



Universidade do Estado do Rio Grande do Norte
Faculdade de Ciências Exatas e Naturais-FANAT
Departamento de Física
Programa de Pós-Graduação em Física

Cornélio Rodrigues Filho

**Obtenção da Evolução Temporal de Parâmetros
Cosmográficos a Partir de Dados Observacionais**

Mossoró-RN

2016

Cornélio Rodrigues Filho

**Obtenção da Evolução Temporal de Parâmetros
Cosmográficos a Partir de Dados Observacionais**

Dissertação apresentada ao programa de Pós-graduação em Física da Universidade do Estado do Rio Grande do Norte como parte dos requisitos para obtenção do título de MESTRE EM FÍSICA

Orientador: Prof. Dr. Edésio Miguel Barboza Júnior

Mossoró-RN

2016

**Catálogo da Publicação na Fonte.
Universidade do Estado do Rio Grande do Norte.**

Rodrigues Filho, Cornélio

Obtenção da evolução temporal de parâmetros cosmográficos a partir de dados observacionais/ Cornélio Rodrigues Filho. - Mossoró, RN, 2016.

40 p.

Orientador(a): Prof. Dr. Edésio Miguel Barboza Júnior

Dissertação (Mestrado em Física). Universidade do Estado do Rio Grande do Norte. Programa de Pós-Graduação Física.

1. Cosmografia. 2. Aceleração Cósmica. 3. Análise Estatística.
I. Barbosa Júnior, Edésio Miguel. II. Universidade do Estado do Rio Grande do Norte. III. Título.

UERN/BC

CDD 523.1

Cornélio Rodrigues Filho

**Obtenção da Evolução Temporal de Parâmetros
Cosmográficos a Partir de Dados Observacionais**

Dissertação apresentada ao programa de Pós-
graduação em Física da Universidade do Estado
do Rio Grande do Norte como parte dos requisitos
para obtenção do título de MESTRE EM FÍSICA

Banca Examinadora

Prof. Dr. Edésio Miguel Barboza Júnior

Orientador

UERN

Prof. Dr. Hivalyn Theodory Clemente Mattos Souza

Examinador externo

UFRN

Profa. Dra. Maria Aldinez Dantas

Examinador interno

UERN

Para Mona Lisa e meus Pais.

Agradecimentos

- À minha amada esposa, Mona Lisa Pinheiro, pelo carinho, dedicação, paciência e amor a mim dedicado desde minha graduação;
- Aos meus pais, Cornélio Sobrinho e Francisca Moreira (Bia) pelo esforço, dedicação e conselhos sempre visando o melhor para mim;
- Ao meu irmão Gabriel e às minhas tias Maria (Baia) e Elizabete pelo apoio e incentivo;
- Ao meu orientador, prof. Dr. Edésio M. Barboza Jr., por todas as nossas conversas enriquecedoras no decorrer do desenvolvimento deste trabalho e pela compreensão demonstrada durante esse percurso;
- Ao Programa de Pós Graduação em Física da UERN e a todos os professores e funcionários que o fazem. Em especial para a profa. Dra. Maria Aldinez Dantas pelo apoio dado no início desta caminhada;
- Aos meus grandes amigos Anderson Gomes, Daniel Nobre e Pedro Igor pelo companheirismo e pelas boas conversas;
- Aos amigos que ganhei no decorrer desta caminhada: Marccone Oliveira, Issac Macedo e Hissa Medeiros por todas as horas de estudo que tivemos juntos e pelas ótimas conversas. Aos demais companheiros de mestrado em especial a Ricardo, Meirielle, João Batista e João Neto;
- À CAPES pelo suporte financeiro.

Resumo

Nesta dissertação utilizamos a Cosmografia, uma abordagem cinemática que independe de modelo e assume apenas a validade do princípio cosmológico, para obtermos estimativas da evolução temporal dos parâmetros H , q , j e s a partir dos dados observacionais de supernovas do Tipo Ia (SNs Ia) e $H(z)$. Para tal, realizamos uma expansão de Taylor do parâmetro de Hubble e da distância luminosidade no fator de escala para um centro de expansão arbitrário, \tilde{a} . O fato do centro de expansão ser variável permite cobrir largos intervalos de *redshifts*, diferentemente da abordagem usual em que o centro de expansão é mantido em $z = 0$. Para os dados observacionais empregados nesta dissertação, \tilde{a} cobre os seguintes intervalos: $0,41 \lesssim \tilde{a} \leq 1,0$ ($0,0 \leq \tilde{z} \leq 1,4$) para SNs Ia e $0,33 \lesssim \tilde{a} \leq 1,0$ ($0,0 \leq z \leq 2,0$) para $H(z)$. Os resultados obtidos indicam a existência de tensões entre os dados de SN Ia e $H(z)$ para altos- z .

Palavras Chaves: Cosmografia - Aceleração Cósmica - Análise Estatística

Abstract

In this report, we obtain the time dependence of the cosmographic parameters H , q , j and s from $H(z)$ and SNe Ia data by expanding the Hubble parameter and the luminosity distance around an arbitrary scale factor \tilde{a} . Contrary to the standard approach whose expansion center is kept at $z = 0$ a variable expansion center allows us to cover larger redshifts ranges. Here, $0,41 \lesssim \tilde{a} \leq 1,0$ ($0,0 \leq \tilde{z} \leq 1,4$) for SNe Ia data and $0,33 \lesssim \tilde{a} \leq 1,0$ ($0,0 \leq z \leq 2,0$) for $H(z)$. Since cosmography relies only on cosmological principle assumption, this approach provides a model independent way to search for deviations of the Λ CDM model. The results obtained from SNe Ia data are compatible with the Λ CDM model and have the expected behaviour for high z . On the other hand, the results obtained from $H(z)$ data are incompatible with the Λ CDM model and do not display the expected profile at high redshifts. These conflicting results reveal a tension between SNe Ia and $H(z)$ data sets at high- z .

Keywords: Cosmography - Cosmic Acceleration - Statistical Analysis

Notações e Convenções

- Índices gregos variam de 0 a 3 e latinos de 1 a 3;
- Salvo algumas exceções, o sistema de unidades utilizados é tal que a velocidade da luz no vácuo seja $c = 1$;
- A métrica possui a seguinte assinatura $(+, -, -, -)$;
- Expressões em outros idiomas estão escritas em *italico*;
- Grandezas que estejam acompanhada do subíndice 0, são avaliadas na presente época;
- Derivadas covariantes são representadas por ponto e virgula (;). Para um tensor qualquer teremos

$$T_{\lambda\dots;\nu}^{\kappa\dots} = \frac{\partial T_{\lambda\dots}^{\kappa\dots}}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} T_{\lambda\dots}^{\mu\dots} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} T_{\mu\dots}^{\kappa\dots} - \dots;$$

- A derivada temporal é representada pelo ponto ($\dot{}$).

Informação Eletrônica

As principais referências encontradas nesta dissertação, podem ser encontradas no seguinte sítio:

- www.arxiv.org

Sumário

Lista de Tabelas	i
Lista de Figuras	ii
1 Introdução	1
2 Cosmologia Relativística	4
2.1 Breve Revisão da Teoria da Relatividade Geral	4
2.2 Geometria do Espaço-Tempo	6
2.2.1 Métrica de Robertson-Walker	6
2.2.2 O Desvio Para Vermelho Cosmológico (<i>Redshift</i>)	7
2.2.3 Distância Própria	8
2.2.4 Distância Luminosidade	8
2.2.5 Distância Diâmetro Angular	9
2.3 Dinâmica do Universo	10
2.4 Modelo Λ CDM	12
3 Evidências Observacionais da Expansão Acelerada do Universo	14
3.1 Radiação Cósmica de Fundo	14
3.2 Supernovas do Tipo Ia	16
3.3 Oscilações Acústicas da Matéria Bariônica	19
3.4 Idades Diferenciais de Galáxias	21
4 Expansões Cosmográficas e Análise Estatística	24
4.1 Expansão em <i>redshifts</i>	24

4.1.1	Expansão de $H(z)$	24
4.1.2	Expansão de $d_L(z)$	25
4.1.3	Problemas de Convergência e Truncamento	26
4.2	Expansão via Fator de Escala	26
4.2.1	Expansão de $H(a)$	27
4.2.2	Expansão de $d_L(a)$	27
4.3	Análise Estatística	28
4.4	Resultados e Discussões	28
5	Conclusões	35
	Referências Bibliográficas	37

Lista de Tabelas

3.1	Valores Observacionais de $H(z)$ fornecidos na literatura para o método de BAO radial.	21
3.2	Valores Observacionais de $H(z)$ fornecidos na literatura para o método das idades diferenciais de galáxias.	23
4.1	Estimativas dos parâmetros cosmográficos H , q , j e s obtidos a partir dos dados de SNs Ia da amostra Union 2.1.	29
4.2	Estimativas dos parâmetros cosmográficos H , q , j e s obtidos a partir dos dados de $H(z)$	31

Lista de Figuras

2.1	Evolução da densidade de energia da radiação, matéria e energia escura.	11
3.1	Espectro de potências da temperatura da RCF fornecidos pelo PLANCK.	17
3.2	O painel superior mostra o diagrama de Hubble para a amostra de SNs Ia para baixos e altos <i>redshifts</i> . O painel inferior mostra a diferença entre os dados e os modelos com $\Omega_M = 0,20$ e $\Omega_\Lambda = 0,0$	19
3.3	Pico Acústico Bariônico fornecido pelo SDSS.	20
4.1	Evolução temporal dos parâmetros H (A), q (B), j (C) e s (D) para à análise estatística de dados de SNs Ia.	30
4.2	Evolução temporal dos parâmetros H (A), q (B), j (C) e s (D) para à análise estatística de dados de $H(z)$	32
4.3	Resultados de maior confiança para os parâmetros cosmológicos H (A), q (B), j (C) e s (D) para os dados de SNs Ia ($z = 0,7$), linha vermelha, e dados de $H(z)$ ($z = 1,0$), linha azul.	34

Capítulo 1

Introdução

Desde os primórdios da humanidade o ser humano busca entender e explicar o que ocorre em sua volta. A Cosmologia surge desse interesse humano em compreender o Universo. É na Grécia antiga que a Cosmologia começa a tomar forma através dos filósofos. Nesse período surge o modelo Geocêntrico de Cláudio Ptolomeu, o qual perdurou por vários séculos, em parte devido à sua capacidade de fornecer resultados corretos e em parte devido as convicções religiosas da época. Foi somente no século XVI que a Cosmologia iniciou um período de grandes mudanças com a difusão do modelo Heliocêntrico de Nicolau Copérnico, o qual era defendido por Galileu Galilei.

No século XVII Issac Newton condensa todo o conhecimento astronômico adquirido através dos séculos em sua lei da Gravitação Universal, colocando a Cosmologia, que até então possuía um caráter puramente filosófico, em bases matemáticas sólidas. Apesar de sua eficácia em descrever e prever fenômenos dentro e fora do sistema solar, a Cosmologia Newtoniana ainda apresentava falhas em descrever certos fenômenos como, por exemplo a precessão do periélio de Mercúrio. Em 1905 Albert Einstein publicou um conjunto de artigos que revolucionou a Física. Dentre eles o artigo intitulado *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* (Sobre a Eletrodinâmica dos corpos em movimento)[1] onde apresenta a Teoria da Relatividade Restrita (TRR) a qual é baseada em dois postulados, cujos enunciados são:

P1. As leis da Física são as mesmas em todos os referencias inerciais;

P2. A velocidade da luz no vácuo é constante em qualquer referencial inercial.

