam independentes uma das outras. Em seguida escreve-se Ω como uma variável admensional, determinada como $j\omega$, onde j tem dimensão de ω^{-1}. Assim tem-se que

$$\vec{\Omega} = \Omega_x \widehat{i} + \Omega_y \widehat{j} + \Omega_z \widehat{k},$$

onde a probabilidade de encontrar um valor de Ω_x no intevalo $[\Omega_x, \Omega_x + d\Omega_x]$, Ω_y em $[\Omega_y, \Omega_y + d\Omega_y]$, e Ω_z em $[\Omega_z, \Omega_z + d\Omega_z]$ é dada por

$$F(\Omega_x, \Omega_y \Omega_z) d\Omega_x d\Omega_y d\Omega_z = h(\Omega_x^2) h(\Omega_y^2) h(\Omega_z^2) d\Omega_x d\Omega_y d\Omega_z.$$

Levando-se em conta que a distribuição é isotrópica, tem-se que

$$F(\Omega_x, \Omega_y \Omega_z) = H(\Omega^2) = H(\Omega_x^2 | \Omega_y^2 | \Omega_z^2). \tag{3.5}$$

E fazendo a seguinte consideração

$$H(\Omega^2) = h^2(0) h^2(\Omega^2), \tag{3.6}$$

segue da equação 3.6 que

$$h(\Omega_x^2) h(\Omega_y^2) h(\Omega_z^2) = h^2(0) h^2(\Omega^2). \tag{3.7}$$

Agora, para um dado $u \geq 0$, tem-se

$$\xi(u) = \ln \frac{h(u)}{h(0)}, \tag{3.8}$$

e utilizando a equação 3.8, tem-se que:

$$\begin{aligned} \xi(\Omega^2) &= \ln \frac{h(\Omega_x^2)}{h(0)} + \ln \frac{h(\Omega_y^2)}{h(0)} + \ln \frac{h(\Omega_z^2)}{h(0)} \\ &= \xi(\Omega_x^2) + \xi(\Omega_y^2) + \xi(\Omega_z^2). \end{aligned}$$

E caso $\Omega_x^2 = \Omega_y^2 = u$, e $\Omega_z = 0$, temos que

$$\begin{aligned}\xi(2u) &= \ln \frac{h(u)}{h(0)} + \ln \frac{h(u)}{h(0)} \\ &= \xi(u) + \xi(u) \\ &= 2\xi(u).\end{aligned}$$

Ou se, $\Omega_x^2 = u$, $\Omega_y^2 = 2u$, e $\Omega_z = 0$, obtem-se

$$\begin{aligned}\xi(3u) &= \ln \frac{h(u)}{h(0)} + \ln \frac{h(2u)}{h(0)} \\ &= \xi(u) + \xi(2u) \\ &= 3\xi(u).\end{aligned}$$

E tomando um número inteiro n, tem-se para todos os casos

$$\xi(nu) = n\xi(u). \tag{3.9}$$

Tomando-se $u = \frac{v}{n}$, segue-se que

$$\xi\left[n\left(\frac{v}{n}\right)\right] = n\xi\left(\frac{v}{n}\right),$$

onde

$$\xi\left(\frac{v}{n}\right) = \frac{1}{n}\xi\left[n\left(\frac{v}{n}\right)\right] = \frac{1}{n}\xi(v).$$

E com um m inteiro positivo, tem-se que

$$m\xi\left(\frac{v}{n}\right) = \frac{m}{n}\xi(v),$$

e a partir da equação 3.9, obtem-se

$$\xi\left(\frac{m}{n}v\right) = \frac{m}{n}\xi(v).$$

E assim vemos que o resultado obtido tem validade para todo número racional positivo de m e n, e portanto sendo válido inclusive um x irracional positivo de forma que

$$\xi(xv) = x\xi(v).$$

Agora, se $v = 1$, segue que

$$\xi(x) = x\xi(1) = cx.$$

E assim,

$$\frac{d\xi(x)}{dx} = c.$$

E pela equação 3.8, segue-se

$$\frac{1}{h(x)}\frac{dh}{dx} = c,$$

que tem como solução

$$h(x) = ae^{cx}. \tag{3.10}$$

Sabendo que $h(\Omega_x^2)$ é uma função de probabilidade, temos pela função de normalização que

$$2\int_0^\infty h(\Omega_x^2)d\Omega_x = 2a\int_0^\infty e^{c\Omega_x^2}d\Omega_x = 1, \tag{3.11}$$

onde o valor médio de Ω_x^2 é descrito por

$$\langle\Omega_x^2\rangle = 2a\int_0^\infty \Omega_x^2 e^{c\Omega_x^2}d\Omega_x. \tag{3.12}$$

Determinando o parâmetro j pela seguinte relação

$$(1/j)^2 = 2\langle\omega_x^2\rangle.$$

Temos que nas equações 3.11 e 3.12 que $a = \sqrt{\pi}$ e $c = -1$. E a partir daí escrevemos a distribuição de Ω como $f(\Omega)d\Omega$, em que

$$\begin{aligned} f(\Omega) &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} H(\omega^2)\omega^2 \sin\theta d\theta d\varphi \\ &= H(\Omega^2)\Omega^2 \int_0^\pi 2\pi \sin\theta d\theta \\ &= 4\pi H(\Omega^2)\Omega^2. \end{aligned}$$

Conforme vimos na equação 3.6, escrevemos

$$f(\Omega) = 4\pi\Omega^2 h^2(0)h^2(\Omega^2). \tag{3.13}$$

E na equação 3.10, temos

$$f(\Omega) = 4\pi\Omega^2 a^2 e^{c\Omega^2}. \tag{3.14}$$

Como $a = \sqrt{\pi}$ e $c = -1$, tem-se

$$f(\Omega) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\Omega^2 e^{-\Omega^2}. \tag{3.15}$$

Portanto Deutsch [14] propôs essa função de distribuição seguindo a mecânica estatística de Maxwell-Boltzmann, enquanto que outros autores na atualidade buscam na mecânica estatística não-estensiva de Tsallis uma forma diferente de determinar essas distribuições, como é o caso de [15].

3.2 Função de distribuição segundo Soares *et al.*

Uma primeira aplicação da teoria não-extensiva para o estudo da função de distribuição da rotação estelar foi proposto por [15]. Nesse estudo os autores generalizaram a função proposta por [14], escrevendo-a na forma de uma q-maxwelliana e a confrontaram com a distribuicão rotacional das Plêiades. Abaixo mostramos como se pode generalizar as funções de distribuição da rotação estelar no contexto do formalismo não-extensivo seguindo o caminho proposto por [16].

