



Universidade do Estado do Rio Grande do Norte
Faculdade de Ciências Naturais e Exatas
Programa de Pós-graduação em Física

Dayvid de Sousa Miranda

Estimando a Inclinação dos Eixos Rotacionais das Plêiades

Mossoró, fevereiro de 2014

Dayvid de Sousa Miranda

Estimando a Inclinação dos Eixos Rotacionais das Plêiades

Dissertação apresentada à
Universidade do Estado do
Rio Grande do Norte como
um dos pré-requisitos para
obtenção do título de
MESTRE em **FÍSICA**

Orientador: Prof. Dr. Bráulio Batista Soares

Mossoró, fevereiro de 2014

**Catálogo da Publicação na Fonte.
Universidade do Estado do Rio Grande do Norte.**

Miranda, Dayvid de Sousa.

Estimando a inclinação dos eixos rotacionais das plêiades. / Dayvid de Sousa Miranda. – Mossoró, RN, 2014

50 f.

Orientador(a): Prof. Dr. Bráulio Batista Soares

Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação). Universidade do Estado do Rio Grande do Norte. Universidade Federal Rural do Semi-Árido. Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação.

1. Rotação - Dissertação. 2. Distribuição - Dissertação. 3. Estatística não-extensiva - Dissertação. I. Soares, Bráulio Batista. II. Universidade do Estado do Rio Grande do Norte. III. Título.

UERN/BC

CDD 530

Bibliotecária: Elaine Paiva de Assunção CRB 15 / 492

Dayvid de Sousa Miranda

Estimando a Inclinação dos Eixos Rotacionais das Plêiades

Dissertação apresentada à
Universidade do Estado do
Rio Grande do Norte como
um dos pré-requisitos para
obtenção do título de
MESTRE em **FÍSICA**

Aprovada em ____ / ____ / ____

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Bráulio Batista Soares
Universidade do Estado do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. José Ronaldo Pereira da Silva
Universidade do Estado do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Antonio Carlos da Silva Miranda
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Para pessoas especiais

Meus Pais

Cesário Rodrigues Miranda (*in memoriam*)

Antonia Rosa de Sousa

Meus Irmãos

Paulo de Sousa Miranda

Denis de Sousa Miranda (*in memoriam*)

Agradecimentos

- Primeiramente A **DEUS**, que todos os dias de minha vida me deu força e sabedoria para nunca desistir.
- Ao meu orientador, **Prof. Dr. Bráulio Batista Soares**, com quem aprendi muito, em relação à nossa atividade de pesquisa. Além da orientação, apoio e dedicação, Esteve sempre disponível para ouvir minhas dúvidas. Agradeço também pelos bons comentários e sugestões que me facultou durante todas as fases desta dissertação. Obrigado, Professor;
- Agradeço a meus amigos **Prof. Msc. Joedson Oliveira, Prof. Bruno Lustosa** que me apoiaram nos momentos de dificuldades durante essa fase da minha vida.
- A minha formação como profissional não poderia ter sido concretizada sem a ajuda de meus amáveis e eternos pais **Cesário Rodrigues Miranda** (*in memorian*) e **Antonia Rosa de Sousa**, que, no decorrer da minha vida, proporcionaram-me, além de extenso carinho e amor, os conhecimentos da integridade, da perseverança e de procurar sempre em Deus à força maior para o meu desenvolvimento como ser humano. Por essa razão, gostaria de dedicar e reconhecer à vocês, minha imensa gratidão e sempre amor. Muito obrigado;
- Aos meus irmãos **Paulo de Sousa Miranda** e **Denis de Sousa Miranda** (*in memorian*) pelos momentos de companheirismo e de felicidade compartilhado durante toda minha vida;
- Aos meus colegas de Pós-Graduação **Rafael da Costa Nunes, Daniel Carneiro Nobre, Jimmy Arruda**, pelos momentos de companheirismo, alegria e felicidades;
- Agradeço a todos funcionários e professores do programa de pós-graduação da UERN, em especial a **Tiago Martins, Prof. Dr^a. Maria Aldinez, Prof. Dr. José Ronaldo** e ao **Prof. Dr. Vamberto Dias**.
- A todos os que me ajudaram a chegar até aqui, obrigado.

“Quanto mais nos elevamos, menores parecemos aos olhos daqueles que não sabem voar”

Friedrich Nietzsche

Resumo

A velocidade equatorial, V , para uma amostra de estrelas é calculada a partir de raios e dos períodos de rotação, $V = 2\pi R/P$, fornecido por [39]. A média $\langle \sin i \rangle$ do ângulo de inclinação i dos dados observacionais é estimada pela razão entre as médias da velocidade projetada, $\langle V \sin i \rangle$, e da velocidades reais $\langle V \rangle$. Na literatura a média dos ângulos de inclinação é admitida como igual a $\pi/4 = 0,79$ [3] considerando a hipótese de aleatoriedade das inclinações dos eixos de rotação, independentemente das particularidades da população estelar ou da amostra em estudo. Esse procedimento não raramente tem levado a divergências entre modelos teóricos e os dados observados. O presente trabalho tem a intenção de estimar o verdadeiro ângulo de inclinação para um conjunto de estrelas do aglomerado aberto Plêiades, fazendo ajustes da função de distribuição da rotação verdadeira de uma amostra com a função de distribuição generalizada [33], chamada função q -Maxwelliana. Determinamos o valor q por ajustes na distribuição de velocidade rotacional projetada dessas estrelas. Finalmente, os valores obtidos de q a partir dos ajustes são utilizados para estimar a média $\langle \sin i \rangle$ para as Plêiades, que produz um bom resultado quando comparado com os dados observacionais.

Palavras-chave: Rotação; Distribuição; Estatística Não-Extensiva; Aglomerados.

Abstract

The equatorial rotation, V is calculated from the radius and rotation periods by $V = 2\pi R/P$ provided by [39]. The mean $\langle \sin i \rangle$, the mean inclination angle i since is the inclination angle between the stellar rotation axe and the line of sight, of a sample of observational data is estimated from the ratio between the mean of the projected velocity $\langle V \sin i \rangle$ and the mean of the equatorial rotation $\langle V \rangle$. In the literature, the mean inclination angle always adopts a value of $\pi/4 = 0,79$ [3] considering the hypothesis of randomness of the inclination angle rotation axes. independent of the particularities of the stellar population or the data sample under study. Such a procedure not infrequently leads to divergences between theoretical models and observed data. The present intends to find out the real mean inclination angle for a set of stars in Pleiades cluster, making fits the distribution function of the true rotation of a sample with the generalized distribution function [33], named q -Maxwellian function. Determine the q value by fitting the projected rotational velocity distribution of those stars. Finally the q values obtained from the fitting procedures are used to estimate the mean $\langle \sin i \rangle$ for such Pleiades sample producing a good result when compared to means of the observational data.

Keywords: Rotation; Distribution; Non-extensive Statistics; Cluster.

Sumário

Lista de Figuras	xii
Lista de Tabelas	xiii
1 Introdução	1
2 Mecânica Estatística Não-Extensiva	5
2.1 Introdução	5
2.2 Equações Centrais da Mecânica Estatística Não-Extensiva	7
2.2.1 Função q-logaritmo	7
2.2.2 Entropia Não-Extensiva S_q	8
2.2.3 Generalização da Entropia de BG	8
2.3 A Probabilidade Associada	10
3 Relação entre Rotação e Evolução Estelar	12
3.1 Introdução	12
3.2 Estrelas de Alta Rotação	14
3.3 Estrelas de Baixa Rotação	15
4 A função de distribuição da rotação estelar	17
4.1 A distribuição das rotações segundo a mecânica estatística não-extensiva	20
4.2 A função de Distribuição $V \sin i$	22
4.2.1 Momentos da distribuição segundo Tsallis	23
5 Dados Observacionais	26
5.1 Plêiades	26
5.2 A amostra	28
6 Resultados e discussões	30
6.1 Análise da velocidade nos diferentes intervalos de massa	30
6.2 A função de distribuição generalizada	33
6.3 A média $\langle \sin i \rangle$	34
7 Conclusões e perspectivas	39

<i>SUMÁRIO</i>	xi
A Relação entre as médias	41
B Tabela de Dados Observacionais	43
Referências Bibliográficas	48

Lista de Figuras

1.1	<i>A figura mostra uma estrela rotacionando como um corpo sólido. O eixo que passa pela Terra define a linha de visada, que está inclinada em relação ao eixo rotacional por um ângulo i. A componente da velocidade de rotação verdadeira v_e no eixo que passa pela Terra é denominada como a velocidade rotacional projetada sobre a linha de visada $v_e \sin i$.</i>	2
3.1	<i>Distribuição de $V \sin i$ em função do tipo espectral para as estrelas do campo e de aglomerados. Nota-se que estrelas precoces apresentam velocidade superior às estrelas tardias. Figura adaptada de Stauffer & Hartmann (1986)</i>	13
5.1	<i>Fotografia do aglomerado aberto Plêiades, na imagem observa-se claramente a nebulosa de reflexão e as estrelas mais brilhantes do aglomerado.</i>	27
6.1	<i>Histograma das velocidades reais equatoriais de estrelas com massa $0,4M_{\odot} < M < 0,7M_{\odot}$.</i>	31
6.2	<i>Histograma das velocidades reais equatoriais de estrelas com massa $0,7M_{\odot} < M < 1,06M_{\odot}$.</i>	32
6.3	<i>Histograma das velocidades reais equatoriais de estrelas com massa $1,06M_{\odot} < M < 1,4M_{\odot}$.</i>	33
6.4	<i>Histograma das velocidades reais equatoriais de estrelas com massa $0,4M_{\odot} < M < 1,4M_{\odot}$, equivalente a toda amostra estudada. A região circulada em vermelho mostra um pico aparente na distribuição.</i>	36
6.5	<i>Histograma de distribuição dos dados observados de V e a curva integral da função proposta que melhor se adapta a distribuição. Os parâmetros de melhor ajuste é $q_V = 1,42 \pm 0,02$ e $\sigma = 7,9 \pm 0,03$</i>	37
6.6	<i>Rotação observada, $V \sin i$ em função da rotação, V, para os 148 estrelas da amostra. A curva de $q = 1$ representa a função $\langle V \sin i \rangle / \langle V \rangle = \pi/4$ (em verde); $\langle \sin i \rangle$ indica $\langle V \sin i \rangle / \langle V \rangle = 0,62$ (em azul); $q = 1,42$ marca a posição da curva $\langle V \sin i \rangle / \langle V \rangle = 0,55$ (em vermelho); e a última mostra a curva de melhor ajuste $\langle V \sin i \rangle / \langle V \rangle = 0,60$ (em preto) onde incluída aqui apenas para comparação com as outras curvas. As barras de erro são a partir de [40], [41], [32] e [42].</i>	38

Lista de Tabelas

B.1	Dados observacionais para estrelas do aglomerado aberto Plêiades	44
-----	--	----

Capítulo 1

Introdução

Contexto

O comportamento da velocidade rotacional das estrelas continua sendo um problema de difícil compreensão, principalmente, do ponto de vista da própria evolução estelar e se torna uma tarefa ainda mais complexa quando se busca uma relação com a evolução estelar e a orientação dos eixos rotacionais das estrelas na Galáxia. Existem questões importantes ainda sem resposta concreta em relação a fenômenos físicos relacionados a rotação estelar, como por exemplo: qual a relação entre o momento na nuvem mãe e das estrelas que se formam? Qual a distribuição das velocidades de rotação estelar resultantes da formação estelar? Tal distribuição obedece uma lei físico-estatística? E como evolui tal distribuição de velocidades? O problema consiste, portanto, em encontrar os parâmetros A_V , q_V e σ_V , onde A_V é uma constante de normalização da função de distribuição proposta, q_V o índice entrópico de Tsallis e σ_V a meia largura da distribuição, através de um ajuste com a função de distribuição generalizada no histograma das velocidades reais e posteriormente calcular o primeiro momento da distribuição. Utilizando os parâmetros q e σ na distribuição de $V \sin i$ podemos também encontrar o primeiro momento da distribuição das velocidades de rotação projetadas. Assim com a relação dos primeiros momentos das distribuições de V e de $V \sin i$ podemos encontrar $\langle \sin i \rangle$. Devido a dificuldade de se obter velocidades equatoriais verdadeiras, V , utiliza-se a velocidade de rotação projetada $V \sin i$ por ser facilmente medida. O método mais utilizado para obtenção desta velocidade é através da observação do alargamento das linhas espectrais [15] de uma estrela. Tal alargamento ocorre devido ao efeito Doppler da radiação observada na linha de visada. Neste caso a velocidade observada é apenas uma projeção da velocidade verdadeira na linha de visada, sendo que $V \sin i \leq V$. Um dos problemas interessantes que surge nas discussões sobre a rotação estelar diz respeito ao modo pelo qual deve ser feita a determinação para a orientação dos eixos rotacionais das estrelas e obter a verdadeira distribuição das velocidades rotacionais.

A hipótese da aleatoriedade dos eixos de rotação é bem aceita, porém conhece-se hoje uma relação entre a rotação atual da estrela com sua coordenada galáctica bem como sua

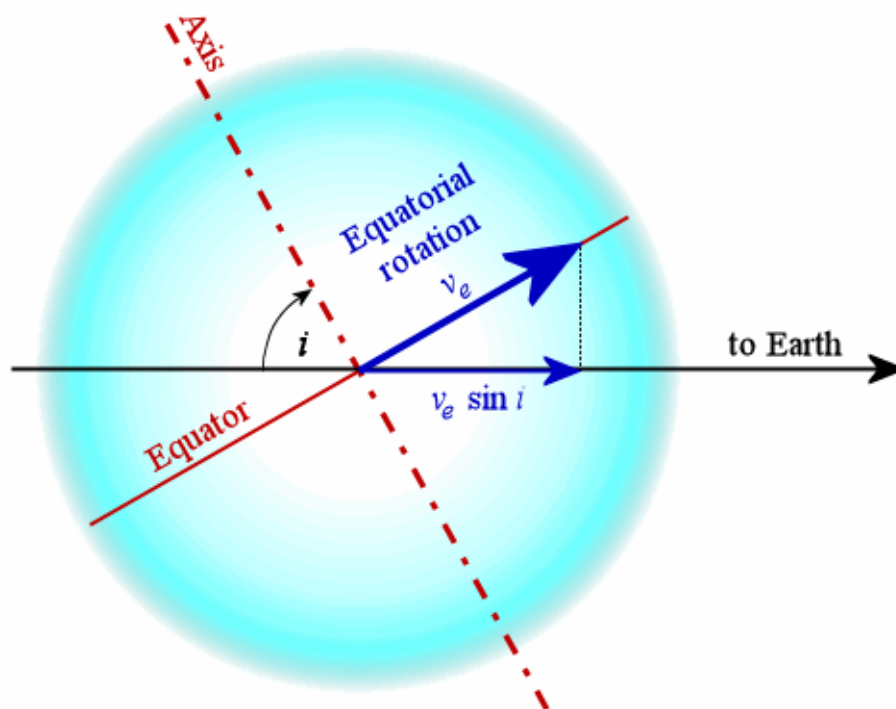


Figura 1.1: A figura mostra uma estrela rotacionando como um corpo sólido. O eixo que passa pela Terra define a linha de visada, que está inclinada em relação ao eixo rotacional por um ângulo i . A componente da velocidade de rotação verdadeira v_e no eixo que passa pela Terra é denominada como a velocidade rotacional projetada sobre a linha de visada $v_e \sin i$.

distância ao centro da galáxia, isto é para estrelas do mesmo tipo espectral. Isto nos leva, mesmo que só para apenas um caso, à possibilidade de considerarmos uma distribuição não aleatória dos eixos de rotação das estrelas. Nestes casos a estatística de Boltzmann-Gibbs não será utilizada, nos levando a analisar tal problema sob a luz da estatística desenvolvida por Tsallis, a estatística não extensiva.

Desde os trabalhos pioneiros desenvolvidos por Struve [2] e Chandrasekhar & Münch [3], várias funções de distribuição estatística da rotação estelar foram propostas (e.g. [3], [4], [5], [6], [7]). Utilizando argumentos da mecânica estatística de Maxwell-Boltzmann, Deutsch [7] sugeriu uma função baseada numa distribuição maxwelliana. Essa função descreve relativamente bem a distribuição dos dados observacionais de rotação, justificando sua boa aceitação pela comunidade astrofísica há mais de quatro décadas. Estudos sobre a função que se ajusta aos dados observacionais das distribuições de V , temos que a q -maxwelliana apresenta melhores resultados que a função maxwelliana padrão. Com a teoria da generalização da estatística de Boltzmann-Gibbs proposta por Tsallis da entropia através de uma lei de potência, tem-se conseguido uma função de distribuição proposta por Soares [33] que melhor se ajusta aos dados observacionais.

O sucesso da estatística não-extensiva proposta por Tsallis [10] em reproduzir as funções de distribuição de diferentes sistemas físicos, motivaram Soares *et al.* [11] a

apresentar uma nova função de distribuição das velocidades de rotação estelar baseada numa q -maxwelliana, ou seja, uma generalização da função maxwelliana proposta por Deutsch no contexto da mecânica estatística não-extensiva. A nova função foi testada para uma amostra de 148 estrelas do aglomerado das Plêiades e apresentou melhores resultados quando comparada com os dados observacionais.

Neste contexto a determinação da função de distribuição da velocidade de rotação verdadeira das estrelas é obtida através da equação de distribuição generalizada [33], fazendo um ajuste no histograma das velocidades reais das estrelas. A distribuição é usada na estimativa da média $\langle \sin i \rangle$ de estrelas simples, produzindo um bom resultado quando comparado com as informações observadas. Com a adição dos valores do parâmetro q , obtemos a distribuição das velocidades projetadas reforçando a ideia que há uma relação entre os parâmetros e a idade do aglomerado.

Objetivos

Determinar a função de distribuição das velocidades de rotação real das estrelas através do formalismo da mecânica não-extensiva como também determinar as distribuições das velocidades de rotação projetada e usando a relação entre as duas para determinar a inclinação média dos eixos rotacionais das estrelas do aglomerado Plêiades.

Contribuições

As principais contribuições deste trabalho estão relacionadas abaixo.