Os postulados da TRR contrariam a noção de espaço e tempo absolutos da mecânica Newtoniana implicando em modificações da mesma, mas mantendo a Teoria Eletromagnética

de Maxwell intacta. Einstein então começou a buscar uma generalização de sua teoria que incluísse referenciais não-inerciais, obtendo em 1915 uma nova teoria de gravitação, a Teoria da Relatividade Geral (TRG)[2].

A primeira aplicação da TRG em Cosmologia foi feita pelo próprio Einstein em 1917[3] para um Universo homogêneo e isotrópico contendo apenas matéria. Embora Einstein acreditasse que o Universo era estático, as equações obtidas pelo seu modelo eram dinâmicas, o que o levou a introduzir uma constante em suas equações de campo para contrabalançar a ação atrativa da gravidade produzindo um Universo estático. Esta constante é conhecida como constante cosmológica Λ . Também em 1917 W. de Sitter[4] publicou um artigo resolvendo as equações de campo da TRG para o espaço vazio com a presença da constante cosmológica obtendo uma solução na qual o Universo se expande. Entre os anos de 1922 e 1924, A. Friedmann obteve uma solução que combinava o Universo estático de Einstein com o Universo expansionário de de Sitter sem a presença da constante cosmológica. Em 1929 E. Hubble [5] publicou dados observacionais que indicavam que o Universo encontrava-se em expansão, fortalecendo desta forma o modelo de Friedmann e fazendo assim com que a constante cosmológica fosse, naquele momento, abandonada.

O fato do Universo estar em expansão acabou levando a questionamentos sobre suas origens, pois, retrocedendo suficientemente no tempo chegaríamos numa época em que o Universo era extremamente quente, denso e compacto. A teoria do Big Bang, como ficou conhecida, é amplamente aceita pela comunidade científica e possui fortes evidências observacionais. A principal delas é a Radiação Cósmica de Fundo (RCF), uma relíquia do Universo primordial, descoberta por A. Penzias e R. Wilson em 1965 [6].

Observações recentes de SNs Ia realizadas independentemente por A. Reiss[7] e S. Perlmutter[8] indicam que o Universo passa atualmente por uma fase de expansão acelerada. A explicação teórica mais simples para esta fase de expansão acelerada é obtida pela reintrodução da constante cosmológica nas equações de campo da TRG. Entretanto, como veremos no capítulo 2, a constante cosmológica apresenta uma enorme divergência entre teoria e observação. O problema da constante cosmológica tem motivado a comunidade científica a buscar novos caminhos para descrever a presente fase de expansão acelerada do Universo.

Dentre as alternativas encontradas atualmente, a Cosmografia [9, 10, 11, 12, 13] perfila-se como uma das abordagens mais promissoras para obter informações sobre a evolução do Universo. Esta abordagem cinemática baseia-se apenas no Princípio Cosmológico e, portanto, não requer qualquer conhecimento das fontes ou da teoria de gravidade subjacente. Nesta dissertação utilizaremos os dados de SNs Ia e de $H(z)$ para restringir os parâmetros cosmográficos H , q , j e s em diferentes *redshifts* seguindo a técnica desenvolvida em [9] por Barboza e Cabral.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: No capítulo 2, fazemos uma revisão sobre Cosmologia Relativística. Apresentamos no Capítulo 3, as principais evidências observacionais da expansão acelerada. No capítulo 4, desenvolvemos as expansões cosmográficas e apresentamos os resultados obtidos a partir dos dados de distância de SNs Ia e dados de $H(z)$. Por fim, no capítulo 5, apresentamos nossas conclusões.

Capítulo 2

Cosmologia Relativística

Após publicar o seu trabalho sobre Relatividade Restrita no ano de 1905, Albert Einstein começou a buscar uma generalização para sua teoria que incluísse referenciais não-inerciais. O *princípio da equivalência*, o qual estabelece que não existe um experimento local que permita a um observador num referencial local distinguir um campo gravitacional de um referencial acelerado, teve um papel fundamental no desenvolvimento da Teoria da Relatividade Geral. A TRG é uma teoria gravitacional que relaciona os campos de matéria com a geometria do espaço-tempo.

2.1 Breve Revisão da Teoria da Relatividade Geral

A geometria Riemanniana é a estrutura matemática da TRG. Considere uma partícula em queda livre num campo gravitacional. Denotando suas coordenadas por ξ^α e escolhendo um sistema localmente inercial, a equação que descreve o movimento dessa partícula é [14]:

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0, \quad (2.1)$$

onde τ é o tempo próprio definido por $d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta}d\xi^\alpha d\xi^\beta$ sendo $\eta_{\alpha\beta}$ a métrica de Minkowski. Pela regra da cadeia, num sistema de coordenadas x^μ (2.1) torna-se:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = 0$$

, ou ainda,

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (2.2)$$

onde

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\mu}} \quad (2.3)$$

são os símbolos de Christoffel de segunda espécie.

Como o tempo próprio é invariante sob transformações de coordenadas, temos que ele também pode ser expresso em termos das coordenadas x^{μ} , ou seja,

$$d\tau^2 \equiv \eta_{\alpha\beta} d\xi^{\alpha} d\xi^{\beta} \equiv \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} dx^{\mu} dx^{\nu} \equiv g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu},$$

onde

$$g_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \eta_{\alpha\beta} \quad (2.4)$$

é o tensor métrico. Derivando o tensor métrico em relação a x^{λ} e usando (2.3), temos:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} = \Gamma_{\lambda\mu}^{\rho} g_{\nu\rho} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\rho} g_{\mu\rho}. \quad (2.5)$$

Permutando ciclicamente os índices μ , ν e λ é fácil mostrar que

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} = 2\Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} g_{\nu\rho}.$$

Multiplicando ambos os lados desta equação por $\frac{1}{2}g^{\alpha\nu}$ e usando o fato que $g_{\nu\rho}g^{\alpha\nu} = \delta_{\rho}^{\alpha}$ obtemos

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\nu} \left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} \right). \quad (2.6)$$

A partir da transformação do símbolo de Christoffel é possível obter o tensor de Riemman-Christoffel [14], definido por:

$$R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} \equiv \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \Gamma_{\kappa\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda}. \quad (2.7)$$

O tensor de Riemman-Christoffel é um tensor antissimétrico para permutações ímpares dos seus índices e simétrico para permutações pares dos seus índices, satisfazendo a relação de ciclicidade

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\kappa\nu\mu} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} = 0, \quad (2.8)$$

e a identidade de Bianchi[14, 15]

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} + R_{\lambda\mu\eta\nu;\kappa} + R_{\lambda\mu\kappa\eta;\nu} = 0. \quad (2.9)$$

Definindo o tensor de Ricci e o escalar de curvatura como $R_{\mu\kappa} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ e $R = R_{\mu}^{\mu} = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa}$, respectivamente, a identidade de Bianchi implica em

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right)_{;\mu} = G^{\mu\nu}_{;\mu} = 0,$$

onde

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (2.10)$$

é o tensor de Einstein. As equações de campo da relatividade geral ou equações de Einstein são dadas por:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (2.11)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento da fonte que produz o campo gravitacional e G é a constante gravitacional de Newton. Para um fluido perfeito, o tensor de energia-momento é dado por:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_{\mu} u_{\nu} - g_{\mu\nu} p, \quad (2.12)$$

onde ρ é a densidade do fluido, p é a pressão e u_{μ} é a quadrivelocidade das partículas do fluido dado por $w^{\mu} = dx^{\mu}/d\tau$.

Visto que o tensor de Einstein satisfaz a identidade de Bianchi, as equações de campo da TRG implicam que $T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$, i.e., energia e momento se conservam. Outra consequência da identidade de Bianchi é que o tensor de Einstein é definido a menos de um termo proporcional ao tensor métrico, uma vez que $g^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$. Com esse termo adicional, as equações de Einstein tornam-se:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (2.13)$$

onde Λ é a constante cosmológica.

2.2 Geometria do Espaço-Tempo

2.2.1 Métrica de Robertson-Walker

A métrica mais geral que satisfaz o Princípio Cosmológico, o qual estabelece que para grandes escalas (distâncias superiores a 100 Mpc) o Universo é homogêneo e isotrópico, é a métrica de Robertson-Walker (RW) dada por:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (2.14)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala do Universo e $k = +1, 0$ e -1 é a constante de curvatura. Se $k = -1$, o Universo é espacialmente hiperbólico e aberto, se $k = 0$, o Universo é espacialmente plano e se $k = +1$, o Universo é espacialmente esférico e fechado.

2.2.2 O Desvio Para Vermelho Cosmológico (*Redshift*)

Considere a emissão de um fóton por uma galáxia situada em (r, θ, ϕ) chegando até nós em $(r = 0, \theta, \phi)$ ¹. Como a luz percorre geodésicas nulas e r decresce à medida em que t cresce, obtemos de (2.14) que

$$\int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = - \int_r^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = S_k(r), \quad (2.15)$$

onde

$$S_k(r) = \begin{cases} \sin^{-1}(\sqrt{k}r/\sqrt{k}) & \text{para } k > 0 \\ r & \text{para } k = 0 \\ \sinh^{-1}(\sqrt{|k|}r/\sqrt{|k|}) & \text{para } k < 0 \end{cases}. \quad (2.16)$$

Se a galáxia emite dois fótons sucessivamente, nos instantes t e $t + \delta t$, o segundo fóton será observado em $r = 0$ no instante $t_0 + \delta t_0$ de forma que

$$S_k(r) = \int_{t+\delta t}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.17)$$

Após uma manipulação simples dessas integrais, obtemos:

$$\int_{t_0}^{\delta t_0+t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_t^{\delta t+t} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.18)$$

Supondo que δt e δt_0 não sejam intervalos grandes o suficiente para que $a(t)$ sofra variações significativas, temos que

$$\frac{\delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\delta t}{a(t)}. \quad (2.19)$$

Portanto,

$$\frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{em}} = \frac{\delta t_0}{\delta t} = \frac{a(t_0)}{a(t)} = 1 + z, \quad (2.20)$$

¹Nos situamos em $r = 0$, que de acordo com o princípio cosmológico, é uma mera convenção.

onde λ_{obs} é o comprimento de onda observado, λ_{em} é o comprimento de onda emitido pelas galáxias e z um parâmetro definido por

$$z \equiv \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}. \quad (2.21)$$

Quando $\lambda_{em} > \lambda_{obs}$ temos $z < 0$, i.e, as galáxias estão se aproximando do observador, implicando num Universo em contração. Este fenômeno é conhecido como o desvio para o azul (*blueshift*). Para $\lambda_{obs} > \lambda_{em}$ temos $z > 0$, de forma que as galáxias se afastam do observador, implicando num Universo em expansão. Este fenômeno é conhecido como o desvio para o vermelho (*redshift*).