Primeiramente assume-se que as estrelas giram como um corpo rígido em torno do seu eixo, com massa M e raio R, onde se calcula a energia cinética rotacional através da seguinte expressão, $E = \frac{1}{2}I\omega^2$, em que $I = \frac{2}{5}MR^2$ representa o momento de inércia e $\omega = VR^{-1}$ que é a velocidade angular para a rotação das estrelas. A velocidade angular de rotação mínima dessa estrela é dada por $\omega_{min} = (V\sin\, i)R^{-1}$, sendo a energia cinética de rotação mínima escrita como:

$$E_{min} = \frac{1}{2}I\omega_{min}^2. \tag{3.16}$$

Considerando que a energia E_{min} pode ser expressa pela função $\varphi(E_{min})$. Temos que para um grupo de estrelas com massas, raios e idades semelhantes, a energia E_{min} dependa apenas de $V\sin\, i$, a quantidade de estrelas com energia entre E_{min} e $E_{min}+dE_{min}$ pode ser determinada por:

$$dN(E_{min}) = p(E_{min})dE_{min}, \tag{3.17}$$

onde $p(E_{min})$ é a densidade de probabilidade para estrelas com energia cinética rotacional E_{min}. Como sabemos a densidade de probabilidade para velocidades rotacionais observadas tende a 0, conforme os valores de $V\sin\, i$ aproximam-se da velocidade de *breack-up*. Partindo da função de distribuição de rotação proposta por Deutsch [14] e assumindo que a distribuição da rotação segue uma exponencial generalizada, podemos generalizar essa função no contexto do formalismo não-extensivo de Tsallis [11]. Para isso propõe-se que a densidade de probabilidade obedece à equação diferencial não linear, $dp/dx = -\beta p^q$, onde sua solução é obtida por

$$p(x) = [1 - (1-q)\beta x]^{1/(1-q)}. \tag{3.18}$$

A função acima é a q-deformação da função exponencial usual $\exp(-\beta x)$ e pode ser reduzida à função exponencial no limite em $q \to 1$. Assim podemos reescrever a equação 3.17 da seguinte forma

$$dN(E_{min}) = [1 - (1-q)\beta E_{min}]^{1/(1-q)} dE_{min}, \tag{3.19}$$

onde se tem que

$$dN(y) = \frac{2}{5} MRy \left[1 - (1-q)\frac{y^2}{\sigma_y^2}\right]^{1/(1-q)} dy, \tag{3.20}$$

onde $y = V\sin\, i$ e $\sigma_y = (\beta M/5)^{-1/2}$ é a largura média da distribuição. Esta equação pode descrever a distribuição da rotação de uma amostra de estrelas com massa, raio e idade semelhantes. Seguindo o formalismo não-extensivo proposto por Tsallis [11] para tal grupo de estrelas, essa função de distribuição dos dados rotacionais observados, quando normalizada, pode ser escrita como

$$\varphi_q(y) = y \left[1 - (1-q)\frac{y^2}{\sigma_y^2}\right]^{1/(1-q)}. \tag{3.21}$$

Esta é a mesma equação derivada por [15], a qual generalizou a função de Deutsch [14].

Como q é uma medida da não-extensividade do sistema, ressalta-se que quando $q \to 1$ a estatística deixa de ser generalizada e retoma a forma de Boltzmann-Gibbs-Shannon. E quando o valor de q for alto, destaca-se as interações de longo alcance. Tem que ser deixado claro que a mecânica estatística não-extensiva não é uma alternativa à estatística de Boltzmann-Gibbs-Shannon, mas uma de suas formas generalizadas. Essa contribuição dada por Tsallis [11], foi aplicada a diferentes setores da ciência, e ganhou aplicações inclusive na astrofísica, por exemplo, [16, 17]. E a partir desse formalismo, foi proposto por [16] a função de distribuição teórica, vista anteriormente na equação 3.21, onde o índice entrópico q mede a não-extensividade do sistema e também é interpretado como um parâmetro de longa memória ou interações de longo alcance. E σ é um parâmetro dependente da massa estelar e está associado com a largura característica da distribuição da rotação.

Assumindo que o parâmetro q está associado ao grau de aleatoriedade dos eixos rotacionais, [16] sugeriram a existência de uma correlação entre o valor do índice q e as idades dos aglomerados abertos. Mais recentemente, [18] relacionaram o parâmetro q à memória do *momentum* angular estelar das estrelas em aglomerados galácticos. Eles assumiram que as estrelas guardam por um certo tempo parte da memória do *momentum* angular da nuvem que lhes deu origem. Com o tempo, na medida em que os aglomerados vão envelhecendo, essa memória vai se perdendo devido a diversos fenômenos que ocorrem nas estrelas e a interações com o meio. Neste contexto, o parâmetro q deveria refletir este fenômeno, estando correlacionado com a idade. Essa hipótese foi testada usando dados de aglomerados e essa correlação foi encontrada, de modo que eles determinaram uma idade $\gtrsim 170$ milhões de anos para que essa memória estivesse totalmente perdida, ou seja, quando $q = 1$.

Capítulo 4

A amostra e o método utilizado

4.1 Dados da amostra

A nossa amostra consiste em 1733 dados de rotação projetada, $V\sin i$, de estrelas do campo, do tipo solar, com idades entre 1 e 10 G·anos. As medidas de rotação foram obtidas por [19]. Essas medidas foram realizadas com o espectômetro CORAVEL [20, 21], cujos os valores de $V\sin i$ foram obtidos seguindo a calibração de [22], a qual permite medições de $V\sin i$ para estrelas anãs com uma precisão de 1 km/s para rotações até 30 km/s. Para rotações acima de 30 km/s a precisão varia entre 5 km/s e 10 km/s. As estrelas da amostra apresentam índices de cor variando no intervalo 0,55 $\leq$ B - V $\leq$ 0,75, o qual corresponde a massas estelares variando num intervalo de 0,9 $\lesssim$ M/M$_\odot$ $\lesssim$ 1,1 M$_\odot$ [23]. As estrelas identificadas como binárias espectroscópicas foram retiradas da amostra, pois o efeito maré, pode afetar a velocidade rotacional [24, 25].

As medidas das idades foram obtidas no The Geneva-Copenhagem Survey of the Solar Neighbourhood (GCS) [19], que reúne dados de 16682 estrelas anãs do tipo F e G próximas. Os dados das idades e suas respectivas incertezas foram calculados ajustando-se modelos de isócronas a dados de fotometria, conforme descrito em [26]. Para nossa proposta, como pretendemos estudar o comportamento do índice entrópico q com a idade, nossa amostra foi dividida em intervalos de 0,5 G·anos, sendo que em alguns casos foi necessário estabelecer um intervalo diferente, para contornar a escassez de dados. Tais intervalos são: 4,5 a 5,5 e 8,0 a 9,0 G·anos.

A tabela 4.1 apresenta os principais parâmetros de nossa amostra. Na primeira coluna encontram-se os logaritmos das médias das idades para cada intevalo de idade selecionado.

O número de estrelas constituintes em cada faixa de idade é dado na coluna (2). Na coluna (3) estão as médias dos valores das velocidades rotacionais projetadas $V\sin\, i$ em kms^{-1} e seus respectivos desvios-padrão. Nas colunas (4) e (6) estão os valores de melhor ajuste q e σ, além dos seus respectivos erros. Estes parâmetros, q e σ, foram obtidos ajustando a integral da função de distribuição da rotação teórica, equação 3.21 (ver seção 3.2), à função de distribuição cumulativa empírica. Na coluna (5) encontam-se os valores da razão entre q e o valor de q médio provenientes da simulação com o método de bootstrap, q_b. Na coluna (7) apresentamos os valores da razão entre σ e σ_b, onde σ_b é o valor de σ obtido pela simulação com o método de bootstrap. Na coluna (8) encontra-se a soma dos quadrados dos resíduos (RSS) que consiste na soma dos quadrados das distâncias entre os dados observados e o modelo, consistindo em uma medida da qualidade do ajuste. A coluna (9) representa a probabilidade do resultado da aplicação do teste de Anderson-Darling, indicando portanto a probabilidade de que o modelo com os parâmetros de melhor ajuste, q e σ dados nas colunas (4) e (6), e o estimador kernel obtidos dos dados sejam provenientes da mesma população. Altos valores dessas probabilidades mostram assim que existe um excelente acordo entre o modelo com os parâmetros de melhor ajuste e os dados observacionais.