- Ajudar a compreender o parâmetro q através da aplicação da função de distribuição das velocidades de rotação;
- Compreender como a função de distribuição caracteriza o comportamento das velocidades de rotação de estrelas;
- Aplicar a estatística não-extensiva à sistemas astrofísicos;
- Procurar por indícios de não-extensividade na distribuição das velocidades de rotação de estrelas em aglomerados jovens;

Organização do trabalho

No Capítulo 2, apresenta-se os conceitos básicos envolvendo a mecânica estatística não-extensiva. Em seguida, no capítulo 3, apresenta-se um resumo sobre a influência da velocidade de rotação estelar na evolução de uma estrela relacionada com o tipo espectral. No Capítulo 4 revisitamos os vários modelos teóricos para função de distribuição até o nosso modelo atual, utilizado nesta dissertação. No Capítulo 5, detalhamos e caracterizamos as estrelas do aglomerado Plêiades. Apresenta-se e se discute os resultados do presente estudo no Capítulo 6 e as Conclusões e Perspectivas são apresentadas no

último capítulo. Por fim, os Apêndices [A](#) e [B](#) mostram as deduções matemáticas dos primeiros momentos da função de distribuição apresentada e a tabela com os dados observacionais das estrelas do aglomerado, respectivamente.

Capítulo 2

Mecânica Estatística Não-Extensiva

2.1 Introdução

Como sabemos, a termodinâmica é o ramo da física que descreve as relações entre as variáveis fundamentais para o mundo macroscópico (temperatura, pressão, volume, energia e entropia). Boltzmann e Gibbs [1] forneceram uma magnífica conexão da termodinâmica com o mundo microscópico. Esta conexão, normalmente referida como a *mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs (BG)*, que se estabeleceu como a descrição padrão para todos os sistemas da natureza.

A termodinâmica é baseada em duas grandezas física: energia e entropia. A energia trata das possibilidades (dinâmicas ou mecânicas), e a entropia das probabilidades dessas possibilidades. A energia é mais básica, e claramente depende do sistema físico (clássico, quântico ou relativístico), enquanto que a entropia é mais sutil, e reflete a informação sobre os sistemas físicos.

Era uma crença geral o fato da expressão físico-matemática da entropia que descreve partes microscópicas de um sistema físico ter que ser universal, i.e., independente de qualquer sistema (mas dependente de W , o número total de possibilidades dos sistemas). Mais precisamente, para todos os sistemas discretos da natureza, a entropia deveria ter a chamada forma de Boltzmann-Gibbs

$$S = -k_B \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i. \quad (2.1)$$

com a condição de normalização

$$\sum_{i=1}^W p_i = 1 \quad (2.2)$$

onde p_i é a probabilidade do sistema estar em qualquer microestado, e k_B é a constante de Boltzmann ($k_B = 1.38 \times 10^{23} J/K$). Sem perda de generalidade, podemos também arbitrariamente assumir $k = 1$. Se todos os microestados têm a mesma probabilidade $p_i = 1/W$ (assumindo a equiprobabilidade de seus estados) obteremos o famoso *princípio*

de Boltzmann

$$S_{BG}(p_i = 1/W, \forall i) = k_B \ln W. \quad (2.3)$$

Pode ser mostrado facilmente que a entropia (2.1) é positiva, côncava, extensiva e estável (em síntese, experimentalmente robusta). Se A e B são dois sistemas independentes no sentido que $p_{ij}^{A+B} = p_i^A p_j^B$, onde percebemos que as probabilidades são independentes, então segue de (2.1) que

$$S_{BG}(A+B) = S_{BG}(A) + S_{BG}(B) \quad (2.4)$$

Na equação acima vemos a característica da extensividade retratada pela as probabilidade independentes, considerando todos os estados equiprováveis. Poderíamos naturalmente esperar que a forma da Eq. (2.1) de S_{BG} iria ser rigorosamente derivada da dinâmica microscópica. Consequentemente a Eq. (2.1) é na prática, um *postulado*. Mas essa crença generalizada de universalidade não parece ter nenhuma base rigorosa. Na verdade, parece nos dias atuais que o conceito de informação física, e suas expressões microscópicas em termos de probabilidades, devem ser adaptadas para cada sistema tratado.

As expressões das Eqs. (2.1) e (2.2) são tão comumente empregadas porque a maioria dos sistemas cujas propriedades térmicas são estudadas pertencem ao tipo envolvendo forte caos em sua dinâmica microscópica, i.e., expoentes de Lyapunov positivos, conhecidos por propiciar misturas rápidas e eventualmente ergodicidade no espaço de fase. O Expoente de Lyapunov é uma medida do grau de sensibilidade às condições iniciais para os sistemas caóticos. Neste sentido, é uma medida da intensidade do chamado "efeito borboleta" (apenas um nome popular para o fenômeno da Sensibilidade às Condições Iniciais). O expoente de Lyapunov é um número que dá indicações da rapidez com que pontos próximos no espaço de fases se separam com o passar do tempo. Assim, expoentes positivos indicam separações que aumentam no tempo, enquanto que expoentes negativos indicam separações que tendem a desaparecer. Os expoentes de Lyapunov são, por exemplo, utilizados para dar uma definição formal simples de sistemas caóticos: há caos se pelo menos um dos expoentes de Lyapunov for positivo. Não existe nenhuma razão fundamental que justifique o uso da mesma expressão para sistemas envolvendo um espectro quase nulo de Lyapunov, i.e., para sistemas exibindo baixo caos, quando a sensibilidade às condições iniciais divergem menos que exponencialmente. De fato, tais sistemas, se isolados, poderiam ter sérias dificuldades em satisfazer a hipótese de ergodicidade durante o tempo de observação das quantidades medidas.

A não universalidade das expressões microscópicas para a entropia é quase auto-evidente. Se, contudo, S_{BG} não é universal, como generalizá-lo? A análise da estrutura da teoria de BG fornece-nos uma base para desenvolvermos um mecânica estatística generalizada, ou seja, uma *generalização* da teoria de BG.

2.2 Equações Centrais da Mecânica Estatística Não-Extensiva

A mecânica estatística e a termodinâmica não-extensiva foram introduzidas em 1988 por C. Tsallis [12], e posteriormente desenvolvidas em 1991 [13] e 1998 [14], com o objetivo de estender o domínio de aplicabilidade da mecânica estatística para sistemas onde a estatística de Boltzmann-Gibbs (BG) e a termodinâmica padrão apresentava sérias dificuldades explanatórias. De fato, um crescente número desses sistemas foi apontado na literatura recente para os quais a distribuição de BG parecia ser violada. Alguns desses casos são satisfatoriamente explicados dentro do formalismo.

Neste espírito, uma entropia S_q que generaliza S_{BG} foi proposta. A entropia S_q (com $S_1 = S_{BG}$) depende do índice q , um número real a ser determinado *a priori* da dinâmica microscópica. A propriedade escolhida para ser generalizada foi a extensividade, definida na Eq. (2.4).

2.2.1 Função q-logaritmo

A equação diferencial ordinária mais simples que alguém poderia elaborar é

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad (2.5)$$

cuja solução (com condição inicial $y(0) = 1$) é $y = 1$. A próxima equação diferencial mais simples seria

$$\frac{dy}{dx} = 1, \quad (2.6)$$

cuja solução, com a mesma condição inicial, é $y = 1 + x$. A próxima equação de complexidade crescente seria da forma

$$\frac{dy}{dx} = y, \quad (2.7)$$

cuja solução é $y = e^x$; e sua função inversa é

$$y = \ln x, \quad (2.8)$$

que tem a mesma forma funcional da entropia de Boltzmann-Gibbs (Eq. (2.3)), e satisfaz a bem conhecida propriedade de aditividade

$$\ln(x_A x_B) = \ln x_A + \ln x_B, \quad (2.9)$$

Uma questão que poderia ser colocada: podemos unificar todos esses três casos (Eqs. (2.5), (2.6) e (2.7)) considerados acima? Uma resposta positiva trivial seria considerar $dy/dx = a + by$, e jogar com os valores de (a, b) . Mas podemos unificar tudo com apenas

um parâmetro? A resposta ainda seria positiva, mas desta vez fora da linearidade, usando

$$\frac{dy}{dx} = y^q (q \in \mathfrak{R}), \quad (2.10)$$

que, para $q \rightarrow -\infty$, $q = 0$ e $q = 1$, reproduz respectivamente as equações diferenciais (2.5), (2.6) e (2.7). A solução da equação (2.10) é dada pela função q -exponencial

$$y = [1 + (1 - q)x]^{\frac{1}{1-q}} \equiv e_q^x, (e_1^x = e^x) \quad (2.11)$$

cujos inverso é a função q -logaritmo

$$y = \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q} \equiv \ln_q x, (\ln_1 x = \ln x) \quad (2.12)$$

Esta função satisfaz a propriedade de *pseudo-aditividade*

$$\ln_q(x_A x_B) = \ln_q x_A + \ln_q x_B + (1 - q) \ln_q x_A \ln_q x_B \quad (2.13)$$

2.2.2 Entropia Não-Extensiva S_q

Como vimos, a função exponencial e_x é generalizada na função q -exponencial

$$e_q^x \equiv [1 + (1 - q)x]^{\frac{1}{1-q}}, (q \in \mathfrak{R}), \quad (2.14)$$

Podemos verificar que esta função (positiva e monotonicamente crescente)

- para $q \rightarrow 1$ retorna $e_1^x = e^x, (\forall x)$,
- para $q > 1$, desaparece como uma lei de potências quando $x \rightarrow -\infty$ diverge em $x = 1/(q - 1)$,
- para $q < 1$, tem um ponto de corte em $x = 1/(1 - q)$, abaixo do qual ela é definida como sendo identicamente zero. Se $x \rightarrow 0$ nós temos $e_q^x \sim 1 + x, (\forall q)$.

A função inversa da q -exponencial é o q -logaritmo, definido como segue:

$$\ln_q x \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q}, (q \in \mathfrak{R}) \quad (2.15)$$

Claro que $\ln_1 x = \ln x, (\forall x)$. Se $x \rightarrow 1$ teremos $\ln_q x \sim \ln x, (\forall q)$

2.2.3 Generalização da Entropia de BG

Podemos reescrever a Eq. (2.1) em uma forma um pouco diferente (com $k = 1$):

$$S = - \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i = \sum_{i=1}^w p_i \ln \frac{1}{p_i} = \left\langle \ln \frac{1}{p_i} \right\rangle. \quad (2.16)$$

onde $\langle \dots \rangle \equiv \sum_{i=1}^W (\dots) p_i$. A quantidade $\ln(1/p_i)$ é algumas vezes chamada de surpresa ou incerteza. De fato, $p_i = 1$ corresponde à certeza, ou seja, zero surpresa se o evento esperado ocorre; por outro lado, $p_i \rightarrow 0$ corresponde aproximadamente à impossibilidade, ou seja, infinita surpresa se o valor não esperado ocorre. Se introduzimos a *q-surpresa* (ou *q-incerteza*) como $\ln(1/p_i)$, é então natural definirmos a seguinte *q-entropia*:

$$S_q = \left\langle \ln_q \frac{1}{p_i} \right\rangle = \sum_{i=1}^W p_i \ln_q \frac{1}{p_i} = \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q - 1}, \quad (2.17)$$

de forma que a forma entrópica não extensiva que postulamos sejam

$$S_q = \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q - 1}, \quad \left(\sum_{i=1}^W p_i = 1; q \in \mathfrak{R} \right) \quad (2.18)$$

onde W é o número total de configurações microscópicas, cujas probabilidades são p_i .

As expressões contínuas e quânticas de S_q são respectivamente dadas porque

$$S_q = \frac{1 - \int dx [p(x)]^q}{q - 1} \quad (2.19)$$

e

$$S_q = \frac{1 - \text{Tr} \rho^q}{q - 1} \quad (2.20)$$

onde ρ é a matriz densidade. A menos que especificamente declararmos o contrário, vamos usar a forma da Eq. (2.18). É fácil verificar que todas as suas propriedades genéricas podem ser imediatamente adaptadas para ambos os casos contínuo e discreto.

Assumindo a equiprobabilidade (i.e., $p_i = 1/W$) obtemos então

$$S = \frac{W^{1-q} - 1}{1 - q} = \ln_q W. \quad (2.21)$$

que é a base do ensemble microcanônico. Pode ser mostrado que a entropia positiva S_q é côncava (convexa) para $q > 0$ ($q < 0$); esta propriedade implica estabilidade termodinâmica e torna possível para dois sistemas a diferentes temperaturas entrarem em equilíbrio térmico.

Consequentemente, é claro que S_q é uma generalização e não uma alternativa para a entropia clássica, porque se $q \rightarrow 1$, esta entropia reproduz a entropia usual de Boltzmann-Gibbs-Shannon ($S = -\sum_{i=1}^W p_i \ln p_i$).

Podemos pensar em q como um parâmetro de viés: $q < 1$ privilegia eventos raros, enquanto que $q > 1$ privilegia eventos comuns. De fato, $p < 1$ elevado a uma potência

$q < 1$ permite um valor maior que p , e o aumento relativo $p^q/p = p^{q-1}$. É uma função decrescente de p , i.e., valores de p próximos a 0 (eventos raros) são beneficiados. Correspondentemente, para $q > 1$, valores de p próximos a 1 (eventos comuns) são privilegiados. Assim, a teoria de BG (i.e., $q = 1$) é a estatística neutra, i.e., sem nenhum viés.

Se A e B são dois sistemas independentes (i.e., $p_{ij}^{A+B} = p_i^A p_j^B, \forall(i, j)$), então a pseudo-aditividade do q -logaritmo imediatamente implica

$$S_q(A + B) = S_q(A) + S_q(B) + (1 - q)S_q(A)S_q(B), \quad (2.22)$$

Disso segue que $q = 1$, $q < 1$ e $q > 1$ correspondem respectivamente aos casos *extensivo*, *superextensivo* e *subextensivo* (em todos os casos $S_q \geq 0$). É dessa propriedade que a correspondente generalização da mecânica estatística de BG é frequentemente referida como *mecânica estatística não extensiva*.

2.3 A Probabilidade Associada

Para obtermos a distribuição de probabilidade associada com o estado estacionário relevante de nosso sistema (equilíbrio térmico ou meta-equilíbrio) devemos otimizar a forma entrópica não extensiva sob os seguintes limites (ver [12] e [14]): o limite da norma dado por

$$\sum_i p_i = 1$$

e o limite da energia generalizado como segue

$$\frac{\sum_i p_i^q E_i}{\sum_i p_i^q} = U_q,$$

onde E_i é o conjunto dos autovalores do Hamiltoniano (com condições de contorno específicas), e U_q é um número fixo e finito. Essa otimização gera o peso generalizado

$$p_i = \frac{[1 - (1 - q)\beta_q(E_i - U_q)]^{1/(1-q)}}{Z_q}, \quad (2.23)$$

onde

$$Z_q \equiv \sum_j [1 - (1 - q)\beta_q(E_j - U_q)]^{1/(1-q)},$$

e

$$\beta_q \equiv \frac{\beta}{\sum_j p_j^q},$$

β sendo o parâmetro de Lagrange otimizado associado com a energia interna generalizada U_q .

Esta distribuição de probabilidade corresponde a um máximo (mínimo) de S_q para $q > 0$ ($q < 0$). Para $q = 0$, a entropia é constante, $S_0 = W - 1$, e a distribuição é dada por $p_i = [1 - \beta_q(E_i - U_0)] / \sum_{j=1}^W [1 - \beta_q(E_j - U_0)]$ (relembremos o ponto de corte da função q -exponencial para $q < 1$, i.e., os estados para os quais o valor $1 - \beta_q(E_i - U_0) < 0$ não contribui).

A equação (2.23) pode ser reescrita como

$$p_i \propto [1 - (1 - q)\beta'_q(E_i - U_q)]^{1/(1-q)} \equiv e_q^{-\beta' E_i},$$

onde β é uma “temperatura” renormalizada inversa, e a função q -exponencial é definida como $e_q^x \equiv [1 + (1 - q)x]^{1/(1-q)} = 1/[1 - (q - 1)x]^{1/(q-1)}$ (com $e_1^x = e^x$). Esta função substitui, em um vasto número de relações e fenômenos, o fator usual de BG.

Analogamente, se otimizarmos S_q como dado pela Eq. (2.19) com os limites $\int dx p(x) = 1$ and $\langle\langle x^2 \rangle\rangle_q = \sigma^2$ ($\sigma > 0$), obteremos a q -generalização da distribuição Gaussiana[17]:

$$p_q(x) = \frac{e_q^{\bar{\beta}x^2}}{\int dy e_q^{\bar{\beta}y^2}} \propto \frac{1}{[1 + (q - 1)\bar{\beta}x^2]^{\frac{1}{q-1}}}, (q < 3) \quad (2.24)$$

com extremidade estendida se $q > 1$, um ponto de corte se $q < 1$, e onde $\bar{\beta}$ pode ser explicitamente relacionado a σ . A variância destas distribuições é finita se $q < 5/3$ e diverge se $5/3 < q < 3$. Para $q = 2$ nós temos a distribuição de Lorentz. Para $q \geq 3$ a função não é normalizável, e assim é inaceitável como uma distribuição de probabilidade.

Capítulo 3

Relação entre Rotação e Evolução Estelar

3.1 Introdução

Estrelas adquirem seu momento angular quando se formam e, realmente, a maneira na qual quase todo momento angular inicial é dissipado é ainda pouco entendida, mas sem perdas significativas de momento angular, sem a perda do momento angular uma nuvem interestelar nunca poderá se contrair o bastante para formar uma estrela, pois com a perda do momento angular a força centrípeta diminui e a força gravitacional prevalece fazendo com as partículas fiquem cada vez mais próximas. O que observamos no Universo é que estrelas se formam e superam estes obstáculos.

Como já frisamos no capítulo introdutório, a rotação estelar é um importante parâmetro para descrever uma variedade de problemas em astrofísica estelar, influenciando fortemente a evolução das estrelas, fenômenos de interação gravitacional e processos que ocorrem no interior da estrela e que, por sua vez, repercurtem na superfície. Os efeitos da rotação acompanham toda a história da evolução estelar, desde a redistribuição de momento angular durante formação da proto-estrela até os últimos estágios da evolução. Assim, podemos considerar a rotação um parâmetro canônico na Astrofísica Estelar.