2.2.3 Distância Própria

A distância própria, d_P , é definida como o comprimento da geodésica espacial entre dois pontos mantendo o fator de escala fixo num dado instante t [16], i.e,

$$d_p(t) = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = a(t)S_k(r). \quad (2.22)$$

2.2.4 Distância Luminosidade

O fluxo, energia por unidade de tempo e de área, através da superfície de uma fonte de luz isotrópica e simetricamente esférica é dado por

$$f = \frac{L}{4\pi d^2}, \quad (2.23)$$

onde L é a luminosidade, energia por unidade de tempo, e $4\pi d^2$ é a área da fonte. Num Universo descrito pela métrica de RW, a área da seção espacial num dado instante t_0 é $4\pi a_0^2 r^2$ de forma que o fluxo observado em t_0 é dado por

$$f = \frac{L_0}{4\pi a_0^2 r^2}, \quad (2.24)$$

onde L_0 é a luminosidade observada em t_0 . Por definição, a luminosidade da fonte no instante t em que a radiação deixa sua superfície é dada por:

$$L = \frac{\delta E}{\delta t}. \quad (2.25)$$

Por sua vez, a luminosidade observada em t_0 é

$$L_0 = \frac{\delta E_0}{\delta t_0}. \quad (2.26)$$

Tomando a razão entre (2.25) e (2.26), encontramos

$$L_0 = \frac{\delta E_0}{\delta E} \frac{\delta t}{\delta t_0} L. \quad (2.27)$$

Visto que $\delta E = h\nu$, temos que $\delta E_0/\delta E = \nu_0/\nu = \lambda/\lambda_0 = \delta t/\delta t_0 = (1+z)^{-1}$. Portanto,

$$L_0 = \frac{L}{(1+z)^2}. \quad (2.28)$$

Substituindo (2.28) em (2.24) obtemos

$$f = \frac{L}{4\pi(1+z)^2 a_0^2 r^2} = \frac{L}{4\pi d_L^2}, \quad (2.29)$$

onde

$$d_L \equiv (1+z)a_0 r. \quad (2.30)$$

é a distância luminosidade. Para baixos *redshifts*, é fácil mostrar que

$$z \approx H_0 d_L, \quad (2.31)$$

que é a Lei de Hubble, $z = v$ é a velocidade de recessão das galáxias e $H_0 \equiv \dot{a}(t_0)/a(t_0) = 67,48 \pm 0,98 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{Mpc}^{-1}$ [17] é o parâmetro de Hubble o qual mede a taxa de expansão do Universo.

2.2.5 Distância Diâmetro Angular

O elemento de arco subtendido por um objeto astronômico com extremos em (r, θ_1, ϕ) e (r, θ_2, ϕ) perpendicular a linha visada de um observador em $(0, 0, 0)$ é dado de acordo com a métrica de Robertson-Walker por

$$ds = a(t)r d\theta = d_A d\theta, \quad (2.32)$$

onde

$$d_A \equiv a(t)r = a_0(1+z)^{-1}r \quad (2.33)$$

é a distância diâmetro angular a qual está relacionada com a distância luminosidade por

$$d_A = \frac{d_L}{(1+z)^2}. \quad (2.34)$$

2.3 Dinâmica do Universo

Para um Universo homogêneo e isotrópico preenchido por fluidos perfeitos, as equações de campo da TRG, sem o termo cosmológico, fornecem:

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2} \quad (2.35)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \quad (2.36)$$

As equações acima são conhecidas, respectivamente, como equação de Friedmann e equação da aceleração. Nas equações acima, $\rho = \sum_i \rho_i$ e $p = \sum_i p_i$ são, respectivamente, a densidade de energia total e a pressão total dos fluidos que permeiam o Universo.

Combinando as equações acima obtemos a equação de continuidade,

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0, \quad (2.37)$$

a qual pode ser resolvida especificando uma equação de estado que relacione a pressão com a densidade. Em cosmologia é comum supor que p esteja linearmente relacionado com ρ , ou seja,

$$p = \omega\rho, \quad (2.38)$$

onde ω é um parâmetro que pode depender do tempo. Substituindo (2.38) em (2.37) obtemos:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3} \exp\left[-\int_{a_0}^a 3\frac{\omega(a')}{a'} da'\right]. \quad (2.39)$$

Particularmente, se $\omega = cte$, temos por (2.39) que

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+\omega)}. \quad (2.40)$$

Podemos destacar três cenários onde ω é constante: matéria ($\omega = 0$), radiação ($\omega = 1/3$) e constante cosmológica (*ou vácuo quântico*) ($\omega = -1$). O comportamento de ρ para estes três casos é, respectivamente,

$$\rho_m = \rho_{m,0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3}, \quad (2.41)$$

$$\rho_\gamma = \rho_{\gamma,0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4} \quad (2.42)$$

e

$$\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda,0}. \quad (2.43)$$

O fato da densidade de energia variar de forma diferente para cada componente, revela que o Universo é dividido por eras. Na Era da Radiação, $\rho \propto a^{-4}$, o Universo era extremamente quente e denso e os fótons estavam fortemente acoplados à matéria. O fim da Era da Radiação ocorre quando o Universo começa a esfriar, os fótons se desacoplam da matéria, dando início a Era da Matéria, $\rho \propto a^{-3}$. À medida que o Universo se expande, a densidade de energia do vácuo quântico torna-se maior que a densidade de energia da matéria, de modo que começa a dominar o conteúdo energético do Universo dando origem a Era da Constante Cosmológica. A Figura 2.1 mostra a evolução da densidade de energia dos diferentes componentes do fluido cósmico indicando a era em que cada um domina o conteúdo energético do Universo.

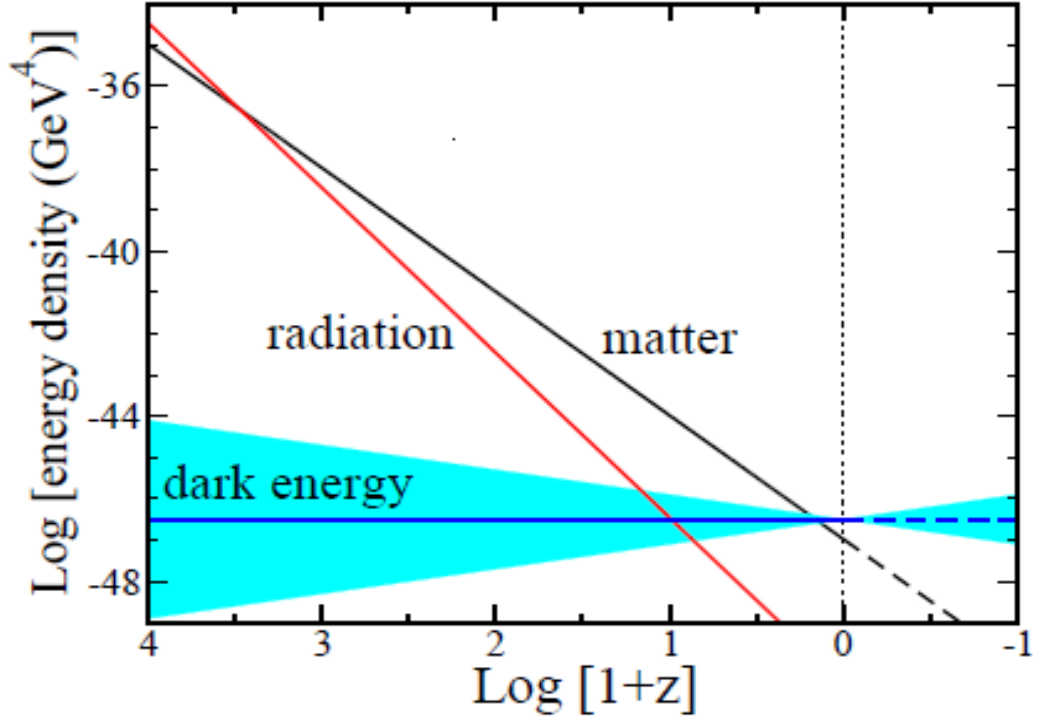


Figura 2.1: Evolução da densidade de energia da radiação, matéria e energia escura. Para a energia escura, foi utilizado $\omega = -1,0 \pm 0,2$. Figura retirada de [18].

Definindo a densidade crítica do Universo por

$$\rho_{c,0} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G}, \quad (2.44)$$

a equação de Friedmann (2.35) pode ser escrita como

$$\left[\frac{H(t)}{H_0} \right]^2 = \sum_{i=1}^3 \Omega_{i,0} a^{-3(1+\omega_i)} + \Omega_{k,0} a^{-2} \quad (2.45)$$

onde $\Omega_{i,0} = \rho_{i,0}/\rho_{c,0}$ é o parâmetro densidade do i -ésimo componente do Universo e $\Omega_{k,0} = -k/a_0^2 H_0^2$ é o parâmetro de curvatura. Os parâmetros de densidade e curvatura estão relacionados pela condição de normalização,

$$\sum_{i=1}^3 \Omega_{i,0} + \Omega_{k,0} = \Omega_{m,0} + \Omega_{\gamma,0} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0} = 1. \quad (2.46)$$

Reorganizando (2.45), temos:

$$\int_0^a \frac{da}{\sqrt{\Omega_{k,0} + \Omega_{m,0} a^{-1} + \Omega_{\gamma,0} a^{-2} + \Omega_{\Lambda,0} a^2}} = H_0 t, \quad (2.47)$$

ou, para Universo espacialmente plano, $\Omega_{k,0} = 0$,

$$\int_0^a \frac{da}{\sqrt{\Omega_{m,0} a^{-1} + \Omega_{\gamma,0} a^{-2} + \Omega_{\Lambda,0} a^2}} = H_0 t. \quad (2.48)$$

Resolvendo a equação acima para as diferentes eras obtemos que $a(t) \propto t^{1/2}$ para era da radiação, $a(t) \propto t^{2/3}$ para era da matéria e $a(t) \propto e^{\Lambda t}$ para era da constante cosmológica.

2.4 Modelo Λ CDM

Dados observacionais recentes, indicam que o Universo passa por uma fase de expansão acelerada [7, 8]. A explicação teórica mais simples para essa fase de aceleração é dada pela introdução da constante cosmológica nas equações de Einstein. Na presença de uma constante cosmológica, a equação de Friedmann e a equação da aceleração tornam-se:

$$H^2 = \frac{8\pi G \rho}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.49)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.50)$$

Einstein acreditava que o Universo era estático, e por isso introduziu a constante cosmológica em suas equações. Visto que para um Universo estático $\ddot{a} = \dot{a} = p = 0$, as equações acima implicam que

$$\rho = \frac{\Lambda}{4\pi G} \quad (2.51)$$

e

$$\Lambda = \frac{k}{a^2}. \quad (2.52)$$

O valor da densidade de energia associada a Λ obtido dos dados observacionais mais recentes é [19]

$$\rho_\Lambda \approx 10^{-47} GeV^4. \quad (2.53)$$

Do ponto de vista da física de partículas, a constante cosmológica é interpretada como a *densidade de energia do vácuo quântico*. Uma vez que a energia de ponto zero para um campo de massa m com momentum k e frequência ω é dada por $E = \omega/2 = \sqrt{k^2 + m^2}/2$, somando as energias de ponto zero desse campo até uma escala de corte $k_{max} \gg m$, podemos obter a *densidade de energia de vácuo*

$$\rho_{vac} = \frac{1}{2} \int_0^{k_{max}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{k^2 + m^2}. \quad (2.54)$$

Visto que $k \gg m$,

$$\rho_{vac} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{k_{max}} k^2 \sqrt{k^2 + m^2} dk \approx \frac{k_{max}^4}{16\pi^2}. \quad (2.55)$$

Para a TRG acredita-se que a escala de corte seja a escala de Planck, i.e, $k_{max} = m_{plank} \sim 10^{74} m_{pl}$, de forma que

$$\rho_{vac} \approx 10^{74} GeV^4. \quad (2.56)$$

Este valor é 10^{121} vezes o valor observado (2.53), o que mostra uma grande discrepância entre o valor obtido dos dados cosmológicos e o valor teórico estimado a partir da teoria quântica de campos. Para a Cromodinâmica Quântica a escala de corte é $k_{max} \approx 0.1 GeV$, o que leva a $\rho_{vac} \approx 10^{-3} GeV^4$, i.e, 10^{44} vezes maior que o valor observado. Esta grande discrepância entre teoria e observação tem estimulado os físicos a buscar outras formas de explicar a presente fase de aceleração cósmica, entre as quais podemos citar: parametrizações de $\omega(a)$ [20, 21, 22] teorias de gravidade modificadas [23, 24] e expansões cosmográficas, a qual será abordada no capítulo 4, desta dissertação.