(1) Idade	(2) N	(3) $V\sin i$	(4) q	(5) q/q_b	(6) σ	(7) σ/σ_b	(8) RSS	(9) Prob
9.13	8	15.00 ± 13.0	1.668 ± 0.088	1.111	3.458 ± 1.372	0.883	0.050	0.552
9.26	15	10.13 ± 12.7	1.710 ± 0.030	1.035	1.630 ± 0.283	0.824	0.026	0.655
9.36	35	10.82 ± 13.5	1.661 ± 0.031	0.990	2.458 ± 0.315	1.094	0.038	0.560
9.45	45	6.80 ± 6.0	1.493 ± 0.020	1.009	3.299 ± 0.153	0.974	0.007	0.680
9.52	41	5.68 ± 4.9	1.481 ± 0.046	1.013	2.745 ± 0.266	0.935	0.019	0.672
9.58	57	4.05 ± 2.3	1.244 ± 0.046	1.010	3.072 ± 0.169	1.059	0.004	0.664
9.63	70	3.94 ± 2.4	1.302 ± 0.036	0.948	2.711 ± 0.138	1.016	0.004	0.628
9.71	109	4.47 ± 2.9	1.222 ± 0.066	0.972	3.402 ± 0.265	1.141	0.009	0.648
9.76	95	4.09 ± 4.3	1.311 ± 0.077	1.037	2.606 ± 0.274	0.937	0.014	0.648
9.80	97	3.74 ± 2.7	1.104 ± 0.055	0.977	3.108 ± 0.173	1.070	0.004	0.641
9.83	106	4.04 ± 3.6	1.303 ± 0.044	1.006	2.530 ± 0.160	1.013	0.005	0.641
9.86	104	3.56 ± 2.9	1.320 ± 0.081	1.026	2.287 ± 0.259	0.909	0.014	0.664
9.89	104	3.17 ± 1.7	1.096 ± 0.061	0.976	2.730 ± 0.160	0.932	0.004	0.634
9.93	163	3.18 ± 2.2	1.204 ± 0.066	1.020	2.401 ± 0.184	0.962	0.007	0.658
9.96	78	3.04 ± 1.4	1.013 ± 0.054	1.033	2.839 ± 0.131	1.018	0.002	0.645
9.99	52	2.82 ± 1.8	1.396 ± 0.046	1.045	1.606 ± 0.136	1.004	0.007	0.675

Tabela 4.1: *Parâmetros de nossa amostra. A coluna (1) mostra os logaritmos das médias das idades. A coluna (2) identifica o número das estrelas contidas em cada faixa de idade. A coluna (3) mostra as médias dos valores das velocidades rotacionais projetadas $V\sin i$ em kms^{-1} e seus respectivos desvios-padrão. Nas colunas (4) e (6) estão os valores de melhor ajuste q e σ e seus respectivos erros. Na coluna (5) encontam-se os valores da razão entre q e o valor de q médio provenientes da simulação com o método de bootstrap, q_b. Na coluna (7) apresentamos os valores da razão entre σ e σ_b, onde σ_b é o valor de σ obtido pelo método de bootstrap. Na coluna (8) encontra-se a soma dos quadrados dos resíduos (RSS) que consiste na soma dos quadrados das distâncias entre os dados observados e o modelo. A coluna (9) representa a probabilidade de que o modelo com os parâmetros q e σ dados nas colunas (4) e (6) e o estimador kernel obtido dos dados descrevam a mesma população.*

4.2 A função da distribuição acumulada empírica (FDAE)

O principal problema na elaboração de uma função de distribuição de probabilidades é a definição do passo, que pode alterar a forma de um histograma, por exemplo. Para evitar esse problema nós optamos por trabalhar com a função da distribuição acumulada empírica (FDAE), que não depende da escolha de um passo. Os procedimentos para a elaboração dessas funções para cada grupo de estrelas separadas por intervalo de idade são descritos a seguir. Inicialmente, ordenamos os dados de $V\sin i$ do menor $V\sin i_{a=1}$ para o maior $V\sin i_{a=N}$, onde N, significa o número de dados $V\sin i$ em cada intervalo de idade. Em seguida, para cada intervalo de idade, calculamos a frequência $f_N(V\sin i)$ [27], definida como:

$$f_N = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad V\sin i < V\sin i_1, \\ a/N, & \text{se} \quad V\sin i_a < V\sin i \leq V\sin i_{a+1}, \\ 1, & \text{se} \quad V\sin i \leq V\sin i_N. \end{cases}$$

A FDAE para cada intervalo de idade é portanto um gráfico do parâmetro $f_N(V\sin i)$ em função da rotação, $V\sin i$.

Para determinar os parâmetros q e σ, nos ajustamos a integral da função teórica $\varphi(y)$, dada pela Equação 3.21 à FDAE de cada grupo de estrelas segregadas por idade. O ajuste foi realizado utilizando o algoritmo de Gauss-Newton para minimizar a soma dos quadrados dos resíduos e uma tolerância de 10^{-5} para a convergência [28]. Com o intuito de reduzir o risco de convergência para um mínimo local, nós utilizamos um programa gráfico interativo (qtiplot) pelo qual fomos gradualmente modificando os valores de q e σ tentando aproximar o melhor possível a curva teórica da curva dos dados. Os valores de q e σ da curva teórica que visualmente melhor se aproximava dos dados foram utilizados como valores iniciais. Pra restrigir os parâmetros q e σ de melhor ajuste num intervalo de confiança de 95% foi usado o método de bootstrap com 1000 repetições para estimar os limites inferior e superior deste intervalo.

Como um teste independente para os valores de melhor ajuste q e σ, nós computamos o estimador densidade kernel-KDE [29, 30, 31] da FDAE para cada grupo separado por intervalos de idade, para os quais foram realizados um teste de Anderson–Darling (teste A-D) com um nível de confiança de 95%. Neste teste comparamos as curvas de melhor ajuste, encontradas como descrito acima, com o seu equivalente KDE. Na tabela 4.1 apresentamos os valores das probabilidade do teste A-D com a hipótese nula de que a curva de best-fit e o KDE são provenientes da mesma distribuição de probabilidade. Observamos que todas as probabilidades são maiores que 0,05, indicando que a hipótese nula pode ser aceita como verdadeira.

Nas figuras 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4 observa-se que a velocidade de rotação $V\sin\,i$ das estrelas do campo tende a diminuir com a idade estelar, como mostra o aspecto geométrico da FDAE, que se torna mais íngreme com o tempo. Este comportamento é previsível e é explicado no contexto da teoria do freio magnético, a qual descrevemos anteriormente na seção 1.2. Esse comportamento pode ser capturado pelo parâmetro q, o qual é sensível ao perfil das curvas de distribuição. Assim, o fato de que o índice entrópico q da rotação varia com o tempo está embasado na teoria do freio magnético [3, 4], podendo portanto servir como cronômetro para datar estrelas. Esse estudo está em curso no grupo de Astroestatística da UERN. Na seção seguinte, apresentaremos e descutiremos os nossos resultados.