A rotação estelar influencia atmosfera e o interior estelar. Fenômenos turbulentos na envoltória convectiva provocam uma circulação meridional provocando assim uma rotação diferencial. Deste modo, a envoltória convectiva segue uma rotação diferencial observada na superfície, como uma função da latitude, enquanto que a envoltória radiativa parece seguir uma rotação de corpo rígido (ver [16] e [17]). Apesar de inúmeros estudos sobre os efeitos da rotação na evolução estelar, a grande maioria dos modelos não leva em conta o papel deste parâmetro na estrutura estelar (ver [18] e [19]).

A velocidade de rotação não é igual para todas as estrelas. A distribuição da velocidade rotacional não é constante em relação ao tipo espectral da estrela, entretanto, dentro de um mesmo tipo espectral, as estrelas tendem a ter velocidades semelhantes. Tradicionalmente, as estrelas são divididas em dois grupos: precoces e tardias, em que, em inglês, são referidas como *early types* e *late types*, respectivamente. O critério de pertinência de uma estrela a um grupo é sua massa inicial/tipo espectral. As estrelas precoces são de tipo

espectral O, B, A e as F mais quentes, enquanto as estrelas tardias são de tipo espectral F mais frias, G, K e M (e.g. [20], [21], [23], [22]). Estrelas precoces possuem uma velocidade maior que as tardias. Essa diferença de velocidade entre as estrelas precoces e tardias está diretamente ligada com processos internos das estrelas: em estrelas precoces a energia é carregada para a superfície predominantemente através de processos radiativos, enquanto em estrelas tardias, o processo predominante é a convecção. A presença de uma envoltória convectiva e sua interação com a rotação é fundamental para o comportamento de estrelas do tipo tardia, o que nos motiva a discutir a velocidade de rotação de alguns membros do tipo espectral G e K.

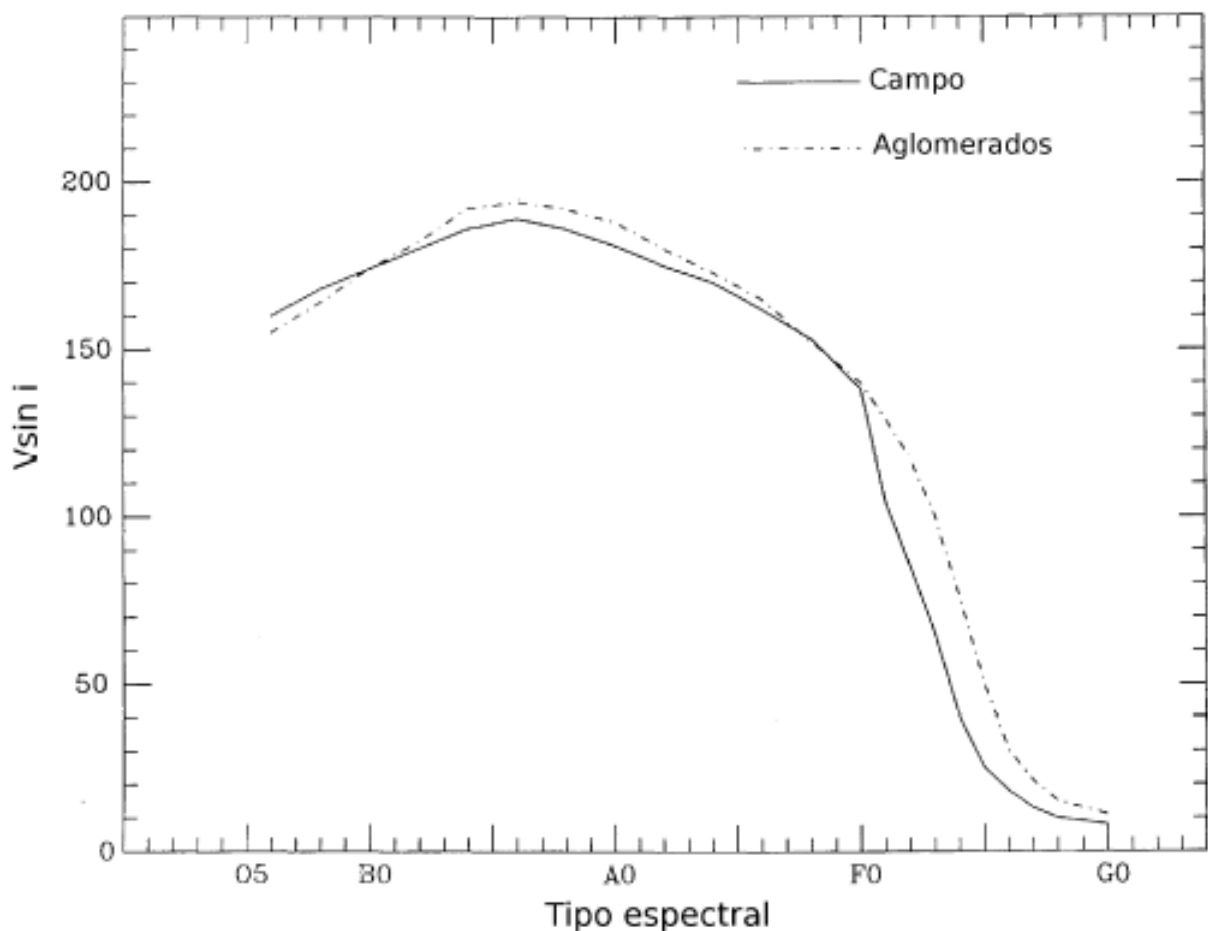


Figura 3.1: Distribuição de $V \sin i$ em função do tipo espectral para as estrelas do campo e de aglomerados. Nota-se que estrelas precoces apresentam velocidade superior às estrelas tardias. Figura adaptada de Stauffer & Hartmann (1986)

Figura 3.1 apresenta uma distribuição de $V \sin i$ em função do tipo espectral para as estrelas do campo e de aglomerados. Esta figura foi construída por Stauffer (1986) [24] usando dados de Fukuda (1982) [25]. Pela figura, fica imediatamente claro que estrelas precoces apresentam uma velocidade bem maior do que as estrelas tardias. Entre as estrelas precoces, o $V \sin i$ médio está em torno de 150-200 km/s. A velocidade começa a

diminuir para estrelas de massa intermediária (A e F). Isso aponta que há um mecanismo de frenagem e que este já começa a atuar nessas estrelas. Um desses mecanismos é proposto por Huang (1965) [26], aponta que o motivo da baixa velocidade de rotação das estrelas tardias seria a formação planetária, em que essas estrelas teriam perdido seu momento angular para os planetas na época de suas formações. Essa teoria foi refutada por Wilson (1966) [27], que sustenta que a perda de momento angular estaria relacionada ao envoltório convectivo dessas estrelas e a ejeção de massa. O envoltório convectivo dessas estrelas causa, em sua superfície, padrões complexos de movimento do plasma. A velocidade diferencial na superfície dessas estrelas gera um mecanismo de dínamo que é capaz de gerar e manter um campo magnético na estrela. O campo magnético é responsável por manter a massa ionizada ejetada corrotacionando com a estrela enquanto essa a massa ejetada se distancia.

Assim, essas estrelas estariam perdendo momento angular através dessas partículas ionizadas lançadas ao espaço. Este mecanismo de frenagem foi primeiro sugerido por Schatzman (1962) [28]. Um ponto a favor do mecanismo de frenagem de Schatzman ao invés da teoria de Huang é a análise realizada por Collier (1989) [29] de uma série temporal da linha de $H\alpha$ da estrela G8-K0 AB Doradus, que é uma estrela ativa e com alta rotação. Eles observaram uma rápida absorção transiente no perfil de emissão da linha de $H\alpha$. Isto sugere a existência de nuvens densas e frias embebidas e corrotacionando com a coroa; essas nuvens se afastariam da estrela, carregando consigo momento angular da estrela. Outro fator que leva a estrela a perder momento angular é a perda de matéria através do vento estelar. Essa ideia foi sugerida por Mestel (1968) [30] e hoje é bastante aceita.

3.2 Estrelas de Alta Rotação

A maioria das estrelas, do tipo O e B, às vezes, mostram evidências de pulsações estelares não-radiais e fortes ventos, assim como abundâncias anômalas que podem ser controladas pelo processo de mistura interna (internal mixing). Todos estes efeitos são relacionados à rotação e complicam sua determinação e interpretação, além das taxas de rotação que podem ser altas o bastante para influenciar a evolução de uma dada estrela. Estrelas de massa-intermediária, do tipo A e F0, podem ter abundâncias anômalas dramáticas e outros efeitos que estão relacionados à difusão em camadas superficiais que são afetadas pela rotação. A presença de uma rotação significativamente alta nestas estrelas podem complicar a determinação de medidas de linhas espectrais fracas ou a solução para componentes de linhas de absorção. Assim, fenômenos que podem acontecer em estrelas de alta rotação não podem ser observados diretamente. A rotação pode ter um papel fundamental na evolução de estrelas massivas ($10\text{--}40M_{\odot}$). Primeiro, uma rotação rápida pode afetar o equilíbrio estelar, reduzindo a pressão central e a temperatura, ocasionando em uma queda na luminosidade. O efeito mais importante de rotação elevada é sua influência na mistura de elementos químicos e no transporte de momento

angular no interior estelar. A rotação, especialmente, influencia a difusão turbulenta. A rotação mais elevada conduz à uma difusão turbulenta mais eficiente, e isso faz com que uma estrela tenha quase o dobro da luminosidade que teria na ausência da difusão. Os ventos vistos nas estrelas Be são influenciados pela rotação. Estes ventos são mais lentos e densos nas regiões equatoriais e mais rápidos e tênues nos pólos. A maioria das estrelas O e B são encontradas nas regiões de formação de estrelas, por isso são encontradas estrelas tão jovens com este tipo espectral. Além disso, suas distribuições de rotação não diferem significativamente uma da outra, dado o tamanho da amostra. Existem diferenças significantes, quando comparadas estrela a estrela, no tocante ao momento angular a uma determinada massa, mas as distribuições dos momentos angulares parecem ser independentes das condições iniciais para uma amostra significativamente grande. Existem indícios que sugerem que a metalicidade exerce um papel importante na distribuição do momento angular, mas ainda não existem informações para tornar este quadro mais claro. A maioria das estrelas A e F0–F5 possuem taxas de rotação moderadas consistentes com a relação de Kraft (1967) [31], mas entre as estrelas A são encontradas estrelas com abundâncias químicas peculiares, e estas peculiaridades são possivelmente relacionadas à rotação.

3.3 Estrelas de Baixa Rotação

A rotação possui um papel determinante para muitos dos fenômenos que observamos em estrelas do tipo tardia (F6–M). Estas estrelas possuem uma envoltória convectiva que interage fortemente com a rotação. O paradigma para entender este comportamento é extraído do que observamos no interior solar: rotação e convecção interagindo nas camadas mais externas para produzir padrões de circulação complexos dentro do material estelar ionizado. Este fenômeno, denominado de rotação diferencial, é especialmente importante para o mecanismo do dínamo, podendo regenerar o campo magnético primordial da estrela. O campo magnético pode engarrafar ou aprisionar o vento estelar ionizado bem além da superfície da estrela, forçando a perda de momento angular, um processo que nós testemunhamos no Sol. Assim o Sol, por sua natureza, perde momento angular continuamente, e, por analogia, outras estrelas com envoltória convectiva e ventos magnéticos realizam este processo de forma similar. Nós ainda pouco sabemos sobre ventos magnéticos em estrelas, porém, exceto em casos onde eles são muito fortes, assumimos que outras estrelas do tipo tardio possuem algum tipo de vento semelhante ao encontrado no Sol.

Duas estrelas, formadas ao mesmo tempo e com a mesma massa, mas, com taxa de rotação diferente, tenderão para a mesma taxa de rotação com o tempo porque a estrela com rotação mais elevada gera um campo magnético mais forte e, assim, perde momento angular mais rápido do que aquela de baixa rotação. Estrelas jovens tendem a girar mais rapidamente, devido ao fato de que elas não tiveram tempo suficiente para perder

significamente seu momento angular. Enquanto, ao contrário, estrelas mais velhas tendem a girar mais lentamente.

Os campos magnéticos de estrelas do tipo tardia dão origem à sua rica fenomenologia, que, em geral, é descrita pela atividade. Esta atividade pode nos ajudar no estudo do comportamento da rotação. Neste contexto, estruturas heterogêneas (de pequena-escala) na superfície estelar (tais como as manchas) podem ser grandes o bastante para produzir variações observáveis na taxa de radiação da estrela, a partir das quais podemos inferir seu período de rotação.

A intensidade da atividade medida por indicadores como, CaII e emissão de linhas $H\alpha$ e K, e raios-X, está fortemente correlacionada com a rotação para estrelas do tipo tardia, de forma que, estrelas de alta rotação estão sempre ativas por causa dos fortes campos magnéticos gerados. A relação rotação-atividade possui diferentes correlações para diferentes massas, de tal forma que, estrelas de baixa massa são mais ativas para uma mesma taxa de rotação.

Capítulo 4

A função de distribuição da rotação estelar

As medidas das velocidades de rotação das estrelas, utilizando dados espectroscópicos, dão como resultado a componente da rotação estelar na linha de visada $V \sin i$. Para determinar a velocidade verdadeira das estrelas é necessário utilizamos os dados de períodos e raios obtidos do catálogo Vizier considerando a estrela como sendo um corpo rígido. De fato, um dos grandes problemas da física da rotação estelar é determinar a orientação dos eixos de rotação das estrelas. Embora a inclinação do ângulo i possa ser medida para alguns objetos, sua determinação quase nunca é viável para estrelas simples.

Em relação à função de distribuição que determina as velocidades de rotação, podemos afirmar que é um problema complexo. Inicialmente sugerida como uma lei Maxwell-Boltzmann, a natureza da lei estatística controlando a distribuição da velocidade de rotação equatorial estelar é um enigma que existe há, pelo menos, 60 anos. Embora a justificativa física seja o principal problema na criação de uma função de distribuição de velocidades de rotações estelares, pode-se sempre propor qualquer função $f(V)$, definido de modo que $dN(V) = f(V)dV$ é o número de estrelas com rotação equatorial velocidade entre V e $V + dV$, que se encaixa com sucesso os dados observacionais [33]. Além disso, essa função pode evoluir ao longo parâmetros estelares fundamentais, tais como massa e temperatura efetiva, que é uma suposição razoável, porque esses parâmetros físicos podem evoluir ao longo do tempo.

Por outro lado, a relação entre V e distribuições $V \sin i$ é dada através da equação integral por Chandrasekhar e Münch [3], que provou ser muito útil para o cálculo da distribuição de V a partir da distribuição de $V \sin i$. Portanto, o problema tornou-se encontrar modelos teóricos da função de distribuição de $V \sin i$, que podem ser confrontada com a função de distribuição observada $F(V)$, como também utilizada para a obtenção da média das inclinações dos eixos de rotação porque a equação permite derivar a relação $\langle \sin i \rangle = \langle V \sin i \rangle / \langle V \rangle$. No nosso trabalho partimos de uma função generalizada dos momentos de V proposta por Soares obtendo assim o primeiro momento da distribuição e determinando o $\langle \sin i \rangle$.

Enquanto isso, há várias funções de distribuição (e.g. [3], [7], [34], [25], [35]) propostas para descrever as diferentes distribuições observadas de velocidades de rotação visto que

sugerem que a principal questão no problema da distribuição de rotação pode estar por trás da física estatística. Na verdade, vários estudos recentes tem usado uma função estatística baseada na mecânica estatística generalizada de Tsallis para descrever a distribuição $V \sin i$ com sucesso para estrelas de diferentes populações estelares.

Chrandrasekhar & Münch [3] consideravam a aleatoriedade dos eixos rotacionais das estrelas segunda a equação abaixo

$$\langle V \rangle = \frac{4}{\pi} \langle V \sin i \rangle. \quad (4.1)$$

A função de densidade de probabilidade de $V \sin i$ é o resultado da convolução entre a distribuição da velocidade equatorial V e a distribuição do ângulo entre o eixo de rotação e a linha de visada, i , conforme a equação

$$\phi(V \sin i) = \int \varphi(V) P(V \sin i | V) dV. \quad (4.2)$$

onde $P(V \sin i | V)$ é a probabilidade de $V \sin i$ estar no intervalo $[V, V + dV]$ e $\varphi(V)$ é a função de distribuição de probabilidade das velocidades equatoriais. Assumindo uma distribuição aleatória para o eixo de rotação estelar, segue-se que a probabilidade condicional é dada por:

$$P(V \sin i | V) = \begin{cases} \frac{V \sin i}{V \sqrt{V^2 - (V \sin i)^2}} & \text{se } V > V \sin i \\ 0 & \text{se } V \leq V \sin i \end{cases}.$$

Substituindo na equação 4.2, temos

$$\phi(V \sin i) = \int_{V \sin i}^{\infty} \varphi(V) \frac{V \sin i}{V \sqrt{V^2 - (V \sin i)^2}} dV. \quad (4.3)$$

A equação 4.3 é uma integral abeliana cuja solução analítica é

$$\varphi(V) = -\frac{2V^2}{\pi} \frac{d}{dV} \int_V^{\infty} \frac{V \phi(V \sin i)}{V \sin i^2 \sqrt{V \sin i^2 - V^2}} d(V \sin i).$$

É importante salientar, entretanto, que esta solução formal não é muito prática, uma vez que exige a diferenciação de uma frequência observada $\phi(V \sin i)$. Tal procedimento pode levar a resultados pouco confiáveis devido a limitação da relação entre $\langle V \sin i \rangle / \langle V \rangle = \pi/4$. É mais prático supor uma solução f envolvendo um ou mais parâmetros de acordo com a natureza física do parâmetro com o qual se está lidando.

No trabalho realizado por Deutsch publicado em 1970, é analisada a distribuição das velocidades rotacionais, V , para uma amostra de 782 estrelas da sequência principal de tipos espectrais no intervalo B2-A2. Assumindo uma distribuição homogênea das veloci-

des e independências entre as componentes cartesianas do eixo de rotação, Deutsch deduz uma função de distribuição das velocidades rotacionais. Seu trabalho foi desenvolvido com base no conceitos da mecânica estatística de Maxwell-Boltzmann e, a função de distribuição proposta é uma maxwelliana.

$$f(\Omega) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \Omega^2 e^{-\Omega^2}. \quad (4.4)$$

Como salientamos antes, a proposta de função de distribuição apresentada por Deutsch [7], bem como os trabalhos pioneiros realizados nas décadas de 50, 60 e 70 estão baseados na mecânica estatística de Maxwell-Boltzmann, ou seja, na mecânica estatística extensiva. Nas décadas que se seguiram após os trabalhos pioneiros, não houve abordagem significativamente nova para o problema da distribuição da velocidade de rotação estelar. Tal cenário mudou com a advento da mecânica estatística não-extensiva.