Capítulo 3

Evidências Observacionais da Expansão Acelerada do Universo

3.1 Radiação Cósmica de Fundo

A Radiação Cósmica de Fundo (RCF), descoberta por A. Penzias e R. Wilson em 1965 [6], é a principal evidência observacional da Teoria do Big Bang, a qual supõe que o Universo primordial era extremamente quente e denso, com toda matéria ionizada e fortemente acoplada a radiação. Nesse período, radiação e matéria se encontravam em equilíbrio térmico devido às rápidas colisões entre os elétrons livres e os fótons [25], mantendo o Universo opaco com um espectro de corpo negro.

Na medida em que o Universo expande e, conseqüentemente, esfria, radiação e matéria se desacoplam dando início à era da matéria. Os fótons começam a se propagar livremente e o Universo deixa de ser opaco e torna-se transparente à radiação, preservando, no entanto, o espectro de corpo negro. As primeiras medidas feitas com boa precisão da RCF foram obtidas pelo satélite *Cosmic Microwave Background Explorer* (COBE), comprovando que o espectro da RCF é perfeitamente compatível com o espectro de um corpo negro, com temperatura [16]

$$T_0 = 2,725 \pm 0,001K.$$

Para um corpo negro, a densidade de energia dos fótons com frequências entre ν e $\nu + d\nu$ é dada por

$$\rho(\nu)d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}, \quad (3.1)$$

onde k_B e h são respectivamente as constantes de Boltzmann e Planck. Integrando (3.1) sobre

todo o espectro obtemos

$$\rho_\gamma = \alpha T^4. \quad (3.2)$$

onde $\alpha = 8\pi^5 k_B^4 / 15h^3$. Comparando (3.2) com (2.42) temos que

$$\alpha T^4 = \rho_{\gamma,0} a^{-4} \Rightarrow T = \frac{T_0}{a(t)}, \quad (3.3)$$

onde $T_0 = (\rho_{\gamma,0}/\alpha)^{1/4}$.

Outro resultado importante obtido pelo COBE é que o espectro da RCF apresenta pequenas flutuações para qualquer posição angular de sua temperatura $T(\theta, \phi)$ ao longo do céu. Estas flutuações são descritas por

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \phi) = \frac{T(\theta, \phi) - \langle T \rangle}{\langle T \rangle}, \quad (3.4)$$

onde

$$\langle T \rangle = \frac{1}{4\pi} \int T(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = 2,725K \quad (3.5)$$

é o valor médio da temperatura em todas as direções. Os mapas do celestes obtidos pelo COBE fornecem uma flutuação de temperatura média quadrática de

$$\left\langle \left(\frac{\delta T}{T} \right)^2 \right\rangle^{1/2} = 1,1 \times 10^{-5}. \quad (3.6)$$

O fato da temperatura da RCF variar de apenas $30\mu K$ através do céu mostra uma grande isotropia na RCF.

Uma vez que $\delta T/T$ é definido sobre a superfície da esfera celeste, é útil expandir $\delta T/T$ em harmônicos esféricos, ou seja,

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_l^m(\theta, \phi). \quad (3.7)$$

A informação estatística mais importante de $\delta T/T$ é a função de correlação $C(\gamma)$, que é o valor médio das flutuações entre dois pontos (θ_1, ϕ_1) e (θ_2, ϕ_2) na última superfície de espalhamento separados por um ângulo γ , dada por

$$C(\gamma) = \left\langle \frac{\delta T^*}{T}(\theta_2, \phi_2) \frac{\delta T}{T}(\theta_1, \phi_1) \right\rangle, \quad (3.8)$$

ou ainda,

$$C(\gamma) = \sum_0^{\infty} \sum_{m=-l}^l \int d\Omega a_{lm}^* a_{lm} Y_l^{m*}(\theta_2, \phi_2) Y_l^m(\theta_1, \phi_1). \quad (3.9)$$

Utilizando o teorema da adição dos harmônicos esféricos [26, 27], podemos reescrever (3.9) como

$$C(\gamma) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) C_l P_l(\cos\gamma), \quad (3.10)$$

onde $P_l(\cos\gamma)$ são os polinômios de Legendre e os C_l^s são os momentos de multipolo dados por

$$\langle a_{lm}^* a_{lm} \rangle = C_l \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (3.11)$$

Os momentos de multipolo fornecem uma medida das flutuações em escalas angulares $\gamma \sim 180^\circ/l$. Para os cosmólogos, os momentos de maior interesse são os com $l \geq 2$, pois retratam as flutuações de T na última superfície de espalhamento. As flutuações da RCF são convenientemente descritas pela função D_l^{TT} dada por

$$D_l^{TT} \equiv \left[\frac{l(l+1)}{2\pi} C_l \right]^{1/2} \langle T \rangle. \quad (3.12)$$

A Figura 3.1 mostra o gráfico de D_l^{TT} em função do logaritmo de l . Note que a D_l^{TT} apresenta um pico em $l \sim 200$, isto correspondendo a um tamanho angular de $\gamma \sim 1^\circ$.

3.2 Supernovas do Tipo Ia

Objetos astronômicos que possuem magnitude absoluta conhecida, denominados de velas padrão, são de extrema importância em astronomia, pois, uma vez que a magnitude absoluta é conhecida, uma medida de sua magnitude aparente fornece a distância desse objeto. Em cosmologia, os objetos que melhor se aproximam de velas padrão, por terem picos de luminosidade bastante similares, são as Supernovas do Tipo Ia (SNs Ia). Supõe-se que as SNs Ia se originam da explosão de anãs brancas em sistemas binários. A explosão ocorre quando a massa da anã branca, após absorver matéria de sua estrela companheira, excede o limite de *Chandrasekhar* ($\sim 1,4M_\odot$).

Explosões de SNs Ia são eventos que liberam imensas quantidades de energia ($L \sim 10^{10}L_\odot$), podendo ter um brilho superior ao de todas as estrelas de uma galáxia de brilho moderado combinadas. Como galáxias de brilho moderado podem ser observadas em *redshifts* da ordem de 1, espera-se que SNs Ia também possam ser observadas em *redshifts* da mesma ordem. Uma vez

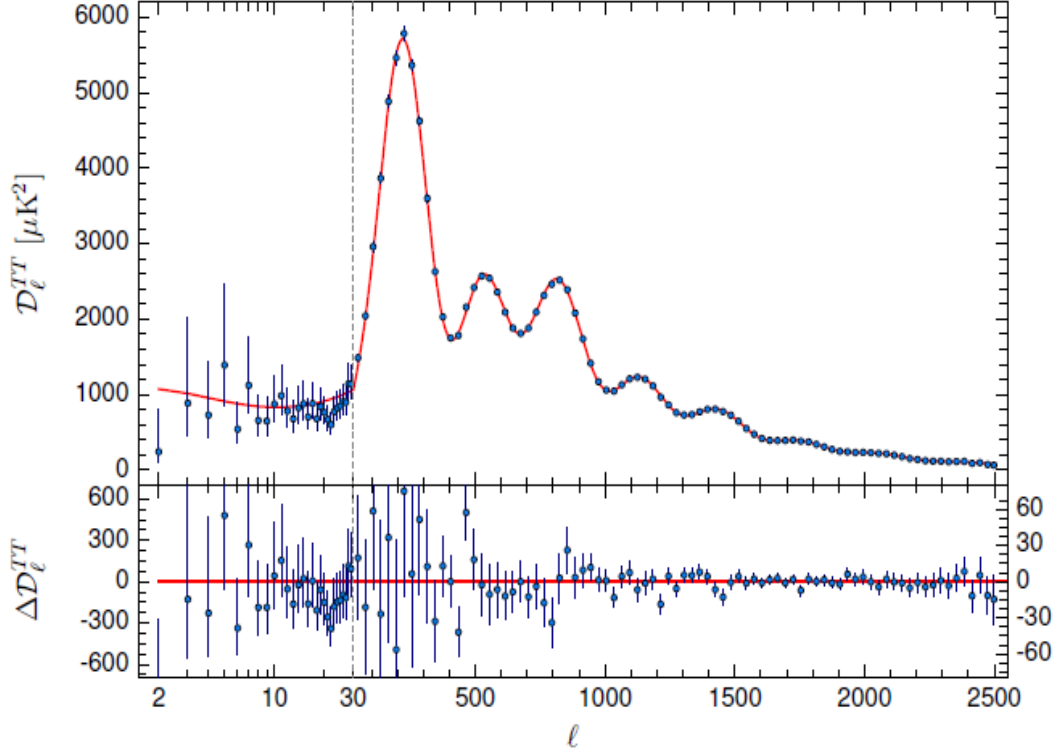


Figura 3.1: Espectro de potências da temperatura da RCF fornecidos pelo PLANCK. A linha contínua representa o modelo Λ CDM. Figura retirada de [17].

que ocorra a explosão de uma SNs Ia, pode-se medir a distância dela através da construção de sua curva de luz.

Fluxos e luminosidades são expressos pelos astrônomos no sistema de magnitudes. Proposto pelo astrônomo grego Hiparco no século II A. C., esse sistema era graduado de 1 a 6. Quanto maior for a magnitude de uma estrela menor será o seu brilho, de forma que uma estrela de magnitude seis encontra-se no limiar da visão humana. No fim do século XVIII, a escala de magnitudes tornou-se mais robusta, incorporando números fracionários e negativos e adquirindo uma melhor formulação matemática após verificar-se que a resposta do olho humano ao estímulo da luz era aproximadamente logarítmica.

Definindo a magnitude bolométrica de uma fonte em termos do seu fluxo bolométrico, o fluxo integrado sobre todos os comprimentos de onda, como

$$m \equiv -\frac{5}{2} \log(f/f_x), \quad (3.13)$$

onde f_x é um fluxo de referência cujo valor é $f_x = 2.53 \times 10^{-8}$ watt m^{-2} . O sinal negativo

na definição acima significa que pequenos valores de m correspondem a grandes valores de f . Por exemplo, na localização da Terra o fluxo bolométrico do Sol é $f = 1367 \text{ watt m}^{-2}$, correspondendo a uma magnitude aparente de $m = -26,8$. A escolha do fluxo de referência f_x deve-se ao sistema de magnitudes de Hiparco, para o qual as magnitudes das estrelas observáveis a olho nu estão entre 1 e 6.

A magnitude bolométrica absoluta de uma fonte é definida como a magnitude aparente que a fonte deveria ter caso estivesse a uma distância $10pc$ do observador. Para uma fonte de luminosidade bolométrica absoluta L , a magnitude bolométrica absoluta é dada por

$$M \equiv -\frac{5}{2} \log(L/L_x), \quad (3.14)$$

onde a luminosidade de referência $L_x = 78,7L_\odot$ é a luminosidade que produz o fluxo de referência f_x a uma distância 10 pc . O Sol tem magnitude absoluta de $M_\odot = 4,74$.

Pela equação (2.29), temos que

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi f}}, \quad (3.15)$$

de forma que por (3.13) e (3.14) as magnitudes aparente e absoluta estão relacionadas com a distância luminosidade pela expressão

$$\mu = 5 \log\left(\frac{d_L}{1Mpc}\right) + 25, \quad (3.16)$$

onde $\mu \equiv m - M$ é o módulo de distância.