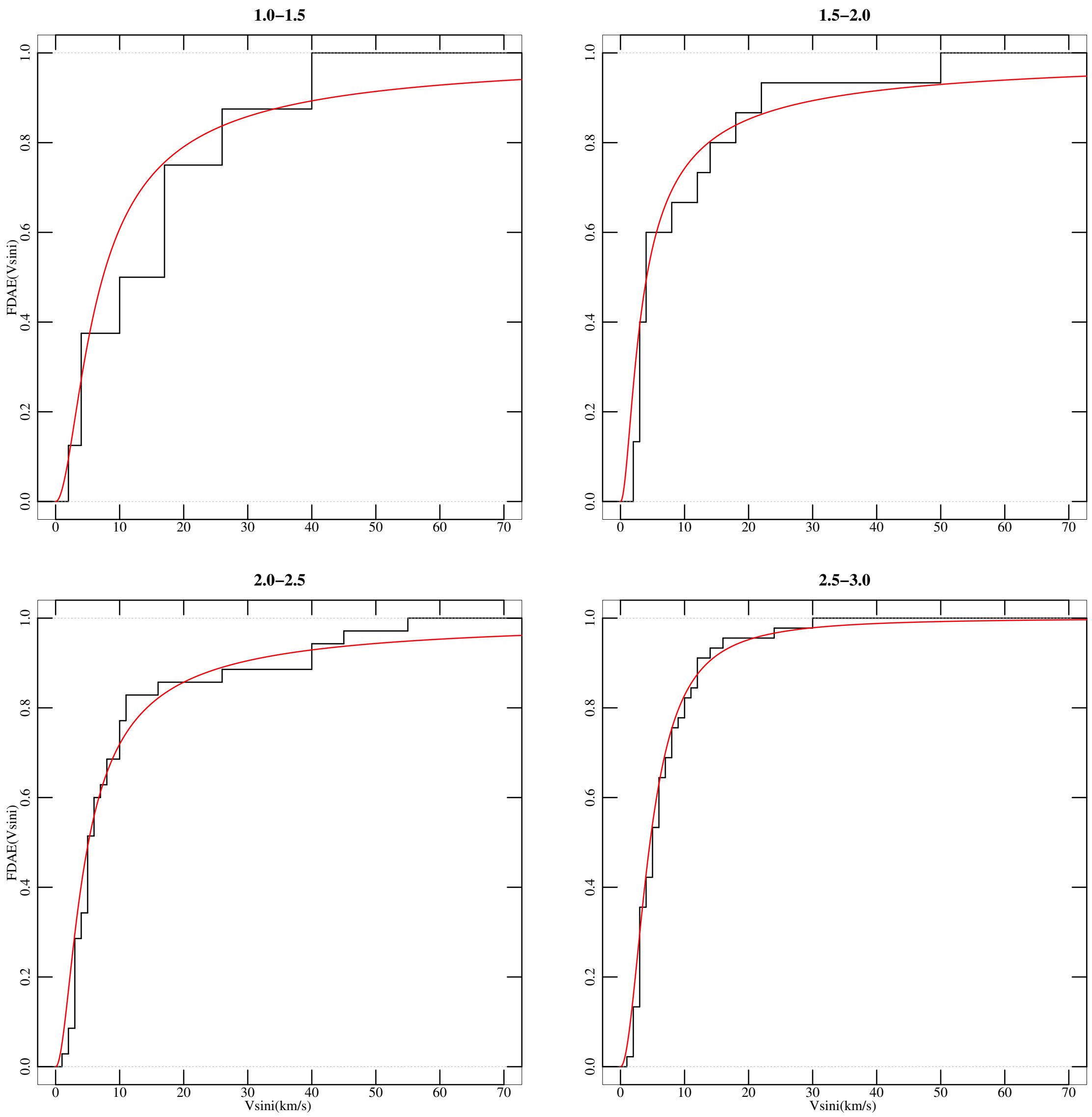

Figura 4.1: *FDAE de $V \sin i$ (linhas pretas) e a respectivas curvas de melhor ajuste (linhas vermelhas) para os intervalos de idade: 1.0-1.5, 1.5-2.0, 2.0-2.5 e 2.5-3.0.*

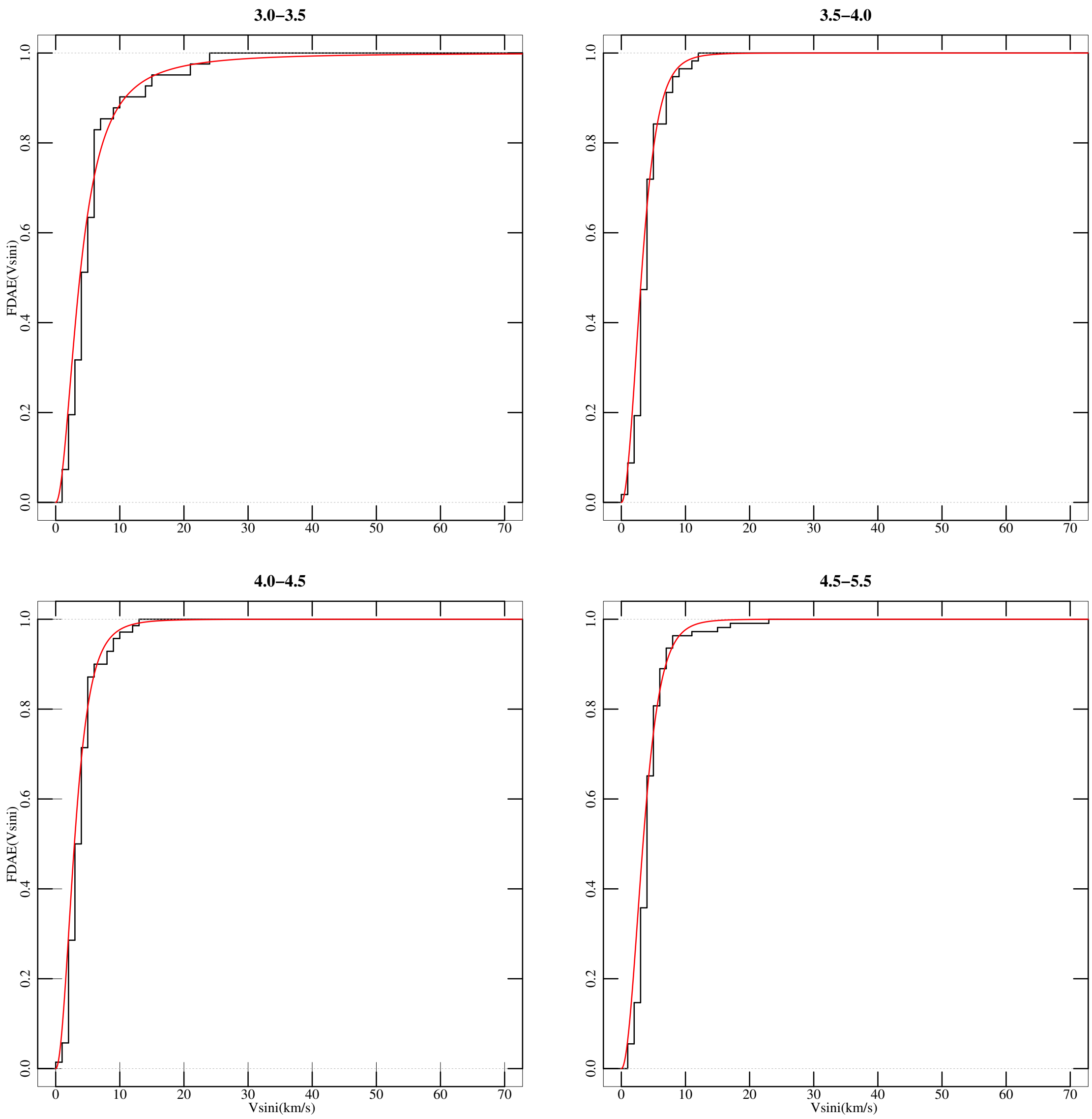

Figura 4.2: *FDAE de* $V \sin i$ *(linhas pretas) e as respectivas curvas de melhor ajuste (linhas vermelhas) para os intervalos de idade: 3.0-3.5, 3.5-4.0, 4.0-4.5 e 4.5-5.5.*