De acordo com Chandrasekhar e Münch, a equação integral que relaciona as ditribuição de velocidades rotacionais projetadas com a distribuição das velocidades rotacionais verdadeiras é dada por

$$\varphi_q(y) = y \int_y^\infty \left[\frac{f(x)}{x(x^2 - y^2)^{1/2}} \right] dx \quad (4.5)$$

onde $y = x \sin i$ que x é a velocidade rotacional equatorial e i é a ângulo de inclinação do eixo de rotação ao longo da linha de visada.

A equação 4.5 é baseada na suposição de que a função de densidade de probabilidade $\omega(i)$ e aqueles ângulos de inclinação é assumido para $\sin i$. Não obstante, é importante ressaltar que esta afirmação não é necessariamente estreitamente ligada a uma reivindicação que os eixos de rotação das estrelas de um determinado grupo tem orientação aleatória. Em qualquer caso, a equação integral acima torna possível determinar uma relação constante entre as médias $\langle x \rangle$ e $\langle y \rangle$. Sendo $y = x \psi(i)$ e x não é mesmo dependente de i , pode-se fazer $\langle y \rangle = \langle x \rangle \cdot \langle \psi(i) \rangle$ como regra.

Também é fácil de concluir que a relação $\langle y^n \rangle \cdot \langle x^n \rangle \langle (\sin i^n) \rangle$ é independente da forma assumida por $f_i(y)$, $f(x)$ ou $\omega(i)$ enquanto $y = x \sin i$, em adição x e i devem ser independentes um do outro. Isso torna possível determinar os momentos de $\sin i$ sobre o estabelecimento do perfil real do $\omega(i)$.

Além disso, deve-se notar apesar da aleatoriedade dos eixos de rotação de Chandrasekhar e Münch a relação entre momentos que implica a relação $\langle V \sin i \rangle / \langle V \rangle$ não varia com qualquer traço patricular estelar em estudo e ainda mais com o tempo, mesmo se considerarmos a amostra de estrelas, em absoluto. Embora atualmente não há motivos para considerar que a velocidade de rotação de uma estrela depende da inclinação do seu eixo de rotação, apesar de considerar a velocidade de rotação V independente da inclinação i do eixo de rotação, parece improvável que a média das inclinações dos eixos de rotação para um grupo de estrelas não mude para os diferentes grupos de estrela.

Então é gratificante perceber que há funções de distribuição de valores que permitem outros valores de $\langle V \sin i \rangle / \langle V \rangle$ além do valor fixo $\pi/4$ como apresentado neste trabalho, mostrando que as funções de distribuições 4.13 e 4.14 tornam-se viáveis.

4.1 A distribuição das rotações segundo a mecânica estatística não-extensiva

Uma nova abordagem do problema da distribuição das velocidades de rotação estelar, $V \sin i$, foi proposta por Soares *et al.* em 2006 [11]. Esses autores reconsideraram o trabalho de Deutsch, no contexto da mecânica estatística não-extensiva, e com isso abriram e ampliaram o horizonte de possibilidades para a investigação dessas distribuições.

O ponto de partida utilizado para a elaboração da função de distribuição de Soares *et al.* é o trabalho de Deutsch [7], tendo como suporte as hipóteses de homogeneidade da distribuição das rotações e a independência entre as componentes do eixo de rotação. A dedução da função de distribuição de Soares *et al.*, conforme descrita em [11] é escrita na forma

$$F(\Omega)d^3\Omega = f(\Omega_x)f(\Omega_y)f(\Omega_z)d\Omega_xd\Omega_yd\Omega_z, \quad (4.6)$$

onde f é uma função de variáveis aleatórias e $\Omega = \sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2}$. A introdução da distribuição de probabilidades no contexto da estatística não-extensiva é feita reescrevendo-se a equação 4.6 na forma

$$F(\Omega)d^3\Omega = \exp_q[\ln_q f(\Omega_x) + \ln_q f(\Omega_y) + \ln_q f(\Omega_z)]d\Omega_xd\Omega_yd\Omega_z, \quad (4.7)$$

onde $\exp_q(f)$ e $\ln_q(f)$ são definidas respectivamente pelas equações 2.14 e 2.12, tendo as seguintes formas

$$\exp_q(f) = [1 + (1 - q)f]^{1/(1-q)}$$

e

$$\ln_q(f) = \frac{f^{1-q} - 1}{1 - q}.$$

Aqui é importante lembrar que para $q = 1$ essas equações reproduzem as funções exponencial e logaritmo, respectivamente. Diferenciando a equação 4.7 em relação as componentes de Ω_i tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln_q F}{\partial \Omega_i} &= \frac{\partial}{\partial \Omega_i} \ln_q \{ \exp_q[\ln_q f(\Omega_x) + \ln_q f(\Omega_y) + \ln_q f(\Omega_z)] \} \\ &= \frac{\partial}{\partial \Omega_i} (\ln_q f_x + \ln_q f_y + \ln_q f_z), \end{aligned}$$

onde $\exp_q[\ln_q(f)] = \ln_q[\exp_q(f)] = f$, com $i = x, y, z$. Decorre daí que

$$\frac{\Omega_i}{x} \frac{F'(x)}{F^q(x)} = \frac{\partial}{\partial \Omega_i} \ln_q f_i, \quad (4.8)$$

e definindo

$$\phi(x) \equiv \frac{1}{x} \frac{F'(x)}{F^q(x)} \quad (4.9)$$

pode-se escrever a equação 4.8, como segue

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{\Omega_x} \frac{\partial}{\partial \Omega_x} (\ln_q f_x) \\ &= \frac{1}{\Omega_y} \frac{\partial}{\partial \Omega_y} (\ln_q f_y) \\ &= \frac{1}{\Omega_z} \frac{\partial}{\partial \Omega_z} (\ln_q f_z), \end{aligned}$$

a qual somente pode ser satisfeita quando

$$\frac{1}{\Omega_i} \frac{\partial}{\partial \Omega_i} (\ln_q f_i) = -\gamma, \quad (4.10)$$

para γ constante. A solução da equação 4.10 é dada por

$$\ln_q f_i = \frac{-\gamma \Omega^2}{2} + \ln_q A,$$

onde A é a constante de integração. Aplicando a q -exponencial nesta equação, segue-se que

$$f(\Omega_i) = \left[1 + (1-q) \left(\ln_q A - \frac{\gamma \Omega_i^2}{2} \right) \right]^{\frac{1}{1-q}}.$$

Definindo

$$\frac{2}{\sigma^2} \equiv \frac{\gamma}{1 + (1-q) \ln_q A} = \frac{\gamma}{A^{1-q}},$$

onde o parâmetro σ é a largura equivalente. Assim temos que

$$\begin{aligned} f(\Omega_i) &= \left[1 + (1-q) \ln_q A - (1-q) \frac{\gamma \Omega_i^2}{\sigma^2} (1 + (1-q) \ln_q A) \right]^{1/(1-q)} \\ &= \left\{ [1 + (1-q) \ln_q A] \left[1 - (1-q) \frac{\Omega_i^2}{\sigma^2} \right] \right\}^{1/(1-q)}, \end{aligned}$$

que leva a

$$f(\Omega_i) = A_q \left[1 - (1-q) \frac{\Omega_i^2}{\sigma^2} \right]^{1/(1-q)}, \quad (4.11)$$

onde o sub-índice q na constante de normalização indica que esta constante depende do parâmetro q .

A probabilidade de encontrar Ω no intervalo $[\Omega, \Omega+d\Omega]$ pode ser calculada pela equação

$$F(\Omega) = \int f(\Omega) d^3\Omega, \quad (4.12)$$

onde $d^3\Omega = \Omega^2 \sin\theta d\theta d\varphi$. Logo, de acordo com a equação 4.11, tem-se

$$F_q(\Omega) = \int \int A_q \Omega^2 \left[1 - (1-q) \frac{\Omega_i^2}{\sigma^2} \right]^{1/(1-q)} \sin\theta d\theta d\varphi$$

de onde decorre a função de distribuição para as velocidades de rotação estelar proposta por Soares *et al.*:

$$F_q(\Omega) = 4\pi A_q \Omega^2 \left[1 - (1-q) \frac{\Omega_i^2}{\sigma^2} \right]^{1/(1-q)}.$$

Pode-se verificar que a expressão acima corresponde a uma função de distribuição maxwelliana no contexto da estatística não-extensiva. Como esperado, no limite $q \rightarrow 1$ essa expressão assume a forma da maxwelliana padrão, ou seja:

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 1} F_q(\Omega) &= \lim_{q \rightarrow 1} 4\pi A_q \left[1 - (1-q) \frac{\Omega_i^2}{\sigma^2} \right]^{1/(1-q)} \\ &= 4\pi \exp\left(-\frac{\Omega_i^2}{\sigma^2}\right). \end{aligned}$$

Este resultado mostra claramente que a função de distribuição proposta por Soares *et al.* constitui uma generalização da função proposta por Deutsch [7].

Soares *et al.* [11] testaram sua função de distribuição para uma amostra de 219 rotações, $V \sin i$, de estrelas com massas variando no intervalo de 0,6 a $1,2M_\odot$, provenientes do aglomerado Plêiades e medidas por Queloz *et al.* [32]. Como resultado da análise para a amostra completa, concluíram que o melhor ajuste entre a função teórica e os dados observacionais se dá quando $q = 1,36_{-0,05}^{+0,03}$, o que difere da maxwelliana padrão ($q = 1$) proposta por Deutsch [7].

4.2 A função de Distribuição $V \sin i$

O comportamento dos momentos de distribuição para o conjunto de rotação de estrelas, por exemplo, a média, reflete o comportamento rotacional destas estrelas e determina a natureza estatística de rotações deste tipo. Por sua vez, os momentos da distribuição da velocidade de rotação equatorial, V , determinam o comportamento global das velocidades de rotação de um tipo particular de estrelas [33]. Além disso, o comportamento geral do $V \sin i$, a projeção da velocidade rotacional na linha de visão do observador, está determinado pelos momentos de distribuição $V \sin i$. A velocidade rotacional, V , podem ser estimados por medidas de períodos de rotação, enquanto as medidas $V \sin i$ são obtidas por alargamento das linhas espectrais. Nas medidas de $V \sin i$ obtidas na literatura o parâmetro $\sin i$ relacionado com a inclinação i do eixo de rotação da estrela é restrito para valores entre 0 e 90 graus.

Ao assumir que as estrelas giram como corpos rígidos e que a distribuição de energia cinética de rotação deve obedecer a uma equação diferencial não-linear do tipo Bernoulli,

Soares e Silva [37] reescreveram a função de Maxwelliana no contexto da mecânica estatística generalizada de Tsallis. Eles tiraram as seguintes funções de distribuição para V e $y = V \sin i$, respectivamente:

$$F_q(V) = A_q V^2 \left[1 - (1 - q) \frac{V^2}{\sigma_V^2} \right]^{1/(1-q)}, \quad (4.13)$$

$$\varphi_q(y) = B_q y \left[1 - (1 - q) \frac{y^2}{\sigma_y^2} \right]^{1/(1-q)}, \quad (4.14)$$

Onde A_q e B_q são constantes dependentes q e σ . Além sigma é uma quantidade com as dimensões de velocidade, ao mesmo tempo, é um parâmetro dependente de massa associada com a largura característica da distribuição. Também σ pode ser interpretado como uma velocidade padrão de um grupo de estrelas de massas semelhantes. O índice entrópico, q , é um parâmetro de não extensividade características da natureza do sistema, e depende da natureza de longo prazo das interações presentes no sistema. Ambas as equações 4.13 e 4.14 são generalizações da forma Maxwelliana quando $q = 1$. Foram obtidos os momentos da função de distribuição generalizada das velocidades rotacionais projetadas 4.14 e o verdadeiro equatoriais 4.13 no contexto da nonextensividade, então foi comparado esses momentos com os obtidos a partir de Chandrasekhar e Munch [3] e Soares e Silva [33].

4.2.1 Momentos da distribuição segundo Tsallis

Soares e Silva [37] obtiveram as expressões gerais para os momentos das distribuições governado por 4.14 e 4.13 sob a forma padrão. No presente trabalho derivamos os momentos de acordo com o formalismo de Tsallis (doravante q -momentos) usando as regras das estatísticas- Q para o cálculo dos momentos de um observável como proposto por Tsallis [Soares2013]. Os momentos de uma O_x observável, cuja função de distribuição é dada por $p(x) \propto [1 - (1 - q)x]^{1/(1-q)}$, no formalismo de Tsallis é dada por

$$\langle O_x \rangle_q \equiv \int_W O_x P(x) dx, \quad (4.15)$$

em que W é o número total de possibilidades de um evento x . $P(x)$ é uma distribuição de potência, a resolução do observável tem de ser escrita como

$$P(x) \equiv \frac{p^q(x)}{\int_W p^q(x) dx} \quad (4.16)$$

onde $p(x)$ é normalizada em $\int_0^\infty p(x) dx = 1$. Isto garante que todo o evento x se anula fora do intervalo de integração em adição a normalizar a distribuição de qualquer que seja a escolha da forma de cálculo do parâmetro físico sob estudo.

No contexto do cálculo dos momentos de distribuição através da forma padrão, com

σ fixo, $p(x)$ não é invariante com respeito à escolha de zero para as velocidades. Além disso, a média (primeiro momento) calculada de forma diferente do padrão, a afirmação de que a média de uma constante deve ser a própria constante. Por estas razões, Tsallis [19] tem forma 4.16 para evitar incorrer os problemas citados.

De acordo com a definição dada pela eq. 4.15 formalismo de Tsallis [36], no r -th q -momentos de V cuja função densidade de probabilidade é dada por $F_q(V)$ é

$$\langle V^r \rangle_q = \frac{\int_0^{V_{max}} V^r [F_q(V)]^q dV}{\int_0^{V_{max}} [F_q(V)]^q dV} \quad (4.17)$$

em que V_{max} é o limite superior de V em que esta assegura a $F_q(V)$ ser não-negativo. Quando q é menor do que 1, o limite superior é de $V_{max} = \sigma_V / \sqrt{1-q}$, e quando q não é inferior a 1, não há um limite superior de V_{max} . Quando $r = 1$, $y = 2$ e $y = 3$ na equação 4.17 nos da a média, o desvio quadrático médio, e a assimetria da função $F_q(V)$, respectivamente. Alterando $F_q(V)$ para a função de distribuição dada pela equação 4.13. Podemos escrever as expressões para o r -th para o momento de V conforme

$$\langle V^r \rangle_{q < 1} = \left(\frac{\sigma_V}{\sqrt{1-q}} \right)^r \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1+q-q^2}{1-q}\right) \Gamma\left(\frac{r+1}{2} + q\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + q\right) \Gamma\left(\frac{r+1}{2} + \frac{1+q-q^2}{1-q}\right)} \quad (4.18)$$

para valores de q no intervalo aberto $(-\frac{1}{2}, 1)$, e

$$\langle V^r \rangle_{q \geq 1} = \left(\frac{\sigma_V}{\sqrt{q-1}} \right)^r \frac{\Gamma\left(\frac{1+q-q^2}{q-1} - \frac{r-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{r+1}{2} + q\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1+q-q^2}{q-1}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + q\right)} \quad (4.19)$$

que é válido para q no intervalo aberto entre 1 e $a = \frac{3-r}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{17+2r+r^2}$. Como a depende de r impõe como as seguintes restrições em q : $q < 1,62$, $q < 1,5$ e $q < 1,41$ para $r = 1$, $r = 2$ e $r = 3$, respectivamente.

De r -th e q -momentos para $y \equiv V \sin i$ a densidade é $\phi_q(y)$, como apresentado na equação 4.14 pode ser calculado de forma semelhante e que apresenta os seguintes resultados.

$$\langle y^r \rangle_{q < 1} = \left(\frac{\sigma_V}{\sqrt{1-q}} \right)^r \frac{\Gamma\left(\frac{3-q^2}{2-2q}\right) \Gamma\left(\frac{r+1}{2} + \frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+q}{2}\right) \Gamma\left(\frac{r+1}{2} + \frac{2+q-q^2}{2-2q}\right)} \quad (4.20)$$

para valores de q no intervalo aberto $(-1, 1)$, e

$$\langle y^r \rangle_{q \geq 1} = \left(\frac{\sigma_V}{\sqrt{q-1}} \right)^r \frac{\Gamma\left(\frac{2+q-q^2}{2q-2} - \frac{r-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{r+1}{2} + \frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{2+q-q^2}{2q-2}\right) \Gamma\left(\frac{1+q}{2}\right)} \quad (4.21)$$

para diferentes valores de q no intervalo entre 1 e $b = \frac{2-r}{2} + \frac{\sqrt{8+r^2}}{2}$. Mais uma vez, temos valores de q obtidos de acordo com b tal que $q < \frac{2}{2}$, $q < 1,73$ e $q < 1,56$, $r = 1$, $r = 2$ e $r = 3$, respectivamente. Todas essas limitações para o momentos, $\langle V^r \rangle$ e $\langle y^r \rangle$, é devido aos momentos são dependentes sobre a função $\Gamma(arg)$, que impõe verdadeira $\Re\{arg\} > 0$ em seu argumento. Ambos normalização e cálculo dos momentos envolve integrais, que se tornam beta [38] integrais por meio de alguns mudanças de variáveis.

Capítulo 5

Dados Observacionais

Para testar a função de distribuição da rotação estelar generalizada proposta neste trabalho, escolheu-se uma amostra de velocidades de rotação de estrelas do Aglomerado aberto Plêiades (M45).