Construindo o diagrama de Hubble para SNs Ia podemos estimar parâmetros cosmológicos tais como o parâmetro de Hubble H_0 , o parâmetro densidade de matéria $\Omega_{m,0}$ e o parâmetro desaceleração q_0 , entre outros. Em 1998 dois grupos liderados por A. Riess (*High-redshift Supernova Search Team*) e S. Perlmutter (*Supernova Cosmology Project*) observaram, de maneira independente, que o Universo encontra-se numa fase de expansão acelerada. A Figura 3.2 mostra um gráfico do módulo de distância em função de z . A linha tracejada corresponde ao modelo de Einstein-De Sitter e a linha contínua corresponde ao modelo Λ CDM. Como podemos observar um Universo preenchido unicamente com matéria não é suficiente para explicar os dados.

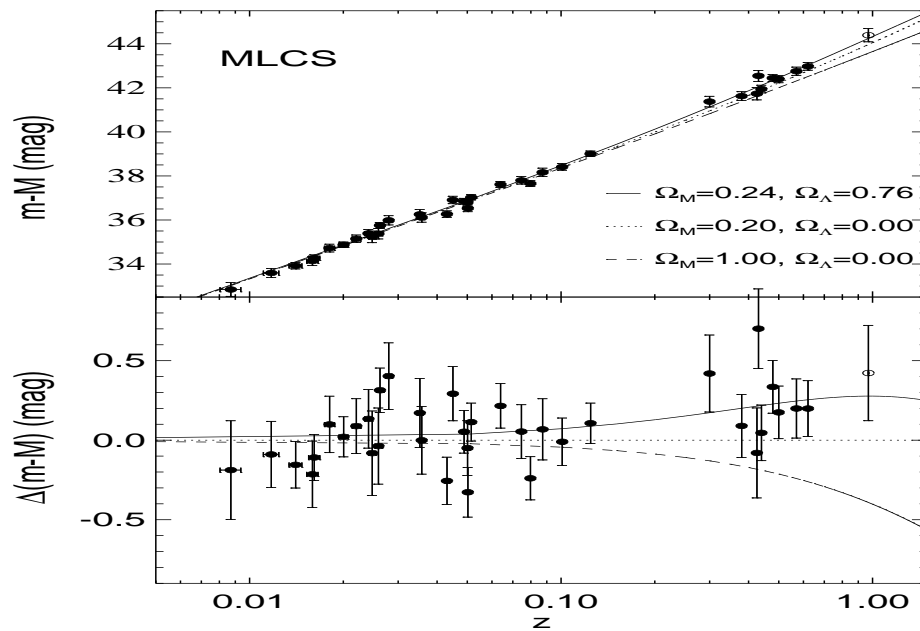


Figura 3.2: O painel superior mostra o diagrama de Hubble para a amostra de SNs Ia para baixos e altos *redshifts*. O painel inferior mostra a diferença entre os dados e os modelos com $\Omega_M = 0,20$ e $\Omega_\Lambda = 0,0$. A linha contínua representa o modelo Λ CDM com $\Omega_M = 0,24$ e $\Omega_\Lambda = 0,76$, a linha pontilhada corresponde a um modelo com $\Omega_M = 0,20$ e $\Omega_\Lambda = 0$ e a linha tracejada corresponde ao modelo de Einstein-de Sitter, $\Omega_M = 1,0$ e $\Omega_\Lambda = 0$. Figura retirada de [28].

3.3 Oscilações Acústicas da Matéria Bariônica

Antes da época da recombinação e do desacoplamento o Universo era preenchido por um plasma extremamente quente composto de fótons e bárions fortemente acoplados. A competição entre as forças de pressão da radiação e gravitacional provocaram uma perturbação no fluido de fótons. Uma perturbação na densidade esférica do plasma bárion-fóton gera uma onda acústica que se propaga com velocidade

$$c_s = \frac{c}{\sqrt{3(1+R)}}, \quad (3.17)$$

onde $R \equiv 3\rho_b/4\rho_\gamma$. Após o desacoplamento, os bárions deixaram de ser relativísticos e a sua pressão se anula, enquanto os fótons se propagam livremente dando origem a RCF. O raio característico da casca esférica formado quando a onda de bárions estagna ficou impresso na distribuição dos bárions como um excesso de densidade. Como a matéria bariônica e a matéria escura interagem apenas gravitacionalmente, espera-se que a matéria escura se aglomere preferencialmente nessa escala. Se uma galáxia é formada no centro dessa perturbação de densidade inicial, então deve haver uma protuberância na função de correlação de dois pontos no raio r_s da casca esférica, refletindo numa maior probabilidade de encontrar duas galáxias que estejam separadas pela distância do horizonte acústico r_s . A função de correlação é conhecida como Oscilações Acústicas Bariônicas (BAO)¹. O pico das Oscilações Acústicas Bariônicas foi encontrado por Eisenstein e colaboradores [29] utilizando os dados de 46.748 galáxias observadas pelo *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS). A Figura 3.3 mostra a função de correlação para esses dados.

As distribuições angulares e de *redshift* de galáxias são observadas como um espectro de potências $P(k_{\parallel}, k_{\perp})$, onde k_{\parallel} e k_{\perp} são, respectivamente, os números de onda paralelo e perpendicular à direção da luz de forma que é possível medir as razões [19]

$$\theta_s(z) = \frac{r_s(z_{drag})}{(1+z)d_A(z)} \quad (3.18)$$

e

$$\delta z_s(z) = \frac{r_s(z_{drag})H(z)}{c}, \quad (3.19)$$

¹Sigla do inglês *Baryonic Acoustic Oscillations*.

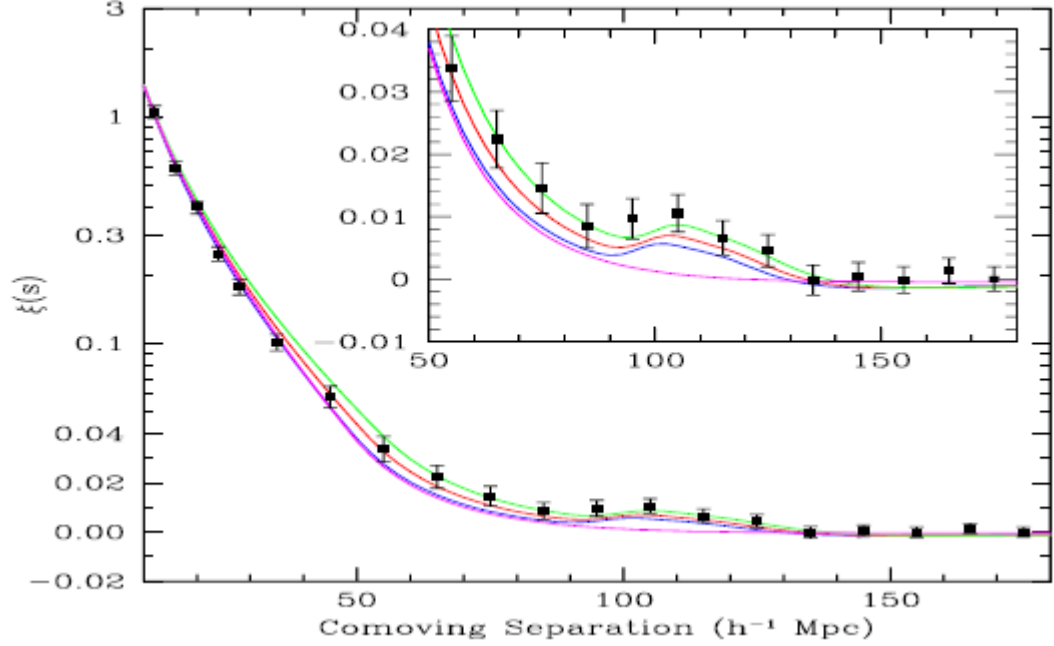


Figura 3.3: Pico Acústico Bariônico fornecido pelo SDSS. Observe que a função apresenta o pico por volta de $100 h^{-1}\text{Mpc}$. A linha verde corresponde a $\Omega_m h^2 = 0,12$, a linha vermelha corresponde a $\Omega_m h^2 = 0,13$, a linha azul corresponde a $\Omega_m h^2 = 0,14$ e a linha roxa corresponde $\Omega_b h^2 = 0,024$. Figura retirada de [29].

onde

$$r_s(z_{drag}) = \int_0^{z_{drag}} \frac{c_s(z)}{H(z)} dz \quad (3.20)$$

é a distância do horizonte acústico na época do arrasto, $z_{drag} \sim 1020$ (época na qual os bárions ficam livres do arrasto Compton). O ângulo $\theta_s(z)$ é análogo ao pico acústico da RCF e corresponde as observações ortogonais a linha visada, a quantidade $\delta z_s(z)$ é obtida identificando flutuações no espectro das oscilações ao longo da linha visada. Observe que as equações (3.18) e (3.19) são formas de extrair $d_A(z)$ e $H(z)$ dos dados de BAO. Na Tabela 3.1 temos os valores de $H(z)$ obtidos através do método do BAO radial.

3.4 Idades Diferenciais de Galáxias

Outra forma de estimar o parâmetro de Hubble é o método das Idades Diferenciais proposto por Jimenez e Loeb [37]. O ponto de partida para desenvolver este método é reescrever o

z	H	Ref.
0.24	79.69 ± 2.65	[30]
0.43	86.45 ± 3.68	
0.44	82.6 ± 7.8	[31]
0.6	87.9 ± 6.1	
0.73	97.3 ± 7.0	
0.35	84.4 ± 7.0	[32]
0.57	92.4 ± 4.5	[33]
2.3	224.0 ± 8.0	[34]
2.36	226.0 ± 8.0	[35]
2.34	222.0 ± 7.0	[36]

Tabela 3.1: Valores Observacionais de $H(z)$ fornecidos na literatura para o método de BAO radial.

parâmetro de Hubble como

$$H(z) = -\frac{1}{(1+z)} \frac{dz}{dt}. \quad (3.21)$$

Para estimar $H(z)$ é necessário obter a taxa de variação do *redshift* em relação ao tempo cósmico, dz/dt . A solução encontrada por Jimenez e Loeb para inferir tal evolução foi utilizar a espectroscopia de idade de galáxias que evoluem passivamente. Com base nas medidas da diferença de idade, Δt , entre duas galáxias que evoluem passivamente separadas por um pequeno intervalo de *redshift*, Δz , é possível inferir dz/dt . Galáxias que evoluem passivamente possuem metalicidade similares, baixas taxas de formação estelar e uma cor vermelha, de forma que a idade média de suas estrelas deve ser muito superior a diferença de idade entre as duas Galáxias. A primeira medida do parâmetro de Hubble utilizando esse método foi realizada por Jimenez et. al. [38] obtendo $H = 69.0 \pm 12.0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ para $z = 0.09$. A Tabela 3.2 contem os valores de $H(z)$ disponíveis na literatura para o método das idades diferenciais de galáxias.

z	H	Ref.
0.09	69.0 ± 12.0	[38]
0.17	83.0 ± 8.0	[39]
0.27	77.0 ± 14.0	
0.4	95.0 ± 17.0	
0.9	117.0 ± 23.0	
1.3	168.0 ± 17.0	
1.43	177.0 ± 18.0	
1.53	140.0 ± 14.0	
1.75	202.0 ± 40.0	
0.48	97.0 ± 62.0	[40]
0.88	90.0 ± 40.0	
0.179	75.0 ± 4.0	[41]
0.199	75.0 ± 5.0	
0.352	83.0 ± 14.0	
0.593	104.0 ± 13.0	
0.68	92.0 ± 8.0	
0.781	105.0 ± 12.0	
0.875	125.0 ± 17.0	
1.037	154.0 ± 20.0	
0.35	82.1 ± 4.9	[42]
0.0708	69.0 ± 19.68	[43]
0.12	68.6 ± 26.2	
0.2	72.9 ± 29.6	
0.28	88.8 ± 36.6	
1.363	160.0 ± 33.6	[44]
1.965	186.5 ± 50.4	

Tabela 3.2: Valores Observacionais de $H(z)$ fornecidos na literatura para o método das idades diferenciais de galáxias.