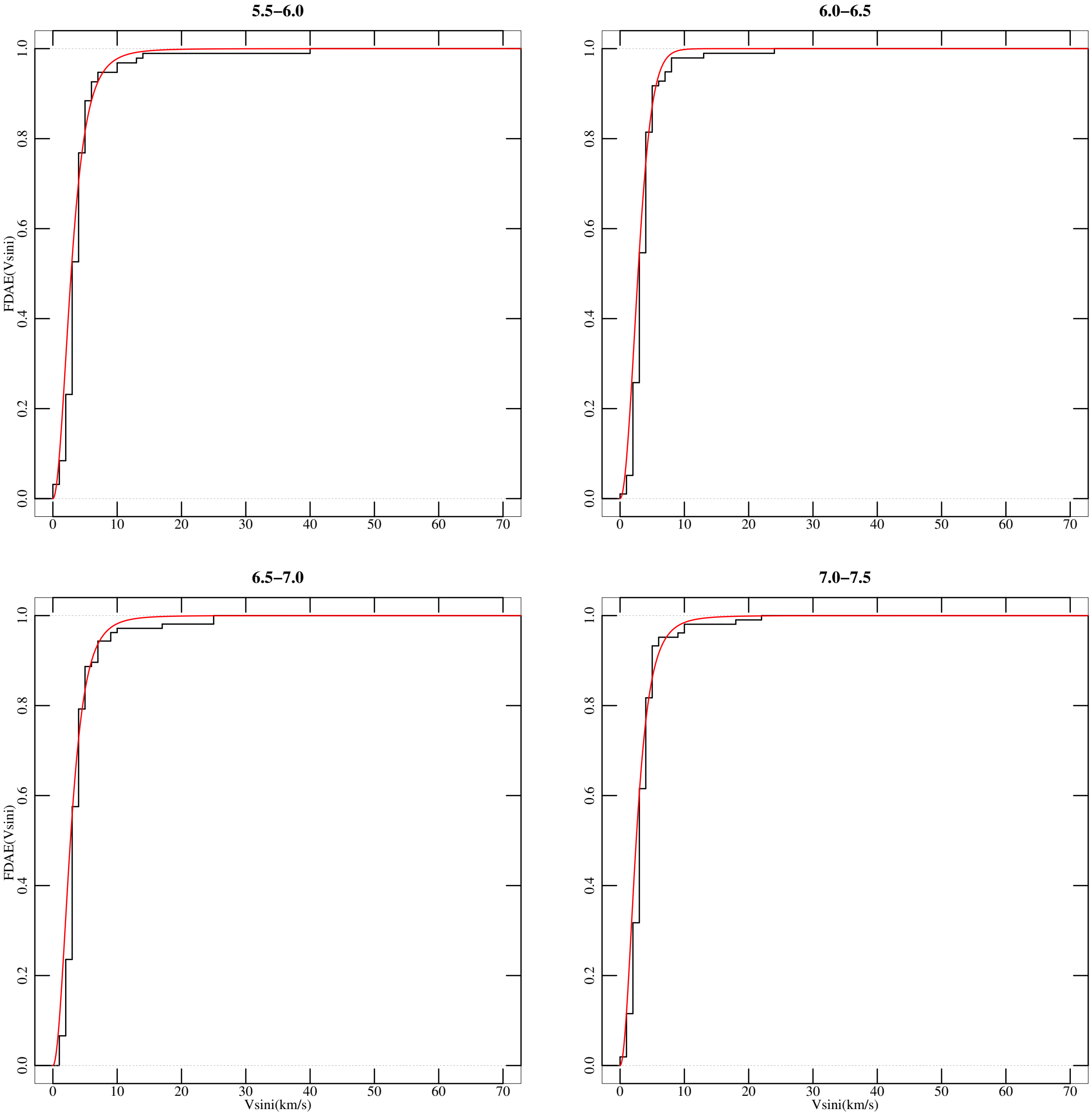

Figura 4.3: *FDAE de* $V\sin i$ *(linhas pretas) e as respectivas curvas de melhor ajuste (linhas vermelhas) para os intervalos de idade: 5.5-6.0, 6.0-6.5, 6.5-7.0 e 7.0-7.5.*

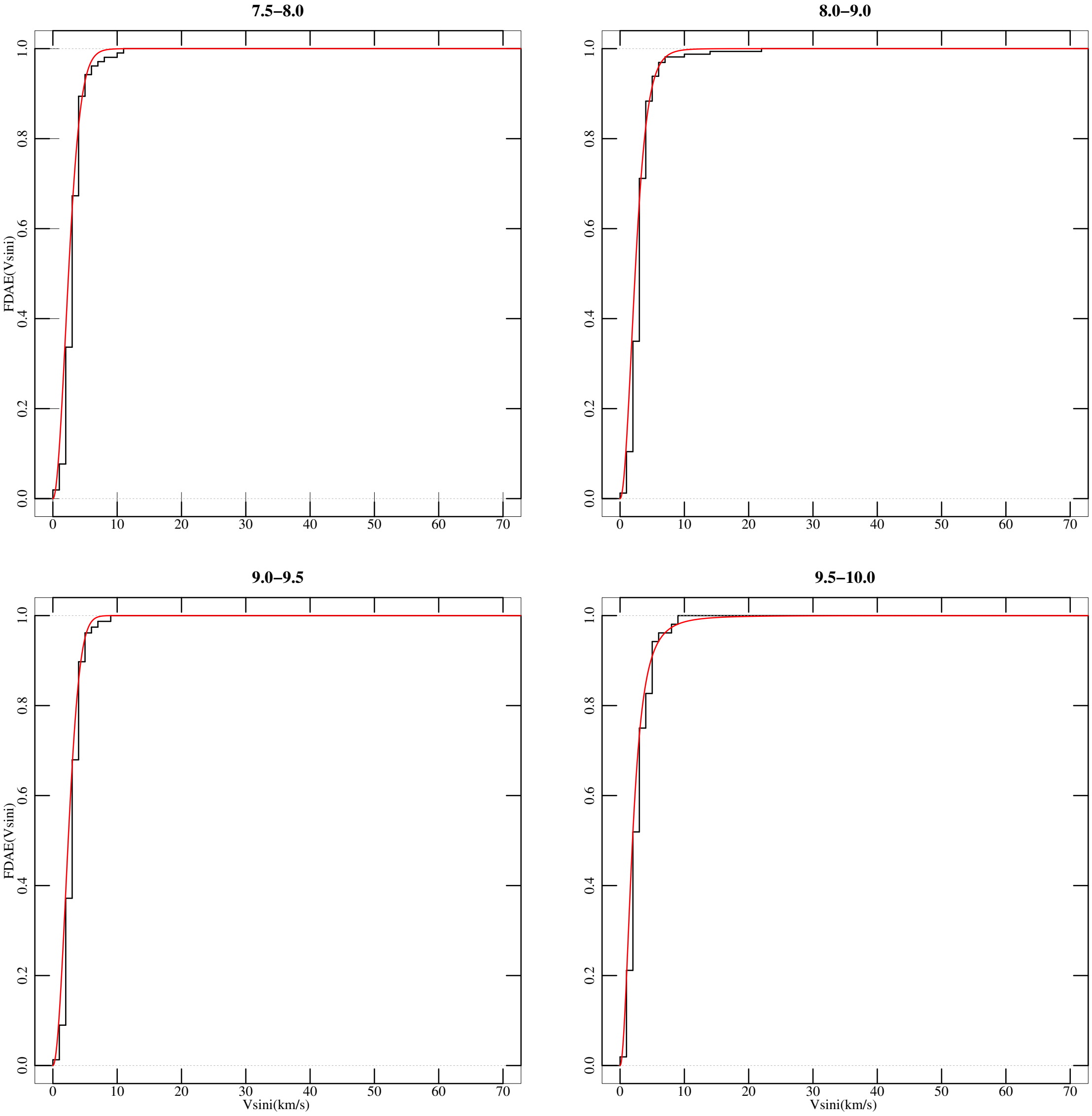

Figura 4.4: *FDAE de* $V \sin i$ *(linhas pretas) e as respectivas curvas de melhor ajuste (linhas vermelhas) para os intervalos de idade: 7.5-8.0, 8.0-9.0, 9.0-9.5 e 9.5-10.0.*