Os aglomerados estelares abertos são grupos de estrelas formados a partir de uma mesma nuvem molecular, em geral de forma irregular e englobam centenas de estrelas. Também são denominados aglomerados galácticos, pois se podem encontrar por todo o plano galáctico. As estrelas dos aglomerados abertos encontram-se ligadas entre si pela gravidade, mas com menor intensidade do que as dos aglomerados globulares. As estrelas desses aglomerados costumam ser novas, maciças e muito quentes, e o seu número pode oscilar desde uma dezena até vários milhares. Encontram-se repartidos em espaços da ordem da trinta milhões de anos-luz e, devido às forças de maré produzidas pelo centro da galáxia, vão-se desagregando devagar. Somente se observam aglomerados abertos em galáxias espirais e irregulares, devido a que nelas a formação estelar é mais ativa.

O aglomerado, reúne estrelas com características comuns como composição química e idade. Pode-se, portanto, fazer uma boa análise estatística da rotação de tais estrelas, sem maiores preocupações com as variações de tais parâmetros. Outro aspecto importante é que o aglomerado é jovem o que possibilita uma melhor investigação da transferência do momento angular da nuvem mãe para as estrelas, já que quando mais velho é o aglomerado a tendência é que essa informação ser torne cada vez mais fraca. Deste modo a amostra constitui um excelente laboratório para a proposta desta dissertação.

5.1 Plêiades

As Plêiades ou M45 no catálogo Messier é um grupo de estrelas localizado na constelação do Touro que formam um aglomerado aberto, algumas estrelas são facilmente visíveis a olho nú nos dois hemisférios. As estrelas são brilhantes e quentes, com o espectro azul, nas astrofotografias, porém, também se destaca a nebulosa azul em volta do aglomerado, essas são nebulosas de reflexão, como o nome já sugere elas brilham apenas por causa da reflexão da luz das estrelas do aglomerado. Sua visualização no céu é fácil, com um binóculo ou telescópio já é possível observar cerca de 100 estrelas, ainda mais

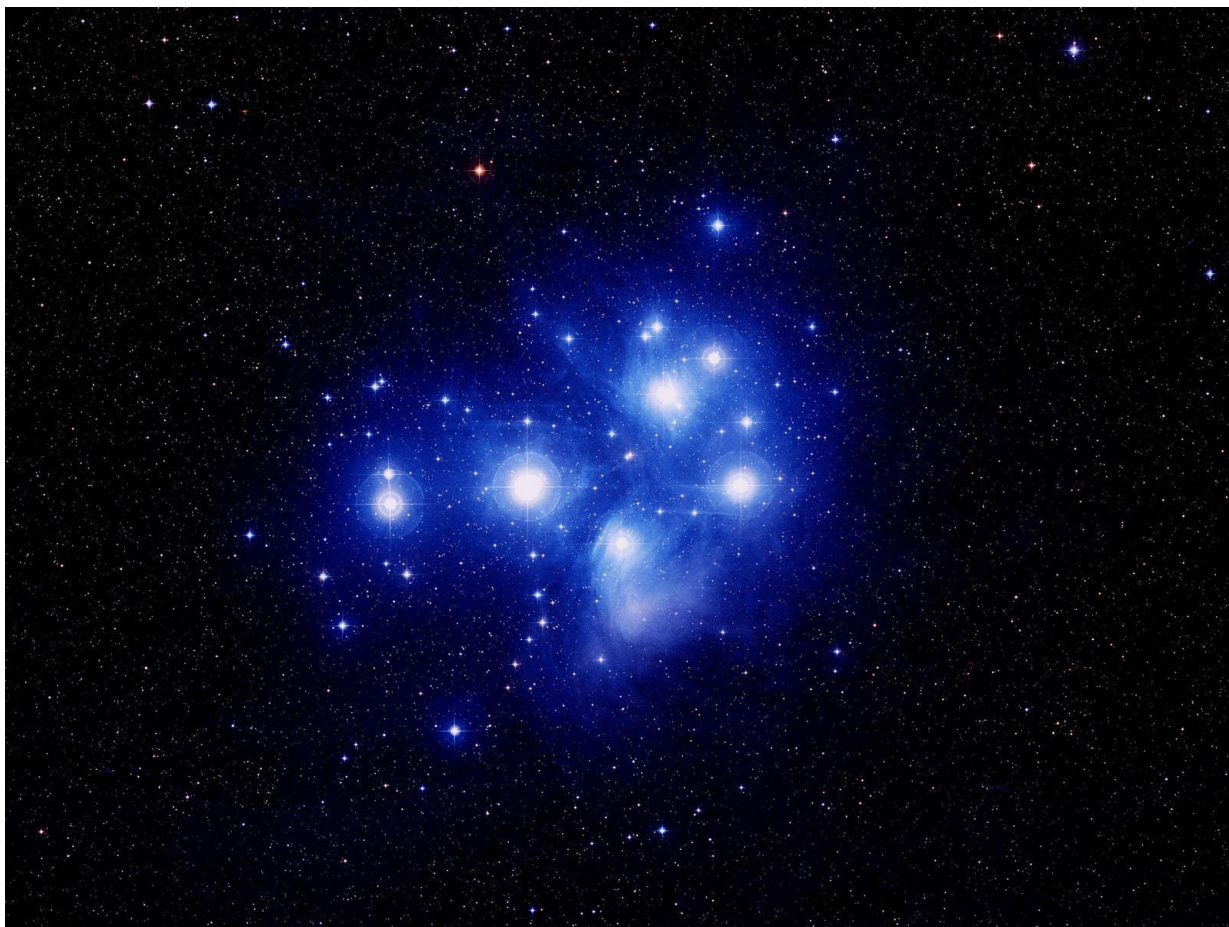


Figura 5.1: *Fotografia do aglomerado aberto Plêiades, na imagem observa-se claramente a nebulosa de reflexão e as estrelas mais brilhantes do aglomerado.*

se o observador estiver longe da poluição luminosa das cidades. Algumas nebulosas são vistas por telescópios com abertura superior a 200mm e em um céu de boa visibilidade. O aglomerado está localizado próximo da linha da eclíptica, por isso é constantemente ocultado pela Lua. Além de ser interessante cientificamente, as Plêiades também são famosas pela história que envolve seu nome e mitologia em diversas culturas, como os Maoris, que as chamavam de “Matakin”, os Astecas que chamavam de “Tianquiztli”, os Persas que chamavam de “Sorayya” e os Maias de “Tzab-ek”, mais o nome Plêiades que nos referimos ao aglomerado até hoje, surgiu dos gregos, onde as referências as Plêiades foram vistas pela primeira vez no livro “Ilíada”, escrito em 750 A.C. por Homero. As plêiades estão a 440 anos-luz daqui e sua massa total é o equivalente a 800 massas solares, a maioria das estrelas mais brilhantes são jovens azuis e quentes, mas também foram encontradas algumas anãs marrons, que não possuem capacidade de fusão nuclear no núcleo pois tem apenas 8% da massa do Sol, embora elas representem 25% da população do aglomerado, que conta com cerca de 1000 objetos, sua massa representa menos de 2% da massa total de M45. As nove estrelas mais brilhantes das Plêiades são as 7 irmãs da mitologia grega, Asterope, Mérope, Electra, Celeno, Taigete, Maia e Dríope, e seus pais

Plêione e Atlas; as Híades (outro aglomerado em Touro) são irmãs das Plêiades, já que são filhas de Atlas.

As Plêiades ou Atlântidas eram as encantadoras filhas de Pleione e Atlas, que tinha recebido o castigo imposto por Zeus, de carregar os céus sobre os ombros, por ter se confrontado com Zeus pela supremacia do Olimpo. De acordo com a lenda, as moças foram raptadas pelo rei Busíris do Egito. Hércules libertou-as, mas a seguir foram perseguidas por Orion que estava fascinado pela beleza das Plêiades.

Conhecidas como “as irmãs que choram”, as Plêiades anunciavam um tempo bom e agradável, quando surgiam, de 22 de abril a 10 de maio, e quando se punham, de 20 de outubro a 11 de novembro, anunciavam mau tempo.

5.2 A amostra

Nossa amostra foi selecionada a partir dos dados fornecidos pelo trabalho de Hartman [39] para coincidir com os seguintes critérios: que as estrelas sejam do tipo simples e que a relação entre a projeção da velocidade de rotação, $V \sin i$ e velocidade de rotação verdadeira, V , sendo menor do que 1,05. A aplicação deste critério é devido a rotação diferencial causar medidas do período de rotação superior ao período de rotação equatorial, fazendo com que a medida de $V \sin i$ seja sistematicamente superior aos valores verdadeiros [39]. Obtivemos a partir de nossa seleção uma amostra de 148 estrelas cujos parâmetros são determinados com precisão. As principais características de nossa amostra são:

- Idade de 120 Myr (Milhões de anos),
- Massas com mediana $0,9M_{\odot}$ que abrangem uma faixa de $0,4M_{\odot}$ e $1,4M_{\odot}$,
- Raios variando cerca de $0,4R_{\odot}$ para $1,4R_{\odot}$, com uma mediana de $0,8R_{\odot}$.

Segundo por Hartman [39] as velocidades rotacionais projetadas foram obtidas a partir dos espectros de estrelas em alta dispersão usando o método de Fourier e correlação cruzada. O erros de $V \sin i$ encontrados são obtidos na literatura no artigos que Stauffer et al. (1987) [40], Soderblom et al. (1993) [41], Queloz et al. (1998) [32] e Terndrup et al. (2000) [42] e as estrelas que não tem os erro de suas medidas encontrado da literatura adotamos um erro padrão de 10%(erro típico) do valor da medida. As velocidades de rotação verdadeiras foram calculadas a partir das medidas de período de rotação estelar, P e do raio, R , usando a equação $V = 2\pi R/P$. O erro relativo nas velocidades rotacionais foi calculada pela adição em quadratura das incertezas do raios e dos períodos.

Para os períodos com rotação de estrelas com $M > 0,85M_{\odot}$, as estimativas de $V \sin i$ e raio são consistentes de estrelas com uma distribuição isotrópica dos eixos de rotação, se considerarmos uma lei de rotação diferencial. Para estrelas com $M < 0,85M_{\odot}$ os valores $\sin i$ inferidos são sistematicamente maior do que 1,0 [39]. Estas observações implicam que a combinação de parâmetros medidos $P(V \sin i)/R$ é demasiado grande, de

aproximadamente 24% para estrelas de baixa massa neste aglomerado. Ao comparar a relação massa-período para as Plêiades com um aglomerado um pouco mais velho M35, confirmamos que o spin-down é de aproximadamente 100 Myr para as estrelas de baixa rotação com $0,7M_{\odot} < M < 1,1M_{\odot}$. Um fato que pode indicar que o transporte interno de momento angular é ineficiente em estrelas de massa solares de baixa rotação. Todos objetos de estudo desta dissertação são apresentadas na tabela [B](#).

Capítulo 6

Resultados e discussões

Neste capítulo são apresentados e discutidos os resultados do presente trabalho. Inicialmente, apresenta-se uma análise da velocidade de rotação nos diferentes intervalos de massa e posteriormente apresentamos a função de distribuição generalizada proposta por Soares [33] e discute-se o seu comportamento com os parâmetros A_V e q_V e σ_V .

6.1 Análise da velocidade nos diferentes intervalos de massa

A distribuição das taxas de rotação nas Plêiades tem uma forte dependência em massa. Para $M > 0.9M_\odot$, na maioria das estrelas a envoltória convectiva de uma estrela do tipo solar pode desacoplar de seu núcleo radiativo, que é uma função decrescente de massa, passando de $\approx 30\text{km s}^{-1}$ em $M = 1,25M_\odot$ para $\approx 8\text{km s}^{-1}$ de $0,6 - 0,9M_\odot$. Em massas superiores há uma ampla distribuição de taxas de rotação de $V \sin i \leq 7\text{km s}^{-1}$ até $V \sin i \approx 100\text{km s}^{-1}$, um fator de pelo menos 15 no momento angular por unidade de massa. A maioria das estrelas nesta faixa de massa estão girando lentamente, com $V \sin i \sim 7\text{km s}^{-1}$, mas também há uma pequena fração de estrelas com a rotação muito rápida ($V \sin i \approx 80\text{km s}^{-1}$), produzindo uma aparente distribuição bimodal das taxas de rotação o que podemos perceber na figura 6.4. A gama de taxas de rotação diminui para massas inferiores [47]: entre de cerca de $0,7M_\odot$ e $1M_\odot$, 78% das estrelas apresentam velocidades menores que 15km s^{-1} figura 6.2 há poucas estrelas com velocidades superiores, o envelope superior das taxas de rotação está diminuindo com a diminuição da massa estelar. Também parece que a distribuição das taxas de rotação altera em $0,5M_\odot$, em que a distribuição não é uniforme e bimodal, tal como encontrada em massas mais elevadas. Esta distribuição é bastante plana ao contrário do esperado de distribuição para uma estreita faixa de taxas de rotação ampliados por um ângulo de inclinação aleatório, o que seria um pico para estrelas com alta rotação aparente.

O aglomerado com estrelas na região da ZAMS (idade zero na sequência principal) melhor estudado é as Plêiades, com idade de $\sim 120\text{Myr}$. Este aglomerado contém estrelas com $P_{rot} = 1/4$ dia, ou 100 vezes maior do que a taxa de rotação do sol. Para ilustrar a importância das Plêiades, por exemplo, suas anãs do tipo G, que giram mais rapidamente, giram a uma taxa 10 vezes maior que a do Sol, deste modo, as Pleiades são estrelas

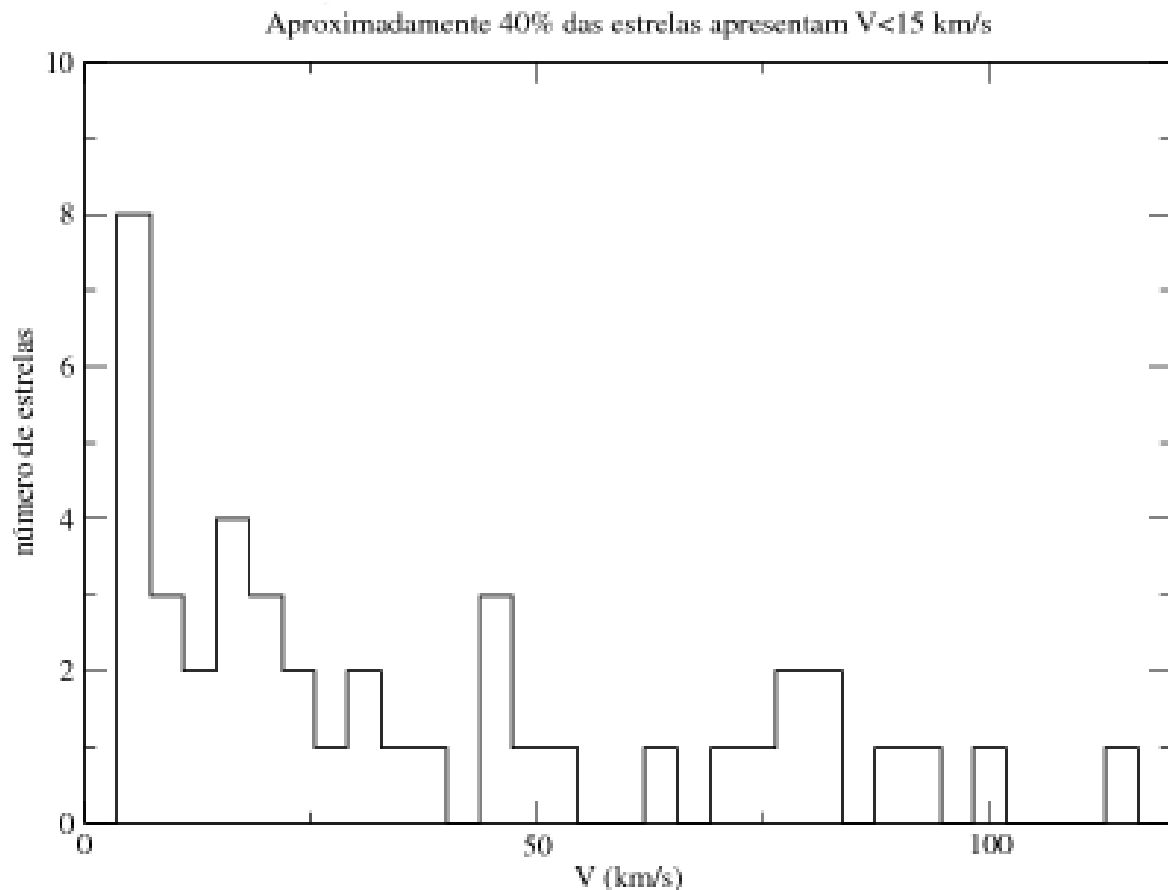


Figura 6.1: *Histograma das velocidades reais equatoriais de estrelas com massa $0,4M_{\odot} < M < 0,7M_{\odot}$.*

extraordinárias. Estas estrelas de rotação anômala (estrelas com $V \sin i \geq 20 \text{ km/s}$) constituem aproximadamente 20% das anãs G e K nas Plêiades, permanecendo 80% com $V \sin i$ abaixo de 10 km/s . Assim, a distribuição de rotação para estas estrelas da ZAMS, é bimodal com uma fração dominante de estrelas que giram relativamente lentas. O motivo da estrelas anãs G e K serem com rotação anômala pode ser explicado analisando os trabalhos iniciais de Wolff et al. (1982) [46]. Esse primeiro aponta uma discrepância nas velocidade de rotação nas estrelas de aglomerado: as estrelas encontradas na região mais densas possuem uma velocidade maior quando comparadas as estrelas de tipo similar encontradas em regiões de menor densidade num mesmo aglomerado. Seguindo este raciocínio podemos supor que essas estrelas tardias G e K apresentam alta rotação devido serem formadas em regiões mais densas.