Capítulo 4

Expansões Cosmográficas e Análise Estatística

A Cosmografia é uma abordagem cinemática cuja principal característica é sua independência de modelo. Supondo que o Princípio Cosmológico seja válido, são realizadas expansões em série de observáveis cosmológicos tais como o parâmetro de Hubble e a distância luminosidade. Os coeficientes dessas expansões são então escritos em termos de parâmetros que envolvem as derivadas no tempo do fator de escala, denominados de parâmetros cosmográficos. Esses parâmetros podem ser estimados a partir de dados observacionais fornecendo informações sobre o estado cinemático do Universo ao longo de sua evolução.

4.1 Expansão em *redshifts*

As expansões cosmográficas comumente encontradas na literatura são as de $H(z)$ [10, 11] e $d_L(z)$ [11, 12, 13], ambas desenvolvidas tomando o centro de expansão em $z = 0$. Iremos apresentá-las a seguir e logo após discutiremos os problemas associados às mesmas.

4.1.1 Expansão de $H(z)$

Expandindo $H(z)$ (3.21) em série de Taylor em torno de $z = 0$, obtemos

$$H(z) = H_0 + \left. \frac{dH(z)}{dz} \right|_{z=0} z + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 H(z)}{dz^2} \right|_{z=0} z^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{d^3 H(z)}{dz^3} \right|_{z=0} z^3 + \dots,$$

ou [10, 11],

$$H(z) = H_0 \left\{ 1 + (q_0 + 1)z + \frac{1}{2}(j_0 - q_0^2)z^2 + \frac{1}{6}[3q_0^2(q_0 + 1) - j_0(3 + 4q_0) - s_0]z^3 + \dots \right\}, \quad (4.1)$$

onde

$$q \equiv -\frac{1}{aH^2} \frac{d^2 a}{dt^2} \quad (4.2)$$

é o parâmetro desaceleração,

$$j \equiv \frac{1}{aH^3} \frac{d^3 a}{dt^3} \quad (4.3)$$

é o *jerk* e

$$s \equiv \frac{1}{aH^4} \frac{d^4 a}{dt^4} \quad (4.4)$$

é o *snap*.

O parâmetro q_0 informa se a expansão do Universo é acelerada ou não, com $q_0 < 0$ indicando um Universo em fase de expansão acelerada. O *jerk* indica se a taxa de aceleração do Universo está aumentando ($j > 0$) ou diminuindo ($j < 0$). Uma análise similar se mantém para o *snap*, de forma que, uma maior taxa da taxa de expansão do Universo ocorre para $s < 0$.

4.1.2 Expansão de $d_L(z)$

Para um Universo espacialmente plano, a distância luminosidade pode ser escrita em termos do *redshift* como

$$d_L(z) = f(z) = c(1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (4.5)$$

Expandindo $d_L(z)$ em torno de $z = 0$, temos:

$$d_L(z) = f(0) + \left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=0} z + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 f(z)}{dz^2} \right|_{z=0} z^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{d^3 f(z)}{dz^3} \right|_{z=0} z^3 + \frac{1}{24} \left. \frac{d^4 f(z)}{dz^4} \right|_{z=0} z^4 + \dots,$$

ou, em termos dos parâmetros cosmográficos H , q , j e s [11, 12, 13, 10]

$$d_L(z) = \frac{cz}{H_0} \left\{ 1 + \frac{1}{2}(1 - q_0)z + \frac{1}{6}[q_0(3q_0 + 1) - j_0 - 1]z^2 + \frac{1}{24}[s_0 - q_0(2 + 15q_0 + 15q_0^2) + j_0(5 + 10q_0) + 2]z^3 + \dots \right\}. \quad (4.6)$$

4.1.3 Problemas de Convergência e Truncamento

As séries desenvolvidas com o centro de expansão em $z = 0$ não convergem para $z > 1$ [12]. Como um grande número de dados de SNs Ia e $H(z)$ encontram-se nesse intervalo de *redshift*, as eqs. (4.1) e (4.6) podem fornecer estimativas enganosas dos parâmetros H , q , j e s .

Como podemos notar, a eq. (4.6) não apresenta polos ou singularidades evidentes. Contudo, ao expandirmos o fator de escala em torno de t_0 , i.e,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+z} &= \frac{a(t)}{a_0} = 1 + H_0(t-t_0) - \frac{1}{2}H_0^2q_0(t-t_0)^2 + \\ &+ \frac{1}{6}H_0^3j_0(t-t_0)^3 + \frac{1}{24}H_0^4s_0(t-t_0)^4 + \dots, \end{aligned} \quad (4.7)$$

observamos que a expressão acima possui um polo evidente em $z = -1$. Uma vez que (4.7) possui o polo em $z = -1$, a teoria de variáveis complexas implica que o raio de convergência da série deve ser no máximo $|z| = 1$ [45]. Portanto, não podemos esperar que (4.7) convirja para $z > 1$. Conseqüentemente, a série inversa (*lookback time*) e as séries de $H(z)$ e $d_L(z)$ também não convergem para o mesmo intervalo de *redshift*.

Outro problema associado as expansões cosmográficas é o truncamento da série, uma vez que truncamentos prematuros podem levar a aproximações ruins. Não existe um consenso para determinar a ordem de truncamento. Aqui utilizaremos uma aproximação de terceira ordem para $H(z)$ e de quarta ordem para $d_L(z)$ de forma que ambas as séries contenham o mesmo número de parâmetros livres.

4.2 Expansão via Fator de Escala

Uma outra forma de abordar as expansões cosmográficas e amenizar o problema da convergência associado as séries de z foi proposto por Barboza e Cabral [9]. Este método consiste em efetuar a série de Taylor no fator de escala, a . Diferentemente da abordagem padrão em z , onde a série é expandida em de torno $z = 0$ (ou, equivalentemente, $a = 1$), neste caso a série é desenvolvida em torno de um centro de expansão arbitrário \tilde{a} . Para o intervalo de *redshifts* coberto pelos dados de SNs Ia, $0,33 < \tilde{a} \leq 1,0$ e para o intervalo de *redshifts* coberto pelos dados de $0,33 < \tilde{a} \leq 1,0$. Veremos que ao utilizar um centro de expansão arbitrário, a formulação via fator de escala nos permite estimar a evolução temporal dos parâmetros cosmográficos H ,

q, j e s . A seguir desenvolveremos as séries de $H(a)$ e $d_L(a)$.

4.2.1 Expansão de $H(a)$

Expandindo o parâmetro de Hubble em torno de \tilde{a} , obtemos

$$\begin{aligned} H(a) &= \tilde{H} + \left. \frac{dH(a)}{da} \right|_{a=\tilde{a}} (a - \tilde{a}) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2H(a)}{da^2} \right|_{a=\tilde{a}} (a - \tilde{a})^2 + \\ &+ \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3H(a)}{da^3} \right|_{a=\tilde{a}} (a - \tilde{a})^3 + \dots, \end{aligned}$$

ou, em termos dos parâmetros cosmológicos,

$$\begin{aligned} H(a) &= \tilde{H} \left\{ 1 + \left(1 - \frac{a}{\tilde{a}} \right) \left[1 + \tilde{q} + (\tilde{j} + 2\tilde{q} - \tilde{q}^2 + 2) \left(1 - \frac{a}{\tilde{a}} \right) + \right. \right. \\ &\left. \left. + (6\tilde{q} - 3\tilde{q}^2 + 3\tilde{q}^3 - 3\tilde{j} - 4\tilde{q}\tilde{j} - \tilde{s} + 6) \left(1 - \frac{a}{\tilde{a}} \right)^2 + \dots \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde o “til” indica que o parâmetro é avaliado em \tilde{a} .

4.2.2 Expansão de $d_L(a)$

Reescrevendo (4.5) em termos do fator de escala ficamos com:

$$d_L(a) = f(a) = -\frac{c}{a} \int_1^a \frac{da'}{a'^2 H(a')}. \quad (4.9)$$

Expandindo (4.9) em série de Taylor em torno de \tilde{a} , obtemos

$$\begin{aligned} d_L(a) &= d_L(\tilde{a}) + \left. \frac{df(a)}{da} \right|_{a=\tilde{a}} (a - \tilde{a}) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2f(a)}{da^2} \right|_{a=\tilde{a}} (a - \tilde{a})^2 + \\ &+ \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3f(a)}{da^3} \right|_{a=\tilde{a}} (a - \tilde{a})^3 + \frac{1}{4!} \left. \frac{d^4f(a)}{da^4} \right|_{a=\tilde{a}} (a - \tilde{a})^4 + \dots, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{d_L(a)\tilde{H}}{c} &= \frac{1}{a} \left\{ \tilde{a} \frac{\tilde{d}_L \tilde{H}}{c} + \frac{1}{\tilde{a}} \left(1 - \frac{a}{\tilde{a}} \right) \left[1 + \frac{1}{2} (1 - \tilde{q}) \left(1 - \frac{a}{\tilde{a}} \right) + \right. \right. \\ &+ \frac{1}{6} (3\tilde{q}^2 - 2\tilde{q} - \tilde{j} + 2) \left(1 - \frac{a}{\tilde{a}} \right)^2 + \\ &\left. \left. + \frac{1}{24} (\tilde{s} - 15\tilde{q}^3 + 9\tilde{q}^2 - 6\tilde{q} + 10\tilde{q}\tilde{j} - 3\tilde{j} + 6) \left(1 - \frac{a}{\tilde{a}} \right)^3 + \dots \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Observe que a equação acima possui um parâmetro extra, $\tilde{d}_L = d_L(\tilde{a})$. Contudo, esse parâmetro pode ser escrito em termos de \tilde{H} , \tilde{q} , \tilde{j} e \tilde{s} uma vez que em $a = 1$, $d_L = 0$.

4.3 Análise Estatística

Em cosmologia estamos constantemente interessados em observáveis y_i^{obs} medidos num dado z_i . Estes observáveis são comparados com seu valor teórico $y_i^{teo}(z|\{\theta_j\})$ fornecido por um determinado modelo caracterizado pelo conjunto de parâmetros $\{\theta_j\}$. Comparando $y_i^{teo}(z_i|\{\theta_j\})$ com y_i^{obs} , podemos encontrar os parâmetros que melhor aproximam $y_i^{teo}(z_i|\{\theta_j\})$ de seu valor observável $y_i^{obs}(z_i)$.

Assim, de posse de N medidas de y_i^{obs} em *redshifts* z_i os parâmetros que melhor ajustam o modelo aos dados são aqueles que minimizam a função

$$\chi^2 = \sum_i^N \left[\frac{y_i^{obs}(z_i) - y_i^{teo}(z_i|\{\theta_j\})}{\sigma_i} \right]^2, \quad (4.11)$$

ou, equivalentemente, que maximizam a probabilidade

$$P \propto \exp \left[-\frac{1}{2} \chi^2(\{\theta_j\}) \right], \quad (4.12)$$

onde σ_i é o erro nas medidas de y_i^{obs} . As regiões de confiança em 1σ , 2σ e 3σ correspondem, respectivamente, à 68,3%, 95,4% e 99,73% da área sob a curva de probabilidade.