Capítulo 5

Resultados e discussões

Neste capítulo faremos uma análise do comportamento do índice entrópico q provenientes da distribuição da rotação estelar com a idade das estrelas. Nós interpretaremos o índice q como um parâmetro de memória relacionado à memória do *momentum* angular estelar, ou seja, o *momentum* angular que a estrela tinha no momento em que entrou na sequência principal [18]. Neste contexto $q = 1$ indica uma distribuição de rotação que pode ser muito bem representada por uma curva maxwelliana, sendo portanto uma distribuição onde as estrelas já teriam perdido completamente a memória do seu *momentum* angular inicial. Por outro lado, uma distribuição com um valor de $q > 1$ indica que ainda existe uma memória preservada.

5.1 A relação entre o índice entrópico q e a idade das estrelas do campo

A figura 5.1 mostra os valores de q em função da média das idades das estrelas do campo representadas pelos pontos pretos e seus respectivos intervalos de confiança. A linha verde representa a linha de melhor ajuste para esses pontos, indicando o comportamento geral da relação entre q e a idade estelar. A linha tracejada em $q = 1$ mostra os pontos onde a distribuição do *momentum* angular pode ser considerada completamente aleatória, ou seja, onde não haverá mais memória do *momentum* angular estelar inicial. O ponto de intersecção entre essas duas linhas se dá em log(idade)$= 10,13$ dex ($\simeq$ 13,5 G·anos). Assumindo que o índice q está associado à memória do *momentum* angular das estrelas [18], temos que para as estrelas do campo, a memória do *momentum* angular inicial extingue-se a uma idade aproximadamente de 13,5 G·anos. A partir desta idade a distribuição da rotação torna-se completamente aleatória. Observa-se ainda a existência de uma anti-correlação entre o índice

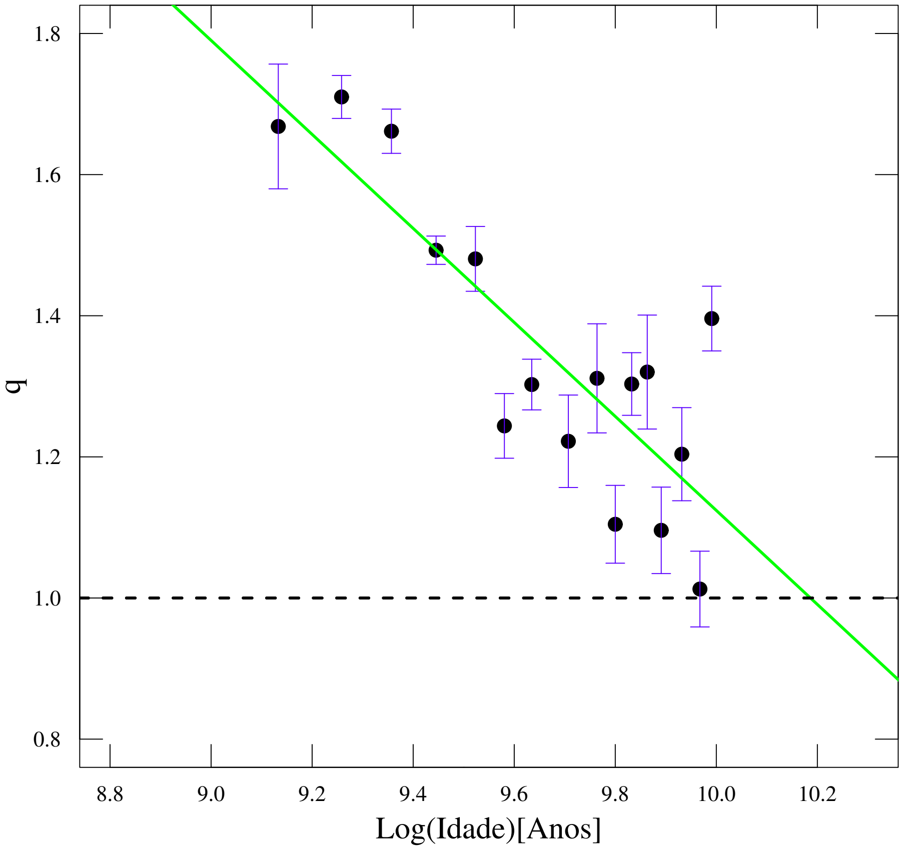

Figura 5.1: *Valores de q em função da média das idades. A reta verde representa a linha de melhor ajuste, sendo q = -0.67log(idade)+7.79. As barras de erros correspondem ao intervalo de confiança de* 95% *obtidos pelo método de reamostragem bootstrap, com 1000 repetições.*

entrópico q e a idade estelar. Um teste de correlação de Spearman com nível de confiança de 95%, nos mostra claramente esta anti-correlação entre q e a idade, dando como resultado um ρ = -0,7, com uma probabilidade p = 0,003, para hipótese nula de correlação positiva. Essa anti-correlação entre q e a idade estelar indica que memória do *momentum* angular decresce com tempo. Tal anti-correlação foi observada por [18] para estrelas de aglomerados abertos. Entretanto, para as estrelas observadas por [18] o tempo necessário para a perda de memória do *momentum* angular é bem menor, sendo em torno de 692 M·anos. A diferença de comportamento da relação entre q e a idade para estrelas do campo e de aglomerados abertos pode ser vista na figura 5.2. Essa figura é semelhante a anterior, mas nela nós acrescentamos os dados analisados por [18] para estrelas de aglomerados abertos, representadas por pontos azuis. Observa-se que a linha vermelha, representando o melhor ajuste para estes dados apresenta uma maior inclinação que a linha verde. De acordo com esses resultados, as estrelas do campo mantém a memória do seu *momentum* angular por mais tempo do que as estrelas de aglomerados abertos. A que se deve tal diferença de idade para a preservação da memória do *momentum* angular inicial?