Além disso, existe uma forte dependência da rotação sobre a massa nestas estrelas com um decaimento acentuado das estrelas anãs F do tipo tardias às G0, considerando que as Plêiades no mesmo intervalo mostram dependência em pequenas massas. Este aglomerado nos revela que, no primeiro bilhão de anos depois de alcançar a ZAMS estrelas do tipo solar podem perder uma quantidade considerável de momento angular ao mesmo tempo

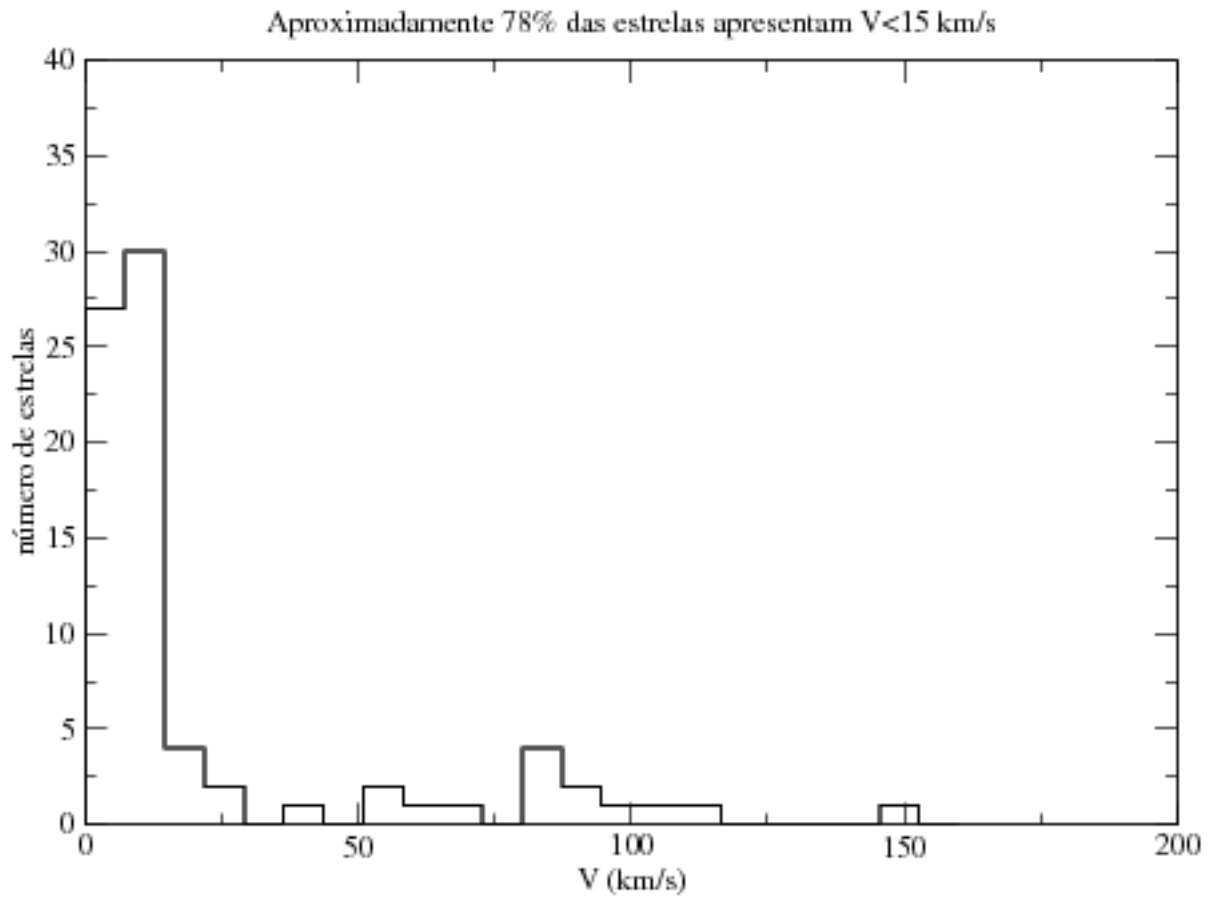


Figura 6.2: *Histograma das velocidades reais equatoriais de estrelas com massa $0,7M_{\odot} < M < 1,06M_{\odot}$.*

que uma forte convergência nas taxas de rotação é introduzida como uma função da massa. Os detalhes desta convergência ainda não estão totalmente claros. O fato de acontecer tão depressa conduz a uma enorme expansão das estrelas na ZAMS, levando a sugerir que a envoltória convectiva de uma estrela do tipo solar pode desacoplar de seu núcleo radiativo. Isto significa que nós observamos a envoltória das estrelas menos massivas decaírem sua rotação mais depressa. Este modelo de desacoplamento pode também ajudar a explicar a forte dependência de massa visto que a proporção entre o núcleo radiativo e a envoltória convectiva é muito sensível à massa da estrela.

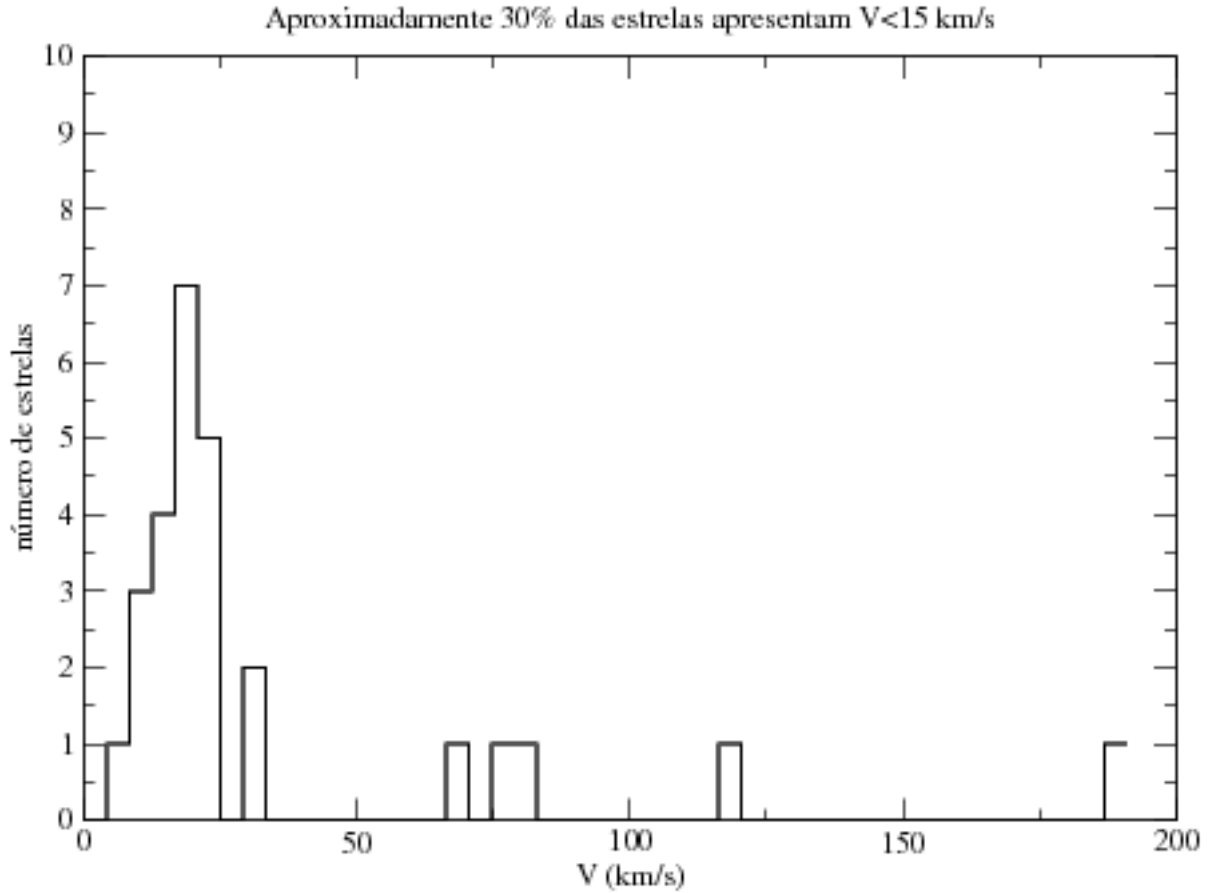


Figura 6.3: *Histograma das velocidades reais equatoriais de estrelas com massa $1,06M_{\odot} < M < 1,4M_{\odot}$.*

6.2 A função de distribuição generalizada

O principal resultado do presente trabalho consiste na estimativa da inclinação dos eixos rotacionais das estrelas do aglomerado aberto Plêiades através da relação entre os primeiros momentos das distribuições das velocidades equatoriais verdadeiras de rotação e de sua velocidade de rotação projetada, utilizando as funções de distribuição da rotação estelar generalizada proposta por Soares e Silva [33]. Essas funções podem ser escritas como:

$$F_q(V) = A_q V^2 \left[1 - (1 - q) \frac{V^2}{\sigma_V^2} \right]^{1/(1-q)} \quad (6.1)$$

$$\varphi_q(y) = B_q y \left[1 - (1 - q) \frac{y^2}{\sigma_y^2} \right]^{1/(1-q)} \quad (6.2)$$

onde $y = V \sin i$.

Uma relação entre os primeiros momentos determina a média $\langle \sin i \rangle$. A velocidade rotacional, V , pode ser estimada por medida de período de rotação, enquanto as medidas $V \sin i$ são obtidos por alargamento das linhas espectrais. A equação abaixo nos mostra

a média $\langle \sin i \rangle$ calculada a partir do primeiro momento da distribuição da função de distribuição proposta.

$$\frac{\langle y \rangle_{q_y \geq 1}}{\langle V \rangle_{q_V \geq 1}} = \left(\sqrt{\frac{q_V - 1}{q_y - 1}} \right) \frac{\Gamma \left[\frac{1}{2} + q_V \right] \Gamma \left[\frac{1}{2} + \frac{1 + q_V - q_V^2}{-1 + q_V} \right] \Gamma \left[1 + \frac{q_y}{2} \right] \Gamma \left[\frac{2 + q_y - q_y^2}{-2 + 2q_y} \right]}{\Gamma[1 + q_V] \Gamma \left[\frac{1 + q_V - q_V^2}{-1 + q_V} \right] \Gamma \left[\frac{1 + q_y}{2} \right] \Gamma \left[\frac{1}{2} + \frac{2 + q_y - q_y^2}{-2 + 2q_y} \right]} \quad (6.3)$$

o q_y utilizado na equação acima foi obtido por Soares para as Plêiades e o valor é de $q_y = 1,36$ e o valor de $q_V = 1,42 \pm 0,02$ foi determinado através do ajuste no gráfico do histograma das velocidades equatoriais verdadeiras conforme veremos mais adiante.

A relação entre V e distribuições $V \sin i$ que é dada através da equação integral por Chandrasekhar e Münch [3], que provou ser muito útil para o cálculo da distribuição de V a partir da distribuição de $V \sin i$. Neste trabalho utilizamos modelos teóricos da função de distribuição de $V \sin i$, que pode ser confrontada com a função de distribuição observada $F(V)$, para a obtenção da média das inclinações dos eixos de rotação. A equação permite derivar a relação $\langle \sin i \rangle = \langle V \sin i \rangle / \langle V \rangle$. Partimos de uma função generalizada dos momentos de V obtendo assim o primeiro momento da distribuição e determinando o $\langle \sin i \rangle$. Enquanto isso, funções matemáticas propostas para descrever as diferentes distribuições observadas de velocidades de rotação sugerem que a principal questão no problema da distribuição de rotação pode está por trás da física estatística.

6.3 A média $\langle \sin i \rangle$

Função de distribuição generalizada proposta reproduz com precisão a média do ângulo de inclinação $\langle \sin i \rangle$, para estrelas da amostra. Primeiro, foram determinados os valores dos parâmetros A_V , q_V e σ_V da curva que melhor se ajusta a distribuição das velocidades rotacionais reais no histograma. A fim de evitar mudanças significativas na distribuição do histograma devido à escolha do bin, utiliza-se histograma usando um bin otimizado de Scott [48] para representar as distribuições de frequência, para a distribuição das velocidades rotacionais reais. A Figura 6.5 mostra a distribuição e a curva que melhor se ajusta a distribuição. Nós determinamos $q_V = 1,42 \pm 0,02$ e $\sigma_V = 7,9 \pm 0,03$.

Para ajustar a curva usamos um algoritmo Levenberg-Marquardt. O método dos mínimos quadrados nos dá a reta que minimiza a média do quadrado das distâncias entre ela e os pontos medidos. Os parâmetros de ajuste são χ^2 -reduzido de $\chi^2/dof \approx 8,4 \times 10^{-1}$, para um número de graus de liberdade de 145, coeficiente de correlação de 0,98 no qual podemos avaliar que nosso ajuste é de boa qualidade já que nosso coeficiente de correlação de Pearson é próximo de 1.

O seno médio observado da inclinação dos eixos de rotação das estrelas no aglomerado Plêiades é $\langle \sin i \rangle = 0,62$, esta média foi calculada usando os valores de $\langle V \sin i \rangle$ e $\langle V \rangle$ da

nossa amostra. Assumindo uma distribuição aleatória dos eixos de rotação das estrelas, o valor médio é de $\pi/4 = 0,79$, notamos que há uma discrepância do valor observado. Isto também é mostrado na figura 6.6, onde temos o gráfico de $\langle V \sin i \rangle$ em função de $\langle V \rangle$.

Na figura 6.6, a maioria dos pontos são bem distribuídos em torno da curva $\langle V \sin i \rangle / \langle V \rangle = 0,60$ representada pelo ajuste, mas a curva $\langle V \sin i \rangle / \langle V \rangle = \pi/4$, está localizado perto do limite superior do conjunto de pontos, a média $\langle \sin i \rangle = 0,55 \pm 0,01$ foi calculada utilizando a relação entre os primeiros momentos de distribuição da função de distribuição teórica generalizada o que mostra um melhor resultado quando comparamos com a média dos dados observados. A discrepância entre a média de $\langle \sin i \rangle$ e o valor teórico que trata da aleatoriedade dos eixos rotacionais proposta por Chandrasekhar e Münch [3] se deve ao fato que os eixos de rotação em jovens aglomerados, tais como Plêiades, poderia ser alinhada; em vez de orientada aleatoriamente. Na verdade, as estrelas em aglomerados são formados a partir de uma nuvem de material interestelar em um intervalo de tempo relativamente curto. No processo de formação, o momento angular da nuvem-mãe interestelar é transferida para as estrelas recém-formadas [37]. Por conseguinte, é razoável assumir que a orientação do momento angular destas estrelas reflete o momento angular inicial da nuvem de células progenitoras em rotação. Assim, um aglomerado de estrelas jovens tende a ter uma orientação preferencial de eixos de rotação, embora esta característica pode se perder gradativamente ao longo do tempo.

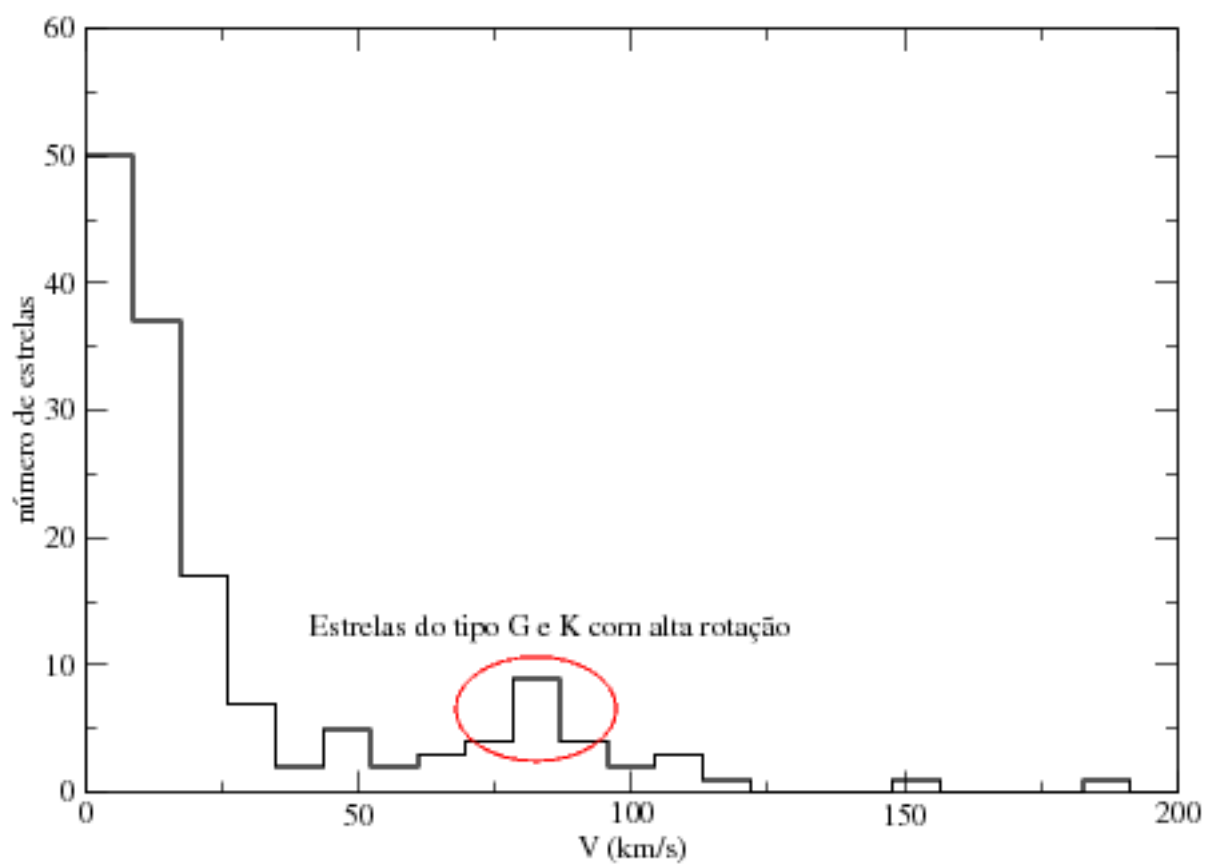


Figura 6.4: Histograma das velocidades reais equatoriais de estrelas com massa $0,4M_{\odot} < M < 1,4M_{\odot}$, equivalente a toda amostra estudada. A região circulado em vermelho mostra um pico aparente na distribuição.