Em certas situações não estamos interessados em conhecer alguns parâmetros de um modelo. Um dado parâmetro pode ser eliminado da análise integrando a probabilidade (4.12) sobre todos os valores possíveis desse parâmetro. Esse procedimento é conhecido como *marginalização*. Para um melhor entendimento de métodos estatísticos em Cosmologia ver [46].

4.4 Resultados e Discussões

Nesta dissertação utilizamos separadamente as 580 medidas de distâncias de SNs Ia contidas na compilação Union 2.1 do Supernova Cosmology Project (SCP) [47] e as 36 medidas de $H(z)$ contidas nas Tabelas 3.1 e 3.2 que foram compiladas por Meng e colaboradores [48], mais o valor de H_0 fornecido pelo *Hubble Space Telescope* (HST) [49], para restringir os parâmetros \tilde{H} , \tilde{q} , \tilde{j} e \tilde{s} em diferentes *redshifts*. Isso é feito minimizando as funções

$$\chi_{SN}^2(\{\tilde{H}, \tilde{q}, \tilde{j}, \tilde{s}\}) = \sum_i^{580} \left[\frac{\mu_i^{obs}(z_i) - \mu_i^{teo}(z_i|\{\tilde{H}, \tilde{q}, \tilde{j}, \tilde{s}\})}{\sigma_{\mu,i}} \right]^2 \quad (4.13)$$

e

$$\chi_H^2(\{\tilde{H}, \tilde{q}, \tilde{j}, \tilde{s}\}) = \sum_i^{37} \left[\frac{H_i^{obs}(z_i) - H_i^{teo}(z_i|\{\tilde{H}, \tilde{q}, \tilde{j}, \tilde{s}\})}{\sigma_{H,i}} \right]^2. \quad (4.14)$$

O algoritmo utilizado segue os seguintes passos:

1. Fixamos o valor do centro de expansão $\tilde{a}_i = (1 + \tilde{z}_i)^{-1}$;
2. Minimizamos a função χ^2 para obter os parâmetros \tilde{H} , \tilde{q} , \tilde{j} e \tilde{s} que melhor ajustam os dados;
3. Fazemos $z_i \rightarrow \tilde{z}_{i+1} = \tilde{z}_i + \Delta\tilde{z}_i$ e retornamos ao passo anterior para restringir os parâmetros \tilde{H} , \tilde{q} , \tilde{j} e \tilde{s} em \tilde{z}_{i+1} .

Em nossa análise, $\Delta\tilde{z}_i = 0,1$ e $0 \leq \tilde{z}_i \leq 1,4$ para SNs Ia e $0 \leq \tilde{z}_i \leq 2$ para $H(z)$.

Os resultados das análises estatísticas encontram-se nas Tabelas 4.1 e 4.2 . As barras de erros correspondem a uma incerteza estatística de 2σ ($\Delta\chi^2 = 4$) para um único parâmetro. Para uma melhor visualização, os resultados contidos nas Tabelas 4.1 e 4.2 são representados graficamente nas Figuras 4.1 e 4.2.

z	H	q	j	s	χ_{min}^2
0.00	69.970 ^{+1.430} _{-1.410}	-0.500 ^{+0.860} _{-0.900}	-0.710 ^{+19.240} _{-14.430}	-18.80 ^{+321.200} _{-83.590}	562.188
0.10	73.320 ^{+1.260} _{-1.295}	-0.496 ^{+0.144} _{-0.160}	0.510 ^{+4.830} _{-4.860}	-8.400 ^{+79.200} _{-90.000}	562.200
0.20	76.760 ^{+1.200} _{-1.200}	-0.422 ^{+0.245} _{-0.252}	1.040 ^{+1.240} _{-1.240}	-3.250 ^{+30.740} _{-32.250}	562.185
0.30	80.660 ^{+2.100} _{-1.960}	-0.330 ^{+0.198} _{-0.186}	1.250 ^{+1.925} _{-2.090}	-2.400 ^{+14.400} _{-8.400}	562.185
0.40	85.080 ^{+2.730} _{-2.520}	-0.229 ^{+0.162} _{-0.157}	1.250 ^{+2.200} _{-2.365}	-1.700 ^{+5.500} _{-4.900}	562.181
0.50	90.100 ^{+2.900} _{-2.800}	-0.136 ^{+0.238} _{-0.245}	1.194 ^{+2.310} _{-2.145}	-1.750 ^{+2.200} _{-7.480}	562.182
0.60	95.500 ^{+3.500} _{-3.300}	-0.041 ^{+0.333} _{-0.360}	1.285 ^{+2.310} _{-1.925}	-2.250 ^{+1.350} _{-10.800}	562.203
0.70	101.170 ^{+5.280} _{-4.510}	0.015 ^{+0.456} _{-0.418}	1.210 ^{+2.655} _{-1.530}	-2.530 ^{+0.085} _{-14.960}	562.190
0.80	107.200 ^{+8.100} _{-6.300}	0.062 ^{+0.550} _{-0.451}	1.134 ^{+2.852} _{-1.150}	-2.750 ^{+0.750} _{-17.500}	562.213
0.90	115.040 ^{+10.810} _{-10.580}	0.178 ^{+0.566} _{-0.554}	1.333 ^{+2.881} _{-1.161}	-3.760 ^{+1.610} _{-19.780}	562.212
1.00	122.080 ^{+15.360} _{-13.760}	0.211 ^{+0.637} _{-0.546}	1.275 ^{+3.290} _{-0.940}	-3.900 ^{+1.700} _{-23.500}	562.205
1.10	129.900 ^{+20.400} _{-17.100}	0.272 ^{+0.624} _{-0.546}	1.366 ^{+3.082} _{-0.874}	-4.500 ^{+2.250} _{-22.250}	562.209
1.20	136.600 ^{+25.865} _{-20.090}	0.285 ^{+0.725} _{-0.538}	1.320 ^{+3.590} _{-0.730}	-4.500 ^{+2.170} _{-26.870}	562.184
1.30	146.500 ^{+25.970} _{-23.850}	0.360 ^{+0.627} _{-0.535}	1.452 ^{+3.034} _{-0.779}	-5.300 ^{+3.030} _{-22.080}	562.204
1.40	154.900 ^{+34.450} _{-25.350}	0.380 ^{+0.706} _{-0.498}	1.440 ^{+3.568} _{-0.710}	-5.400 ^{+3.070} _{-26.960}	562.213

Tabela 4.1: Estimativas dos parâmetros cosmográficos H , q , j e s obtidos a partir dos dados de SNs Ia da amostra Union 2.1. As incertezas estatísticas são dadas no intervalo de confiança de 2σ para um único parâmetro. Note que χ_{min}^2 não sofre variações significativas ao variarmos o centro de expansão.

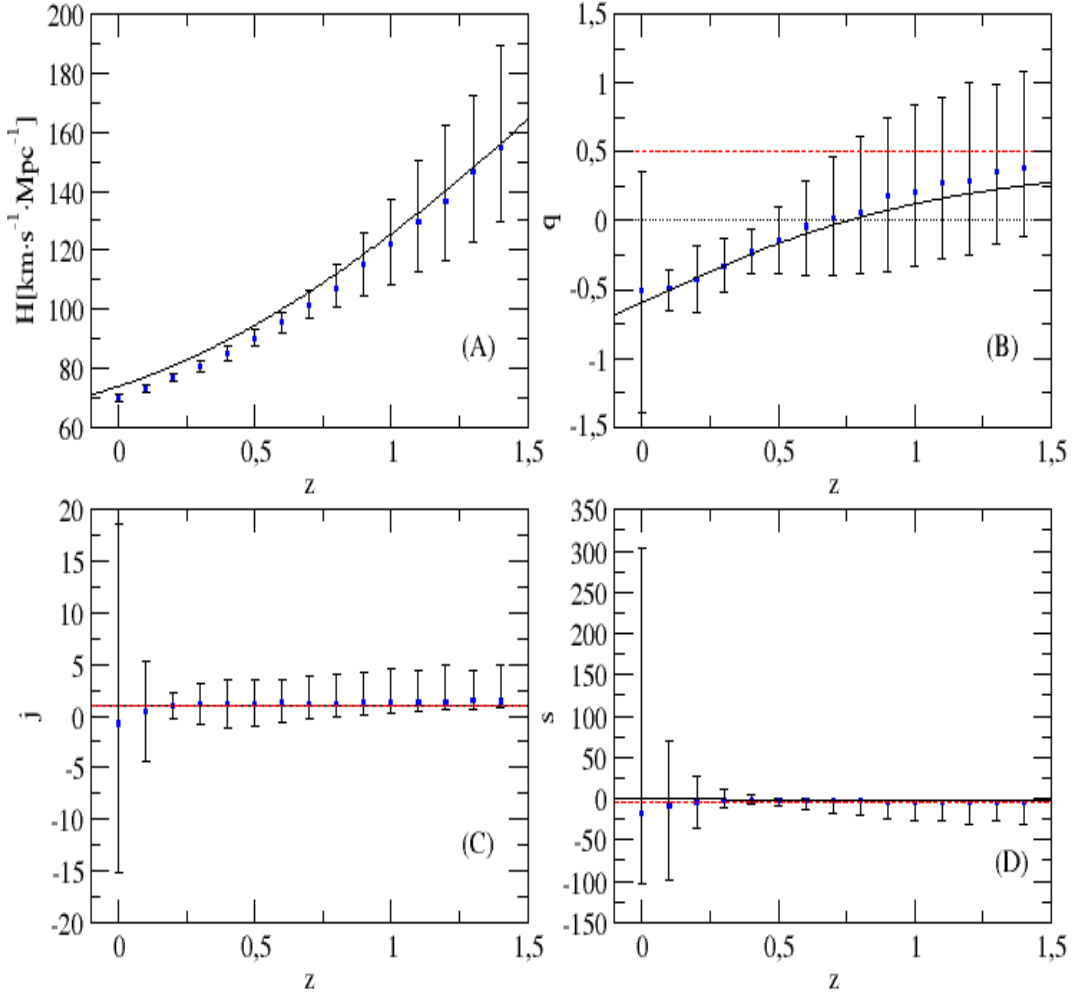


Figura 4.1: Evolução temporal dos parâmetros H (A), q (B), j (C) e s (D) para à análise estatística de dados de SNs Ia. A linha contínua representa o modelo Λ CDM. A linha tracejada representa o limite assintótico dos parâmetros q , j e s . A linha pontilhada em (B) marca a transição de uma fase desacelerada, $q > 0$, para uma fase acelerada, $q < 0$.

A Fig. 4.1(A) mostra a evolução de H obtida a partir dos dados de SNs Ia. A estimativa que obtemos de H_0 é compatível com as medidas mais recentes de H_0 [17, 49]. Os demais valores de H também são consistentes com os dados contidos na Tabela 3.1.

A Fig. 4.1 (B) mostra a evolução de q obtida a partir dos dados de SNs Ia. O valor obtido para q_0 condiz com o valor previsto pelo modelo Λ CDM, $q_0 = -0,59 \pm 0,06$ [9]. Os resultados mostram que, em 2σ , um Universo em expansão acelerada, $q < 0$, não pode ser descartado

em todo o intervalo de *redshifts* coberto. Para altos- z ($z \gtrsim 0,8$), os resultados obtidos são compatíveis com o valor de $q \sim 1/2$, de acordo com as previsões teóricas, uma vez que nesse regime a densidade de matéria torna-se cada vez mais dominante.

A Fig. 4.1 (C) mostra a evolução de j obtida a partir dos dados de SNs Ia. Os resultados apresentam grande incerteza para $z < 0,2$ indicando que nesse regime j não apresenta informações estatisticamente significantes sobre o estado do Universo. Como podemos ver os resultados obtidos para j são compatíveis com o modelo Λ CDM ($j = 1$).