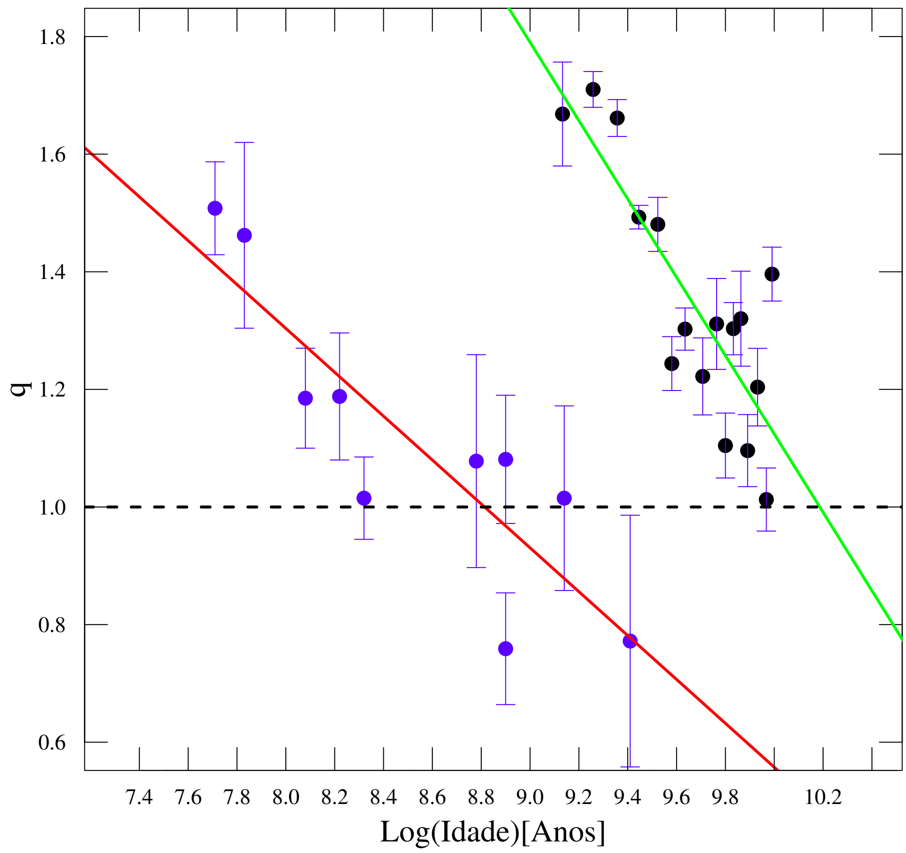

Figura 5.2: *Comportamento de q com a idade. A linha vermelha representa a perda de momentum angular com a idade, para as estrelas de aglomerados abertos. E a linha verde representa a perda de momentum angular inicial com a idade, para as estrelas do campo.*

As estrelas são formadas a partir de nuvens de gás, poeira, átomos e moléculas que colapsam a partir de alguma de suas regiões que ficam mais densas seja de forma espontânea ou devido a fatores externos tais como: ondas de choque provindas de uma supernova, colisão com outra nuvem ou choques gravitacionais na galáxia. Dessa contração resulta o aumento da temperatura, criando o ambiente adequado à fusão nuclear que faz surgir a estrela. Neste processo de formação, diversos fatores contribuem para a dissipação do *momentum* angular. Um exemplo é a redistribuição do *momentum* que ocorre durante a fragmentação de uma nuvem que dá origem a um aglomerado [32, 33, 34]. Outros mecanismos tanto presentes nas estrelas de aglomerado quanto do campo são a interação entre a estrela e seu disco acreção [5] e a perda de *momentum* angular por ventos solares [35]. Além disso, o processo da evolução estelar também inclui fenômenos que contribuem para a perda do *momentum* angular. Neste contexto podemos citar as interações gravitacionais entre as estrelas, o efeito maré devido ao campo gravitacional galáctico e encontros gravitacionais com nuvens interestelares. Fatores internos também contribuem, como por exemplo, o desacopamento entre o núcleo e a envoltória da estrela, que causa alterações no *momentum* de inércia da estrela [36, 37], e a remoção de *momentum* angular pelos efeitos da magnetohidrodinâmica, como freio magnético [3, 4]. Apesar de todos esses processos modificando o *momentum* angular, queremos destacar a transferência de *momentum* angular da nuvem para as estrelas e a memória desse *momentum* angular que é preservada, apesar dos processos que ocorrem na formação e evolução [32, 33, 34].

No caso de estrelas de aglomerados, é razoável supor que as estrelas mantenham, ao menos em parte, a memória do *momentum* angular da nuvem que lhes deu origem [38]. Essa memória entretanto perde-se com o tempo, na medida em que a estrela interage com o meio e evolui passando por mudanças em sua estrutura interna. O mesmo deve ser dito da galáxia, embora numa escala bem maior e em um meio gravitacionalmente diferente, já que as estrelas do campo estão mais afastadas umas das outras. Neste cenário as estrelas de aglomerados são mais influenciadas pelo meio gravitacional em que estão inseridas, perdendo mais rapidamente a memória do seu *momentum* angular inicial, onde a perda total desta memória está em torno de 10^8 anos, como estimado por [18]. As estrelas do campo quando exceto nos casos de sistemas múltiplos (binárias, triplas, etc.) evoluem em um meio gravitacionalmente diferente. Como só uma estrela é formada, parte do *momentum* é transmitido para ela, e outra parte é perdida em diferentes processos, como descrito acima [3, 4, 5, 35, 36, 37]. As estrelas do campo estão relativamente isoladas na galáxia não havendo praticamente interação gravitacional entre elas, devido as imensas distâncias que as separa. Fatores internos e externos atuam para essa perda de memória, mas o meio gravitacional é mais ameno o que resulta numa escala de tempo para perda do *momentum* angular bem maior do que a apresentada pelas estrelas de aglomerado, que agora estimamos em cerca de 13 G·anos.

Capítulo 6

Conclusões

O presente trabalho teve como objetivo analisar e verificar a existência de uma correlação entre o índice entrópico q, assumido como um parâmetro de memória do *momentum* angular estelar, e a idade das estrelas do campo. Deste modo, $q > 1$ indica que alguma memória do *momentum* angular ainda existe e $q = 1$ indica a ausência dessa memória. O trabalho foi realizado com base em uma amostra de 1.733 dados de rotação projetada, $V\sin\, i$. O índice entrópico q foi obtido a partir do ajuste da integral de uma função q-maxwelliana às funções de distribuição acumulada dos dados rotacionais. A análise do índice q dos dados de rotação das estrelas divididas em grupos de diferentes idades mostrou que existe uma anti-correlação entre este índice e a idade estelar. Essa anti-correlação é semelhante aquela já observada para estrelas de aglomerados abertos. Entretanto, observa-se que para as estrelas do campo a idade na qual as estrelas perdem totalmente a memória do seu *momentum* angular inicial é, $\gtrsim 13,5$ bilhões de anos, é muito superior a idade encontrada para estrelas em aglomerados abertos que é de $\lesssim 700$ milhões de anos. Tal diferença de tempo para a extinção da memória do *momentum* angular entre os dois tipos de estrelas pode estar relacionada ao meio no qual a estrela evolui. Nos aglomerados, as estrelas interagem gravitacionalmente de forma mais intensa do que no caso das estrelas do campo. Essa interação pode contribuir para uma dissipação mais rápida do *momentum* angular estelar nas estrelas de aglomerado do que nas estrelas do campo.

Capítulo 7

Perspectivas

A mecânica estatística não-extensiva de Tsallis nos dá uma nova perspectiva para investigar a evolução do *momentum* angular estelar. O índice entrópico q é capaz de capturar informações sobre a distribuição da rotação que nos permitem analisar a evolução da distribuição da rotação de forma relativamente mais simples. Por exemplo, os modelos de evolução de *momentum* angular em geral depedem de vários parâmetros, os quais devem ser controlados e analisados conjuntamente. Na mecânica estatística temos apenas dois, o índice q e σ. Neste contexto, abrem-se diversas perspectivas envolvendo a mecânica estatística não-extensiva, dentre as quais destacamos:

- Repetir este trabalho usando períodos rotacionais, que são livres da ambiguidade de $\sin i$ e mais precisos. Tais dados já estão disponíveis graças às missões dos satélites Kepler e COROT.

- Realizar um estudo para tentar quantificar a influência do meio gravitacional, utilizando diferentes bases, quando disponíveis. Exemplo, estrelas em aglomerados abertos, em aglomerados fechados, em associações e estrelas do campo.