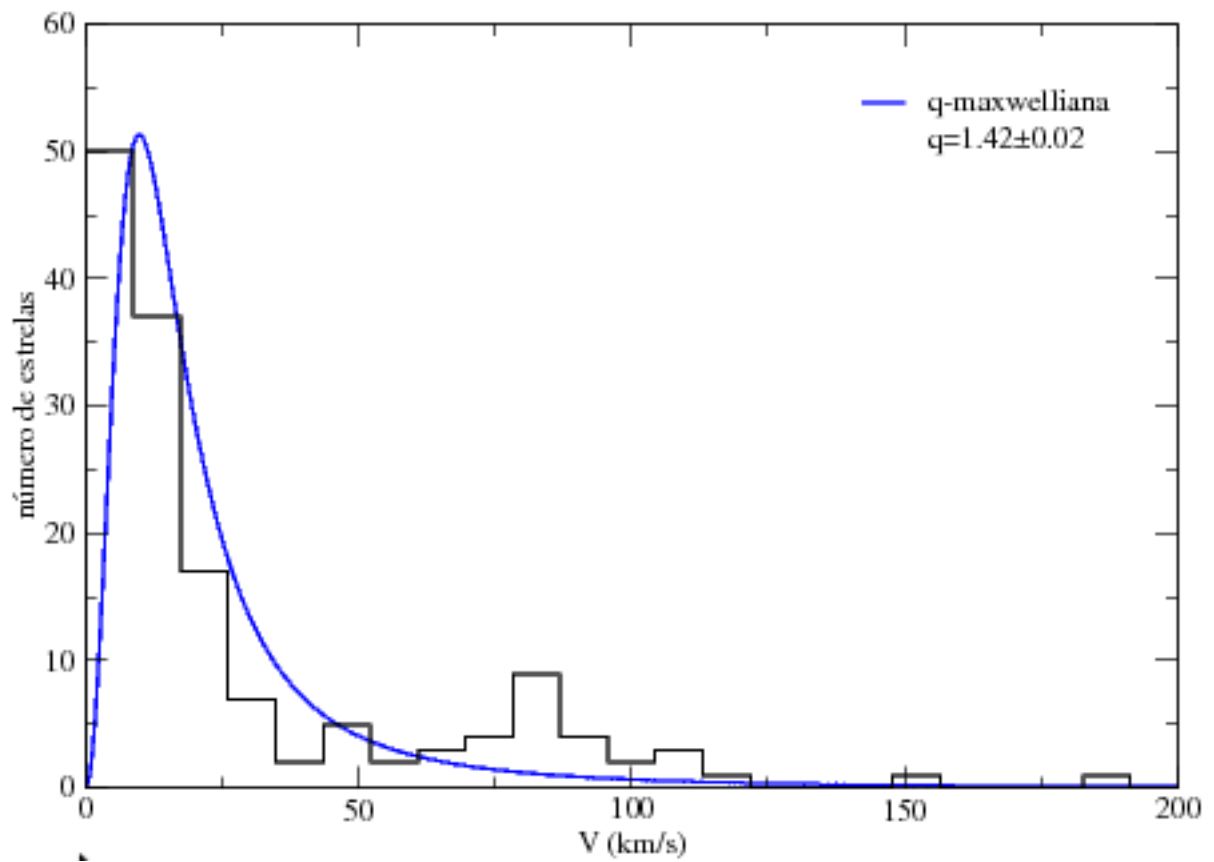


Figura 6.5: Histograma de distribuição dos dados observados de V e a curva integral da função proposta que melhor se adapta a distribuição. Os parâmetros de melhor ajuste é $q_V = 1,42 \pm 0,02$ e $\sigma = 7,9 \pm 0,03$

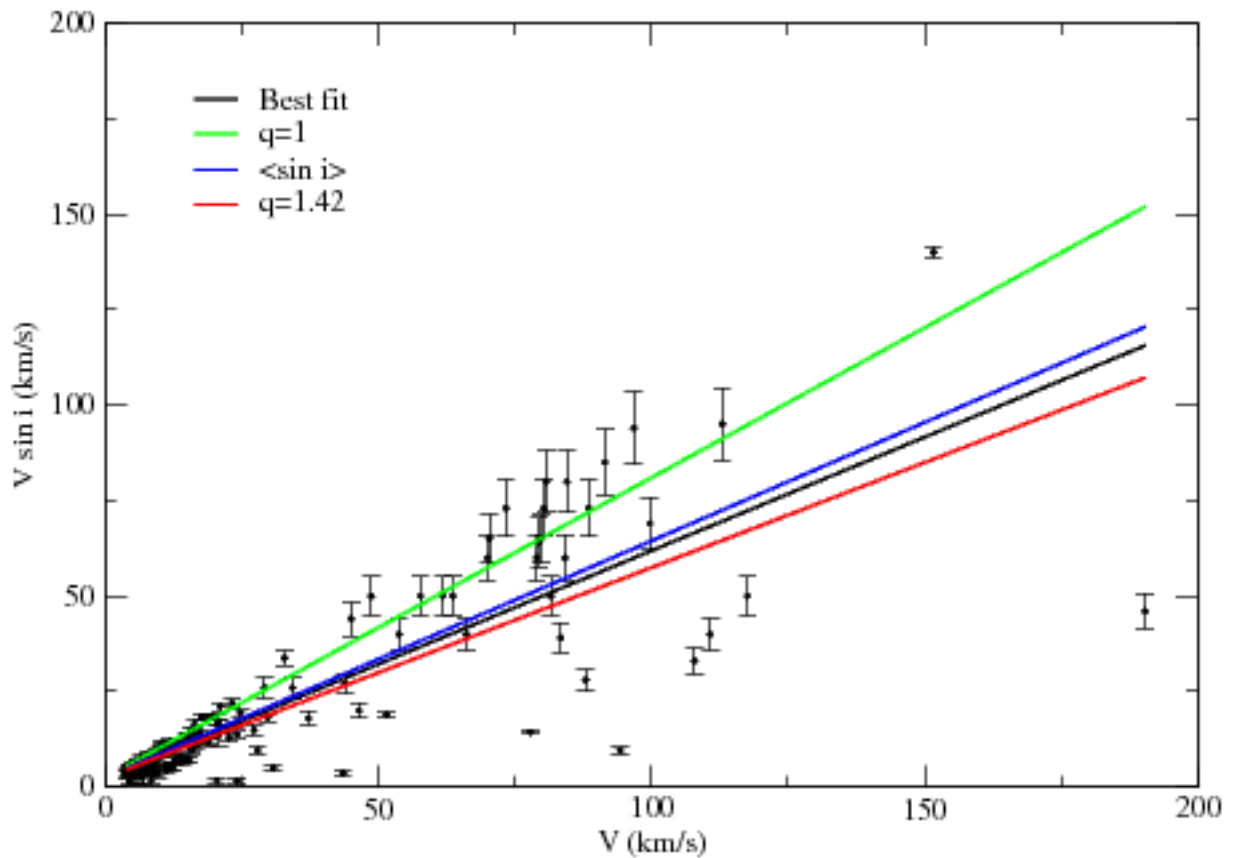


Figura 6.6: Rotação observada, $V \sin i$ em função da rotação, V , para os 148 estrelas da amostra. A curva de $q = 1$ representa a função $\langle V \sin i \rangle / \langle V \rangle = \pi/4$ (em verde); $\langle \sin i \rangle$ indica $\langle V \sin i \rangle / \langle V \rangle = 0,62$ (em azul); $q = 1,42$ marca a posição da curva $\langle V \sin i \rangle / \langle V \rangle = 0,55$ (em vermelho); e a última mostra a curva de melhor ajuste $\langle V \sin i \rangle / \langle V \rangle = 0,60$ (em preto) onde incluída aqui apenas para comparação com as outras curvas. As barras de erro são a partir de [40], [41], [32] e [42].

Capítulo 7

Conclusões e perspectivas

Conclusões

Desde os primeiros trabalhos desenvolvidos por Chandrasekhar & Münch, várias funções de distribuição estatística da rotação estelar foram propostas. Utilizando Mecânica Estatística de Maxwell-Boltzmann, Deutsch sugeriu uma função de distribuição da rotação baseada numa distribuição Maxwelliana. Soares estudou a rotação estelar no contexto da mecânica estatística não-extensiva (Tsallis 1988) e apresentou uma função de distribuição das velocidades de rotação baseada numa maxwelliana generalizada, a q -Maxwelliana. Testes estatísticos, em amostras de estrelas de aglomerados e do campo apresentaram resultados mais favoráveis às q -maxwellianas (Soares *et al.* 2006 e Carvalho *et al.* 2009).

No presente trabalho utilizou-se a função de distribuição generalizada por Soares [33] para se estabelecer uma função de distribuição da rotação vedadeira. Essa função foi generalizada no contexto da Mecânica Estatística Não-Extensiva, de modo que reproduzisse a função original no limite quando q tende para 1,0.

A função de distribuição proposta neste trabalho foi empregada para analisar a distribuição da rotação das estrelas do aglomerado aberto Plêiades. Para isso, analisou-se uma amostra de 148 estrelas, sendo todas elas estrelas simples. O valor de q foi encontrado para a distribuição das estrelas sendo $q = 1,42$. Os resultados da análise mostraram, portanto, que a distribuição da rotação no aglomerado aberto Plêiades parece ser controlada por mecanismos físicos melhor descritos pela mecânica estatística não-extensiva. Esse valor, para o parâmetro q , precisa ser verificados com base em um estudo mais detalhado, que leve em conta as propriedades individuais das estrelas, bem como um estudo comparativo entre diferentes aglomerados contendo objetos com alta rotação. Todavia, este trabalho permite afirmar que existem fortes indícios de que a distribuição da rotação das estrelas em aglomerados jovens tendem a ser melhor descrita pela estatística não-extensiva.

Perspectivas

Há vários estudos feitos por Soares e Carvalho ([11], [?], [33]) que tratam da a inclinação dos eixos rotacionais de aglomerados, tentando relacionar o parâmetro q com

a idades dos mesmos o presente trabalho abre margens para estudos afim de encontrar relação do parâmetro q com outras grandezas físicas como massa, momento de inércia, etc. O estudo da distribuição da rotação estelar com base na estatística não-extensiva está apenas começando e certamente trará à luz muito resultados que permitirão uma maior compreensão dos mecanismos físicos que controlam essas distribuições.

- Repetição deste trabalho, separando as estrelas por intervalo de massa e comparar os índices q e considerando os erros observacionais da amostra, bem como a contribuição dos erros intrínsecos da análise estatística;
- Estudo comparativo com base na função proposta neste trabalho para aglomerados.
- Fazer um estudo comparativo utilizando uma base de dados de períodos rotacionais para outros aglomerados, com o objetivo de distinguir possíveis influências causadas pela evolução da rotação e pela orientação dos eixos rotacionais sobre o parâmetro q ;
- Investigar melhor a correlação entre o parâmetro q e a moda da distribuição da velocidade de rotação;

Apêndice A

Relação entre as médias

Relação entre as médias obtidas pelo método Tsallis

$$\frac{\langle y \rangle_{q_y < 1}}{\langle V \rangle_{q_V < 1}} = \left(\sqrt{\frac{1 - q_V}{1 - q_y}} \right) \frac{\Gamma \left[\frac{1}{2} + q_V \right] \Gamma \left[1 + \frac{1 + q_V - q_V^2}{1 - q_V} \right] \Gamma \left[1 + \frac{q_y}{2} \right] \Gamma \left[\frac{3 - q_y^2}{2 - 2q_y} \right]}{\Gamma[1 + q_V] \Gamma \left[\frac{1}{2} + \frac{1 + q_V - q_V^2}{1 - q_V} \right] \Gamma \left[\frac{1 + q_y}{2} \right] \Gamma \left[1 + \frac{2 + q_y - q_y^2}{2 - 2q_y} \right]} \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\langle y \rangle_{q_y < 1}}{\langle V \rangle_{q_V \geq 1}} = \left(\sqrt{\frac{q_V - 1}{1 - q_y}} \right) \frac{\Gamma \left[\frac{1}{2} + q_V \right] \Gamma \left[\frac{1}{2} + \frac{1 + q_V - q_V^2}{-1 + q_V} \right] \Gamma \left[1 + \frac{q_y}{2} \right] \Gamma \left[\frac{3 - q_y^2}{2 - 2q_y} \right]}{\Gamma[1 + q_V] \Gamma \left[\frac{1 + q_V - q_V^2}{-1 + q_V} \right] \Gamma \left[\frac{1 + q_y}{2} \right] \Gamma \left[1 + \frac{2 + q_y - q_y^2}{2 - 2q_y} \right]} \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\langle y \rangle_{q_y \geq 1}}{\langle V \rangle_{q_V < 1}} = \left(\sqrt{\frac{1 - q_V}{q_y - 1}} \right) \frac{\Gamma \left[\frac{1}{2} + q_V \right] \Gamma \left[1 + \frac{1 + q_V - q_V^2}{1 - q_V} \right] \Gamma \left[1 + \frac{q_y}{2} \right] \Gamma \left[\frac{2 + q_y - q_y^2}{-2 + 2q_y} \right]}{\Gamma[1 + q_V] \Gamma \left[\frac{1}{2} + \frac{1 + q_V - q_V^2}{1 - q_V} \right] \Gamma \left[\frac{1 + q_y}{2} \right] \Gamma \left[\frac{1}{2} + \frac{2 + q_y - q_y^2}{-2 + 2q_y} \right]} \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\langle y \rangle_{q_y \geq 1}}{\langle V \rangle_{q_V \geq 1}} = \left(\sqrt{\frac{q_V - 1}{q_y - 1}} \right) \frac{\Gamma \left[\frac{1}{2} + q_V \right] \Gamma \left[\frac{1}{2} + \frac{1 + q_V - q_V^2}{-1 + q_V} \right] \Gamma \left[1 + \frac{q_y}{2} \right] \Gamma \left[\frac{2 + q_y - q_y^2}{-2 + 2q_y} \right]}{\Gamma[1 + q_V] \Gamma \left[\frac{1 + q_V - q_V^2}{-1 + q_V} \right] \Gamma \left[\frac{1 + q_y}{2} \right] \Gamma \left[\frac{1}{2} + \frac{2 + q_y - q_y^2}{-2 + 2q_y} \right]} \quad (\text{A.4})$$

Relação entre as médias obtidas pelo método padrão de acordo com Soares

$$\frac{\langle y \rangle_{q_y < 1}}{\langle V \rangle_{q_V < 1}} = \frac{\pi}{4} \left(\sqrt{\frac{1 - q_V}{1 - q_y}} \right) \frac{\Gamma \left[2 + \frac{2 - q_V}{1 - q_V} \right] \Gamma \left[\frac{3 - 2q_y}{1 - q_y} \right]}{\Gamma \left[\frac{7 - 5q_V}{2 - 2q_V} \right] \Gamma \left[\frac{3}{2} + \frac{2 - q_y}{1 - q_y} \right]} \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\langle y \rangle_{q_y < 1}}{\langle V \rangle_{q_V \geq 1}} = \frac{\pi}{4} \left(\sqrt{\frac{q_V - 1}{1 - q_y}} \right) \frac{\Gamma \left[\frac{5 - 3q_V}{-2 + 2q_V} \right] \Gamma \left[\frac{3 - 2q_y}{1 - q_y} \right]}{\Gamma \left[-2 + \frac{1}{-1 + q_V} \right] \Gamma \left[\frac{3}{2} + \frac{2 - q_y}{1 - q_y} \right]} \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\langle y \rangle_{q_y \geq 1}}{\langle V \rangle_{q_V < 1}} = \frac{\pi}{4} \left(\sqrt{\frac{1 - q_V}{q_y - 1}} \right) \frac{\Gamma \left[2 + \frac{2 - q_V}{1 - q_V} \right] \Gamma \left[-\frac{3}{2} + \frac{1}{-1 + q_y} \right]}{\Gamma \left[\frac{7 - 5q_V}{2 - 2q_V} \right] \Gamma \left[\frac{2 - q_y}{-1 + q_y} \right]} \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\langle y \rangle_{q_y \geq 1}}{\langle V \rangle_{q_V \geq 1}} = \frac{\pi}{4} \left(\sqrt{\frac{q_V - 1}{q_y - 1}} \right) \frac{\Gamma \left[\frac{5 - 3q_V}{-2 + 2q_V} \right] \Gamma \left[-\frac{3}{2} + \frac{1}{-1 + q_y} \right]}{\Gamma \left[-2 + \frac{1}{-1 + q_V} \right] \Gamma \left[\frac{2 - q_y}{-1 + q_y} \right]} \quad (\text{A.8})$$

Apêndice B

Tabela de Dados Observacionais

Dados observacionais para 148 membros das Plêiades

As colunas da tabela são as seguintes:

- Coluna 1: Nome da estrela;
- Coluna 2: Período de rotação em dias;
- Coluna 3: Massa da estrela em unidades de massas solares;
- Coluna 4: Raio da estrela em unidades de raios solares;
- Coluna 5: Velocidade de rotação projetada $V \sin i$;
- Coluna 6: Velocidade de rotação equatorial verdadeira obtida através do período e do raio da estrela.

Tabela B.1: Dados observacionais para estrelas do aglomerado aberto Plêiades

NOME	P	M	R	$V \sin i$	V
	<i>dias</i>	M/M_{\odot}	R/R_{\odot}	km/s	km/s
HAT 260-0007196	1,152	0,625	0,549	1,63	24,09
HAT 260-0002227	0,867	0,846	0,745	3,6	43,47
HAT 260-0007320	1,391	0,64	0,561	1,72	20,40
HAT 260-0002271	0,445	0,932	0,83	9,6	94,26
HAT 260-0007299	0,904	0,622	0,548	5	30,66
HAT 260-0000371	0,917	1,468	1,41	14,4	77,80
HAT 260-0001402	5,057	0,942	0,84	1,8	8,404
HAT 260-0000662	0,294	1,192	1,106	46	190,3
HAT 260-0001860	0,431	1,021	0,92	33	107,8
HAT 259-0001492	0,474	0,927	0,824	28	87,90
HAT 214-0001469	6,239	0,932	0,83	2,2	6,731
HAT 260-0000950	1,720	1,046	0,946	9,6	27,81
HAT 214-0002039	0,395	0,967	0,866	40	110,7
HAT 259-0001371	0,842	0,96	0,858	18,9	51,50
HAT 260-0006711	6,438	0,642	0,563	1,63	4,424
HAT 260-0000692	4,854	1,167	1,076	4,3	11,21
HAT 260-0001146	4,880	0,976	0,875	3,6	9,071
HAT 260-0001834	4,145	0,886	0,784	3,9	9,570
HAT 260-0000480	0,532	1,3	1,236	50	117,5
HAT 260-0001951	3,056	0,849	0,748	5,3	12,38
HAT 259-0000968	3,929	1,024	0,923	5,1	11,88
HAT 260-0008869	0,585	0,607	0,537	20	46,40
HAT 260-0017322	1,592	0,449	0,48	7	15,25
HAT 260-0001664	2,933	0,911	0,808	6,5	13,93
HAT 260-0007822	0,345	0,651	0,57	39	83,36
HAT 260-0017567	1,674	0,459	0,482	7	14,56
HAT 260-0009207	0,742	0,618	0,545	18	37,13
HAT 260-0001556	5,819	0,925	0,823	3,7	7,156
HAT 259-0000918	4,232	1,025	0,924	5,9	11,04
HAT 259-0007615	0,969	0,575	0,521	15	27,19
HAT 260-0006413	2,424	0,69	0,603	7,1	12,58
HAT 260-0000778	2,121	1,11	1,013	13,8	24,16
HAT 259-0014236	1,079	0,464	0,483	13	22,64
HAT 259-0001868	7,064	0,846	0,745	3,1	5,336
HAT 260-0001740	3,041	0,926	0,823	8	13,69
HAT 260-0001380	5,071	0,947	0,845	5	8,430
HAT 259-0001226	0,668	0,975	0,873	40	66,05
HAT 260-0001412	5,232	0,919	0,817	4,8	7,900
HAT 259-0000690	2,986	1,031	0,93	9,6	15,75
HAT 259-0000405	1,921	1,211	1,128	18,2	29,70
HAT 259-0007880	0,325	0,582	0,524	50	81,56
HAT 260-0009365	0,603	0,58	0,523	27	43,84
HAT 260-0000615	2,933	1,183	1,096	11,9	18,90

NOME	P	M	R	$V \sin i$	V
	<i>dias</i>	M/M_{\odot}	R/R_{\odot}	km/s	km/s
HAT 259-0000652	2,646	1,074	0,975	11,8	18,64
HAT 260-0015235	1,561	0,481	0,487	10	15,78
HAT 260-0002776	6,415	0,799	0,7	3,5	5,520
HAT 259-0000558	2,480	1,116	1,02	13,4	20,80
HAT 259-0001503	6,626	0,885	0,783	3,9	5,979
HAT 260-0000985	3,157	1,124	1,029	11	16,48
HAT 259-0001304	5,340	0,928	0,826	5,3	7,826
HAT 260-0001783	6,217	0,877	0,775	4,3	6,306
HAT 260-0002009	1,764	0,934	0,832	16,3	23,85
HAT 259-0009494	0,258	0,543	0,508	69	99,63
HAT 260-0001590	5,387	0,923	0,821	5,4	7,710
HAT 260-0003661	5,217	0,808	0,709	4,9	6,876
HAT 260-0003635	0,417	0,793	0,694	60	84,11
HAT 260-0002721	4,212	0,811	0,712	6,2	8,552
HAT 259-0001380	5,673	0,897	0,795	5,2	7,089
HAT 260-0002861	7,502	0,801	0,702	3,5	4,734
HAT 259-0008952	0,477	0,54	0,507	40	53,72
HAT 260-0000875	3,087	1,068	0,969	11,9	15,87
HAT 259-0001214	2,918	1,036	0,935	12,2	16,20
HAT 260-0005596	0,883	0,685	0,598	26	34,23
HAT 214-0000422	0,766	1,267	1,196	60	78,96
HAT 260-0010635	1,247	0,56	0,515	16	20,88
HAT 259-0006385	1,356	0,633	0,556	16	20,73
HAT 259-0000417	2,298	1,206	1,122	19,4	24,70
HAT 260-0005061	0,483	0,695	0,607	50	63,59
HAT 260-0001390	5,202	0,972	0,87	6,8	8,461
HAT 214-0002566	6,438	0,812	0,712	4,5	5,595
HAT 260-0005640	0,397	0,715	0,624	64	79,40
HAT 259-0001940	7,825	0,886	0,784	4,1	5,069
HAT 260-0003439	0,560	0,783	0,685	50	61,81
HAT 259-0000923	3,990	1,011	0,91	9,4	11,53
HAT 260-0012281	0,322	0,543	0,508	65	79,75
HAT 260-0000809	2,891	1,086	0,987	14,2	17,27
HAT 259-0004328	0,356	0,715	0,624	73	88,48
HAT 259-0001548	6,724	0,875	0,773	4,8	5,816
HAT 259-0000962	4,252	0,965	0,863	8,5	10,26
HAT 260-0004580	3,938	0,757	0,661	7,1	8,492
HAT 260-0006338	0,262	0,668	0,585	95	112,9
HAT 259-0001198	6,530	0,961	0,859	5,6	6,655
HAT 260-0001595	5,100	0,904	0,802	6,7	7,957
HAT 260-0001893	5,914	0,878	0,776	5,6	6,639
HAT 260-0002279	6,825	0,932	0,83	5,2	6,153
HAT 260-0001027	3,790	1,031	0,93	10,5	12,41

NOME	P	M	R	$V \sin i$	V
	<i>dias</i>	M/M_{\odot}	R/R_{\odot}	km/s	km/s
HAT 260-0003895	8,405	0,735	0,642	3,3	3,864
HAT 260-0090401	2,094	0,721	0,629	13	15,19
HAT 260-0000499	0,843	1,242	1,165	60	69,87
HAT 259-0001291	5,518	0,899	0,797	6,3	7,307
HAT 260-0004857	7,037	0,701	0,612	3,8	4,400
HAT 260-0000911	2,453	1,084	0,986	17,6	20,33
HAT 260-0001925	0,826	1,042	0,941	50	57,64
HAT 259-0001259	5,387	0,936	0,834	6,8	7,832
HAT 260-0000887	3,846	1,078	0,98	11,2	12,89
HAT 214-0001973	6,461	0,861	0,76	5,2	5,951
HAT 260-0001997	3,929	0,963	0,861	9,7	11,08
HAT 260-0001840	6,929	0,865	0,763	4,9	5,571
HAT 214-0001242	4,765	0,959	0,857	8,1	9,099
HAT 260-0014085	0,855	0,499	0,493	26	29,15
HAT 259-0010940	2,028	0,501	0,493	11	12,29
HAT 259-0001450	4,765	0,923	0,821	7,8	8,717
HAT 259-0003417	0,411	0,748	0,653	73	80,22
HAT 260-0000957	3,253	1,059	0,959	13,6	14,91
HAT 260-0003133	0,235	0,804	0,705	140	151,5
HAT 260-0009823	0,379	0,589	0,527	65	70,29
HAT 259-0001132	4,126	0,92	0,818	9,3	10,03
HAT 260-0008474	0,302	0,619	0,546	85	91,43
HAT 259-0001451	2,608	0,916	0,814	14,7	15,78
HAT 259-0002239	6,774	0,828	0,728	5,1	5,437
HAT 260-0003215	7,893	0,761	0,665	4	4,262
HAT 259-0000643	2,771	1,158	1,067	18,3	19,47
HAT 259-0004239	0,398	0,761	0,665	80	84,49
HAT 260-0000795	2,166	1,091	0,993	22	23,19
HAT 260-0006368	6,578	0,651	0,57	4,2	4,384
HAT 260-0000639	2,845	1,157	1,065	18,2	18,93
HAT 259-0006183	3,015	0,632	0,555	9	9,311
HAT 260-0001846	5,972	0,881	0,779	6,4	6,599
HAT 260-0001011	9,456	1,097	1	5,2	5,350
HAT 260-0002570	0,426	0,918	0,816	94	96,71
HAT 259-0006070	2,705	0,624	0,549	10	10,26
HAT 260-0001202	4,494	0,994	0,893	9,8	10,05
HAT 259-0001031	4,516	1,086	0,987	10,8	11,05
HAT 259-0009110	0,573	0,548	0,51	44	44,98
HAT 260-0002411	7,502	0,919	0,817	5,4	5,510
HAT 260-0001327	5,029	0,963	0,861	8,5	8,662
HAT 260-0001944	6,282	0,856	0,755	6	6,080
HAT 260-0000810	74,66	1,06	0,96	10,3	10,40
HAT 260-0002199	0,523	0,937	0,835	80	80,70

NOME	P	M	R	$V \sin i$	V
	<i>dias</i>	M/M_{\odot}	R/R_{\odot}	km/s	km/s
HAT 260-0006706	0,398	0,659	0,577	73	73,27
HAT 260-0004647	5,972	0,704	0,614	5,2	5,201
HAT 259-0000827	2,427	1,103	1,006	21	20,97
HAT 259-0000897	3,887	1,005	0,903	11,8	11,75
HAT 260-0000924	2,996	1,067	0,967	16,4	16,33
HAT 259-0000642	5,085	1,196	1,11	11,1	11,04
HAT 214-0001648	5,262	0,906	0,804	7,8	7,730
HAT 260-0015137	3,174	0,491	0,49	8	7,811
HAT 260-0007625	0,582	0,638	0,56	50	48,66
HAT 260-0002705	7,628	0,804	0,704	4,8	4,669
HAT 259-0000618	1,585	1,122	1,027	33,8	32,77
HAT 259-0004244	5,552	0,689	0,602	5,7	5,486
HAT 259-0002206	7,410	0,788	0,69	4,9	4,711
HAT 260-0007565	5,324	0,618	0,545	5,4	5,179
HAT 259-0000655	2,850	1,087	0,988	18,3	17,53
HAT 260-0009344	5,172	0,593	0,529	5,4	5,174
HAT 260-0002170	6,154	0,833	0,733	6,3	6,026
HAT 260-0001743	5,933	0,885	0,783	7	6,677
HAT 260-0005103	7,148	0,726	0,633	4,7	4,480

Referências Bibliográficas

- [1] GIBBS, J. W. *Elementary Principles in Statistical Mechanics-Developed with Especial Reference to the Rotational Foundation of Thermodynamics*, C. Scribner's Sons, New York, 1902; Yale University Press, New Haven, 1948; OX Brow Press, Woodbridger, Connecticut, 1981 [5](#)
- [2] STRUVE, O. (1950) *Stellar Evolution*, Princeton University Press, EUA. [2](#)
- [3] CHANDRASEKHAR, S.; MUNCH, G. On the Integral Equation Governing the Distribution of the True and the Apparent Rotational Velocities of Stars. *The Astrophysical Journal*, v. 111, p. 142, 1950. [viii](#), [ix](#), [2](#), [17](#), [18](#), [23](#), [34](#), [35](#)
- [4] VAN DIEN, E.(1948) *The Journal of the Royal Astronomical Society of Canada*. 42, 249. [2](#)
- [5] HUANG, S.-S.(1953) *The Astrophysical Journal*. 118, 285. [2](#)
- [6] KRAFT, R. P. (1970) *Spectroscopy Astrophysics. An Assessment of the Contributions Otto Struve*, ed. G.H. Herbig, p.385. University of California Press, Berkeley, EUA. [2](#)
- [7] DEUTSCH, A. J.(1970) *Stellar Rotation*, ed. A. Slettebak, p.207. D Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland. [2](#), [17](#), [19](#), [20](#), [22](#)
- [8] BERNACCA, P. L.(1970) *Stellar Rotation*, ed. A. Slettebak, p.227. D Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland.
- [9] ABT, H. A.(2001) *The Astronomical Journal*. 122, 2008.
- [10] TSALLIS, C., Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics. ed.1 Springer, Rio de Janeiro 2009. [2](#)
- [11] SOARES, B. B.; CARVALHO, J. C.; DO NASCIMENTO JR., J. D.; DE MEDEIROS, J. R. Tsallis maximum entropy distribution function for stellar rotational velocities in the Pleiades. *Physica A*, v. 364, p. 413, 2006. [2](#), [20](#), [22](#), [39](#)
- [12] TSALLIS, C., Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs Statistics. *Journal of Statistical Physics*, v. 52, p. 479, 1988. [7](#), [10](#)
- [13] CURADO E. M. F. & TSALLIS, C., *J. Phys. A* 24, L69 (1991) *Corrigenda: 24, 3187 (1991) and 25, 1019 (1992)*. [7](#)
- [14] TSALLIS, C., MENDES R. S., PLASTINO A. R., *Physica A* 261, 534 (1998) [7](#), [10](#)
- [15] STRUVE, O., ELVEY C. T. Algol end Stellar Rotation.. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 91, p. 663, 1931. [1](#)

- [16] FAULKNER, J., ROXBURGH, I. W., STRITTMATTER, P. A. (1968) *The Astrophysical Journal*, 151, 203. [12](#)
- [17] KOSOVICHEV, A. G., SHOU, P. H. ET AL, (1997) *Internal Structure and Rotation of the Sun*, Ed. A. G. D. Philip & D. W. Latham,, (Schenectady, New York: L. Davis Press) IAU Coll., 181, 203. [12](#)
- [18] ENDAL, A. S. & SOFIA, S. (1976), *The Astrophysical Journal*, 210, 184. [12](#)
- [19] PINSONNEAULT, M. H., KAWALER, S. D., SOFIA, S., DEMARQUE, P., (1989), *The Astrophysical Journal*, 338, 424. [12](#)
- [20] KAWALER, S. D., (1988), *The Astrophysical Journal*, 333, 236. [13](#)
- [21] SODERBLOM, D. R., PENDLETON, J., & PALLAVICINI, (1989), *Calibration of star for cross-correlation studies of stellar rotation, and an examination of the archival data Astron.J J.*, 97, 539. [13](#)
- [22] TASSOUL, J. L., (2000) *Stellar Rotation*. (Cambridge: Cambridge University Press). [13](#)
- [23] GRAY, D. F., (1992), *The Observations and Analysis of Stellar Photospheres*. (Cambridge: Cambridge University Press). [13](#)
- [24] STAUFFER, J. B. & HARTMANN, L. W. *Publication of the Astronomical Society of the Pacific*, v. 98, p. 1233, 1986. [13](#)
- [25] FUKUDA, I. A statistical study of rotational velocities of the stars. *Publication of the Astronomical Society of the Pacific*, v. 94, p. 271, 1982. [13](#), [17](#)
- [26] HUANG, S. (1965), *The Astrophysical Journal*, 141, 985. [14](#)
- [27] WILSON, O. C. (1966), *The Astrophysical Journal*, 144, 695. [14](#)
- [28] SCHATZMAN, E. 1962 *Annales d'Astrophysique* 25, 18. [14](#)
- [29] COLLIER CAMERON, A. & ROBINSON, R. D., (1989) *Royal Astronomical Society*, 236, 57. [14](#)
- [30] MESTEL, L., (1968) *Royal Astronomical Society*, 138, 359. [14](#)
- [31] KRAFT, R. P., (1967) *The Astrophysical Journal*, 150, 551. [15](#)
- [32] QUELOZ, D. *et al.* The rotational velocity of low-mass stars in the Pleiades cluster. *Astronomy and Astrophysics*, v. 335, p. 183, 1998. [xii](#), [22](#), [28](#), [38](#)
- [33] SOARES, B. B. & SILVA, J. R. P. Moments of the generalized distribution for stellar rotation rates. *A Letters Journal Exploring the Frontiers of Physics*, 101, (2013) 29001. [viii](#), [ix](#), [2](#), [3](#), [17](#), [22](#), [23](#), [30](#), [33](#), [39](#)
- [34] BROWN, A. The Rotational Velocities of Groups of Stars, as Determined from the Apparent Rotational Velocities. *The Astrophysical Journal*, v. 111, p. 366, 1950. [17](#)

- [35] GAIGÉ, Y. Stellar rotational velocities from the $V \sin i$ observations - Inversion procedures and applications to open clusters. *Astronomy and Astrophysics*, v. 269, p. 267, 1993. [17](#)
- [36] TSALLIS, C., *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics Approaching a Complex World*. (Springer, New York, 2009). [24](#)
- [37] SOARES, B. B.; SILVA, J. R. P. On the rotation of ONC stars in the Tsallis formalism context *Europhysics Letters*, v. 96, p. 19001, 2011. [23](#), [35](#)
- [38] DAVIS, P. J., *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. (National Bureau of Standards, USA) 1972, p.258. [25](#)
- [39] HARTMAN, J. D.; BAKOS, G. Á.; KOVÁCS, G.; NOYES, R. W., *A Large Sample of Photometric Rotation Periods for FGK Pleiades Stars*, *Astronomy and Astrophysics* 122 (2001) 3258. [viii](#), [ix](#), [28](#)
- [40] STAUFFER, J. R., SCHILD, R. A., BALIUNAS, S. L., AFRICANO, J. L. *Publication of the Astronomical Society of the Pacific*, 99, 471. [xii](#), [28](#), [38](#)
- [41] SODERBLUM, D. R., STAUFFER, J. R., HUDON, J. D., JONES, B. F. *The Astrophysical Journal*, 85, 315 (1993) [xii](#), [28](#), [38](#)
- [42] TERNDRUP, D. M., STAUFFER, J. R., PINSONNEAULT, M. H., SILLS, A., YUAN, Y., JONES, B. F., FISCHER, D., KRISHNAMURTHI, A., *The Astronomical Journal*, 119, 1303 (2000) [xii](#), [28](#), [38](#)
- [43] CARVALHO, J. C.; DO NASCIMENTO JR, J. D.; SILVA, R.; DE MEDEIROS, J. R. Non-Gaussian Statistics and Stellar Rotational Velocities of Main-Sequence Field Stars. *The Astrophysical Journal*, v. 696, p. 48, 2009.
- [44] CARVALHO, J. C.; SILVA, R.; SOARES, B. B.; DE MEDEIROS, J. R. Observational measurement of open stellar clusters: A test of Kaniadakis and Tsallis statistics. *Europhysics Letters*, v. 91, p. 69002, 2010.
- [45] CARVALHO, J. C.; SILVA, R.; DO NASCIMENTO JR, J. D.; DE MEDEIROS, J. R. Power law statistics and stellar rotational velocities in the Pleiades. *Europhysics Letters*, v. 84, p. 59001, 2008.
- [46] WOLFF, S. C., EDWARDS, S., PRESTON, G. W.. *The Astrophysical Journal*, 252, 322 (1982) [31](#)
- [47] BOUVIER, J.; FORESTINI, M.; ALLAIN, S. The angular momentum evolution of low-mass stars. *Astronomy and Astrophysics*, v. 326, p. 1023, 1997. [30](#)
- [48] SCOTT, DAVID W. *Em histogramas ótimos e baseados em dados*. *Biometrika* (1979),66 (3):. 605-610. [34](#)