- Fazer um estudo comparativo com os modelos teóricos de freio magnético no contexto do formalismo não-extensivo para melhor entender este mecanismo de dissipação de *momentum* angular.

- Desenvolver um modelo teórico na mecânica estatística não-extensiva para explicar a influência do meio gravitacional sobre a evolução do *momentum* angular estelar.

Bibliografia

[1] SKUMANICH, A. Time Scales for CA II Emission Decay, Rotational Braking, and Lithium Depletion. *ApJ*, v. 171, p. 565, 1972.

[2] KRAFT, R. P., Studies of Stellar Rotation. V. The Dependence of Rotation on Age among Solar-Type Stars. *Astrophys. J.*, v. 150, p.551, 1967.

[3] KAWALER, S. D. Angular momentum loss in low-mass stars. *Astrophys. J.*, v. 333,p. 236, 1988.

[4] MASAHIRO, N. MACHIDA, M, N., INUTSUKA, S & MATSUMOTO, T. Magnetic Fields and Rotations of Protostars. *Apj*, v. 670, p. 1198-1213, 2007.

[5] KOENIGL, A. Disk accretion onto magnetic T Tauri stars. *ApJ*, v. 370, p. L39, p. 1991.

[6] SANTOS, H. B. S., A evolução dos q-momentos da distribuição da rotação de estrelas do tipo solar. Dissertação (Mestrado) - UERN, Mossoró - RN, 2015.

[7] BOUVIER, J.; MATT, S.P.; MOHANTY, S.; SCHOLZ, A.; STASSUN, K.G.; ZANNI, C. Angular momentum evolution of young low-mass stars and brown dwarfs: observations and theory. *Protostars & Planets*, VI, 2013.

[8] LAMERS, H. J. G. L. M., CASSINELLI, J. P. Introduction to Stellar Winds. *Cambridge*, UK: Cambridge, pp. 452, 1999.

[9] MACIEL, W. J., Hidrodinâmica e Ventos Estelares: Uma Introdução. *edusp* São Paulo - SP, 2005, ISBN: 85-314-0865-2.

[10] BURLAGA, L. F., VIÑAS, A. F. Multiscale structure of the magnetic field and speed at 1 AU during the declining phase of solar cycle 23 described by a generalized Tsallis probability distribution function. *J. Geophys Res.*, v. 109, Issue A12, CiteID A12107, 2004.

[11] TSALLIS, C., Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs Statistics. *Journal of Statistical Physics*, v. 52, p. 479, 1988.

[12] BORGES, E. P. Na sutil Fronteira entre a Ordem e o Caos. *Ciência Hoje*, v. 38, n. 223, p. 42-46, 2006.

[13] Chandrasekhar, S.; Munch, G. On the Integral Equation Governing the Distribution of the True and the Apparent Rotational Velocities of Stars. *ApJ*, v. 111, p. 142, 1950.

[14] Deutsch, A. J. Stellar Rotation. A. slettebak. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company, 1970.

[15] Soares,B. B, *et al.* Tsallis Maximum Entropy Distribution Function for Stellar Rotational Velocities in the Pleiades. *Physica A*, v. 364, p. 413-422, 2006. 1, 2, 6, 17, 21, 23, 28, 36, 37, 46.

[16] Soares, B. B.; Silva, J. R. P. On the rotation of ONC stars in the Tsallis formalism context. *Europhysics Letter*, v. 96, p. 19001, 2011.

[17] Carvalho, J. C.; Silva, R.; do Nascimento Jr, J. D.; De Medeiros, J. R. Power law statistics and stellar rotational velocities in the Pleiades. *Europhysics Letters*, v. 84, p. 59001, 2008.

[18] Silva, J. R. P.; Nepumuceno, M. M. F.; Soares, B. B.; De Freitas, D. B., Time-dependent nonextensivity arising from the rotational evolution of solar-type stars, *ApJ*, 777, 20, 2013.

[19] Nordström, B.; Mayor, M.; Andersen, J.; Holmberg, J.; Pont, F.; Jørgensen, B. R.; Olsen, E. H.; Udry, S.; Mowlavi, N. The Geneva-Copenhagen survey of the Solar neighbourhood. Ages, metallicities, and kinematic properties of $\sim$ 14 000 F and G dwarfs *A&A*, v. 418, p. 989-1019, 2004 (GCS I)

[20] Baranne, A. *et al.* CORAVEL - A new tool for radial velocity measurements. *A&A* 498 (1979) 949.

[21] Benz, W.; Mayor, M. A new method for determining the rotation of late spectral type stars. *A&A*, v. 93, p. 235, 1981.

[22] Benz, W.; Mayor, M., Photoelectric rotational velocities of late-type dwarfs. *A&A*, v. 138, p. 183, 1984.

[23] Cox, A. N. **Allen's Astrophysical Quantities**, Londres: Springer, 2000. p.390.

[24] De Medeiros, J. R.; Da Silva, J. R. P.; Maia, M. R. G.. The Rotation of Binary Systems with Evolved Components. *ApJ*, v. 578, p. 943, 2002.

[25] Zahn, J.–P. Tidal friction in close binary stars. *A&A*, v. 57, p. 383, 1977.

[26] Jϕrgensen, B. R., & Lindegren L.. Determination of stellar ages from isochrones: Bayesian estimation versus isochrone fitting. *A&A*, v. 436, p. 127-143, 2005.

[27] Qin, Yi-Ping *et al.* A statistical method for testing assumed distributions of sources. *A&AS*, v. 132, p. 301, 1998.

[28] Bates D. M. & Chambers, J. M. 1992. Statistical Models in S,J.M. Chambers and T.J. Hastie (editors), Wadsworth & Brooks/Cole, Pacific Grove, California.

[29] Nadayara, E. A. On Estimating Regression Theory of Probability and its Applications, v. 9, p. 141-142, 1964.

[30] Watson, G. S. Smooth regression analysis. *Sankhya: The Indian Journal of Statistics, Séries A*, v. 26, p. 359-372, 1964.

[31] Scott, D. W. 1992 Multivariate Density Estimation: Theory, Practice, and Visualization, John Wiley & Sons, New York, Chichester, p. 152

[32] Ballesteros-Paredes, J.; Hartmann, L. W.; Vázquez-Semadeni, E.; Heitsch, F.; Zamora-Avilás, M. A. Gravity or turbulence? Velocity dispersion-size relation. *MNRAS*, v.411, p.65B, 2011a.

[33] Ballesteros-Paredes, J.; Vázquez-Semadeni, E.; Gazol, A.; et al. Gravity or turbulence? - II. Evolving column density probability distribution functions in molecular clouds. *MNRAS* v.416, p.1436B, 2011b.

[34] Tomisaka, K. The Evolution of the Angular Momentum Distribution during Star Formation. *ApJ* v.528, p.L41, 2000.

[35] Shu, F.; Najita, J.; Ostriker, E. Magnetocentrifugally driven flows from young stars and disks. 1: A generalized model. *ApJ*, v. 429, p. 791, 1994.

[36] Endal, A. S.; Sofia, S. The evolution of rotating stars. II - Calculations with time-dependent redistribution of angular momentum for 7- and 10-solar-mass stars. *ApJ*, v. 220, p. 279, 1978.

[37] Spada, F. *et al.* Modelling the rotational evolution of solar-like stars: the rotational coupling time-scale. *MNRAS*, v. 416(1), p. 447, 2011.

[38] vant Veer, F. The age of the W Ursae Majoris stars. *A&A*, v. 44, p. 437, 1975.