Por fim, a Fig. 4.1 (D) mostra a evolução de s obtida a partir dos dados de SNs Ia. Para baixos *redshifts* os erros em s são muito grandes indicando que nesse regime não se pode extrair a partir do *snap* informações estatisticamente significantes sobre o estado de expansão do Universo. Como podemos ver os resultados obtidos são compatíveis com o modelo Λ CDM.

z	H	q	j	s	χ^2_{min}
0.00	$73.50^{+4.80}_{-4.70}$	$-0.36^{+1.03}_{-0.98}$	$-7.60^{+11.60}_{-10.10}$	$-85.00^{+75.00}_{-22.00}$	15.30
0.10	$76.30^{+3.50}_{-3.50}$	$-0.74^{+0.34}_{-0.38}$	$-1.20^{+6.10}_{-5.20}$	$-49.00^{+54.00}_{-37.00}$	15.31
0.20	$77.80^{+3.50}_{-3.50}$	$-0.73^{+0.21}_{-0.21}$	$1.90^{+2.70}_{-2.70}$	$-20.00^{+28.00}_{-28.00}$	15.31
0.30	$80.00^{+3.00}_{-3.00}$	$-0.55^{+0.26}_{-0.26}$	$2.90^{+1.20}_{-1.20}$	$-7.00^{+13.00}_{-15.00}$	15.30
0.40	$83.40^{+2.90}_{-2.90}$	$-0.33^{+0.27}_{-0.27}$	$3.00^{+0.80}_{-0.80}$	$-1.00^{+7.00}_{-7.00}$	15.30
0.50	$88.00^{+3.50}_{-3.50}$	$-0.12^{+0.24}_{-0.24}$	$2.70^{+0.90}_{-0.90}$	$1.00^{+4.00}_{-3.00}$	15.30
0.60	$93.70^{+4.30}_{-4.30}$	$0.05^{+0.17}_{-0.19}$	$2.30^{+1.00}_{-0.90}$	$2.00^{+3.00}_{-2.00}$	15.30
0.70	$100.28^{+4.90}_{-5.18}$	$0.16^{+0.13}_{-0.14}$	$1.85^{+0.96}_{-0.85}$	$3.05^{+2.02}_{-1.59}$	15.30
0.80	$107.30^{+5.70}_{-5.70}$	$0.24^{+0.10}_{-0.10}$	$1.43^{+0.92}_{-0.84}$	$3.72^{+1.57}_{-1.35}$	15.30
0.90	$114.90^{+6.20}_{-6.10}$	$0.29^{+0.09}_{-0.09}$	$1.03^{+0.84}_{-0.78}$	$4.28^{+1.11}_{-1.10}$	15.30
1.00	$122.80^{+6.50}_{-6.40}$	$0.31^{+0.09}_{-0.09}$	$0.67^{+0.77}_{-0.70}$	$4.69^{+0.72}_{-0.79}$	15.30
1.10	$130.90^{+6.60}_{-6.60}$	$0.31^{+0.10}_{-0.10}$	$0.36^{+0.68}_{-0.62}$	$4.93^{+0.46}_{-0.46}$	15.30
1.20	$139.10^{+6.60}_{-6.60}$	$0.29^{+0.11}_{-0.11}$	$0.10^{+0.59}_{-0.54}$	$5.02^{+0.38}_{-0.51}$	15.30
1.30	$147.30^{+6.60}_{-6.60}$	$0.27^{+0.12}_{-0.12}$	$-0.13^{+0.52}_{-0.45}$	$4.97^{+0.46}_{-0.70}$	15.30
1.40	$155.40^{+6.50}_{-6.60}$	$0.25^{+0.13}_{-0.12}$	$-0.31^{+0.44}_{-0.38}$	$4.83^{+0.61}_{-0.88}$	15.30
1.50	$163.50^{+6.40}_{-6.60}$	$0.22^{+0.13}_{-0.13}$	$-0.46^{+0.37}_{-0.32}$	$4.63^{+0.75}_{-1.01}$	15.30
1.60	$171.40^{+6.30}_{-6.60}$	$0.18^{+0.14}_{-0.13}$	$-0.59^{+0.31}_{-0.26}$	$4.34^{+0.91}_{-1.07}$	15.30
1.70	$179.00^{+6.50}_{-6.40}$	$0.15^{+0.13}_{-0.13}$	$-0.68^{+0.25}_{-0.22}$	$4.08^{+0.97}_{-1.15}$	15.30
1.80	$186.50^{+6.60}_{-6.50}$	$0.12^{+0.13}_{-0.13}$	$-0.76^{+0.20}_{-0.17}$	$3.79^{+1.02}_{-1.19}$	15.30
1.90	$193.90^{+6.80}_{-6.70}$	$0.09^{+0.13}_{-0.13}$	$-0.82^{+0.16}_{-0.14}$	$3.51^{+1.02}_{-1.21}$	15.30
2.00	$201.10^{+7.00}_{-7.00}$	$0.05^{+0.13}_{-0.13}$	$-0.87^{+0.13}_{-0.11}$	$3.15^{+1.09}_{-1.16}$	15.30

Tabela 4.2: Estimativas dos parâmetros cosmológicos H , q , j e s obtidos a partir dos dados de $H(z)$. As incertezas estatísticas são dadas no intervalo de confiança de 2σ para um único parâmetro. Note que χ^2_{min} não sofre variações significantes ao variarmos o centro de expansão.

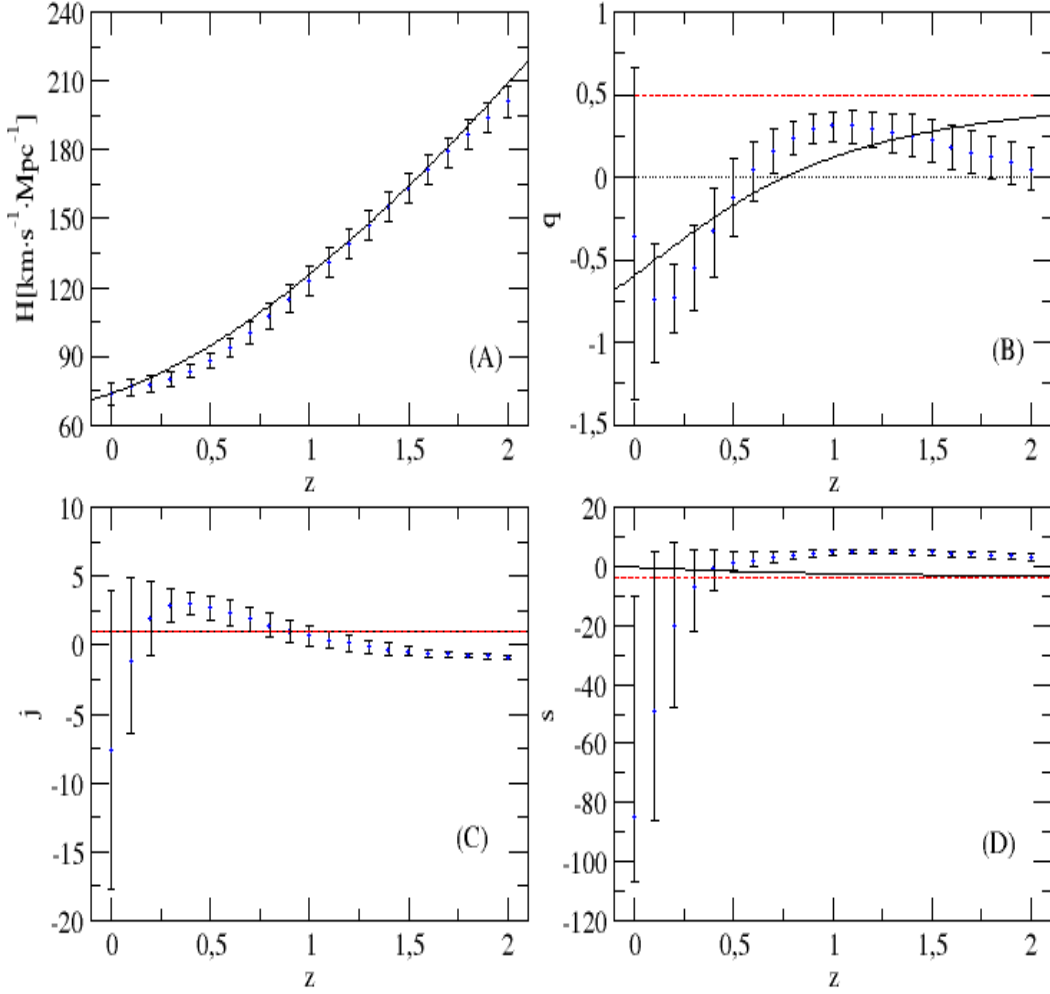


Figura 4.2: Evolução temporal dos parâmetros H (A), q (B), j (C) e s (D) para à análise estatística de dados de $H(z)$. A linha contínua representa o modelo Λ CDM. A linha tracejada representa o limite assintótico dos parâmetros q , j e s . A linha pontilhada em (B) marca a transição de uma fase desacelerada, $q > 0$, para uma fase acelerada, $q < 0$.

A Fig. 4.2 (A) mostra a evolução de H obtida a partir dos dados de $H(z)$. Podemos observar que os resultados obtidos para H a partir dos dados de $H(z)$ são compatíveis com os que foram obtidos utilizando os dados de SNs Ia.

A Fig. 4.2 (B) mostra a evolução de q para os dados de $H(z)$. Observe que, assim como para H , os vínculos obtidos para q a partir dos dados de $H(z)$ são consistentes com aqueles obtidos para os dados de SNs Ia. Contudo, neste caso podemos observar que a medida que a

contribuição da matéria aumenta q começa a decrescer contrariando a previsão teórica de que $q \rightarrow 1/2$ neste regime.

A Fig. 4.2 (C) mostra-se a evolução de j obtida a partir dos dados de $H(z)$. Como nos casos anteriores os resultados para baixos *redshifts*, $z \leq 0,2$, não fornecem informações estatisticamente sobre o estado cinemático do Universo. Os dados obtidos começam a se tornar incompatíveis com a previsão teórica e, conseqüentemente, com os resultados apresentados na Fig. 4.1 (C) para $z > 1,1$. Neste regime, j decresce trocando inclusive de sinal.

Finalmente, a Fig. 4.2 (D) mostra a evolução de s obtida a partir dos dados de $H(z)$. Para o parâmetro *snap* temos a maior diferença entre os vínculos impostos sobre s em diferentes *redshifts* e os resultados esperados teoricamente, uma vez que para altos *redshifts* os resultados obtidos fornecem valores positivos de s contrariamente ao que se espera quando a matéria começa a dominar o conteúdo energético do Universo.

Nossos resultados indicam que há uma tensão entre os dados de SNs Ia e os dados de $H(z)$, evidenciada pelos resultados obtidos em altos *redshifts*, o que sugere que não podemos combinar as duas amostras com o intuito de obter estimativas mais acuradas dos parâmetros cosmográficos em altos *redshifts*. Esta tensão pode ser melhor visualizada mostrando que as estimativas mais confiáveis dos parâmetros cosmográficos devem ocorrer no centro do intervalo de *redshifts* cobertos, ou seja, $z = 0,7$ para SNs Ia e $z = 1,0$ para $H(z)$. A Figura 4.3 mostra as estimativas de H , q , j e s nestes *redshifts* para SNs Ia e $H(z)$. A Figura 4.3 (D) mostra que os resultados se tornam incompatíveis para $z = 0,7$, evidenciando as tensões entre os dados de SNs Ia e $H(z)$.

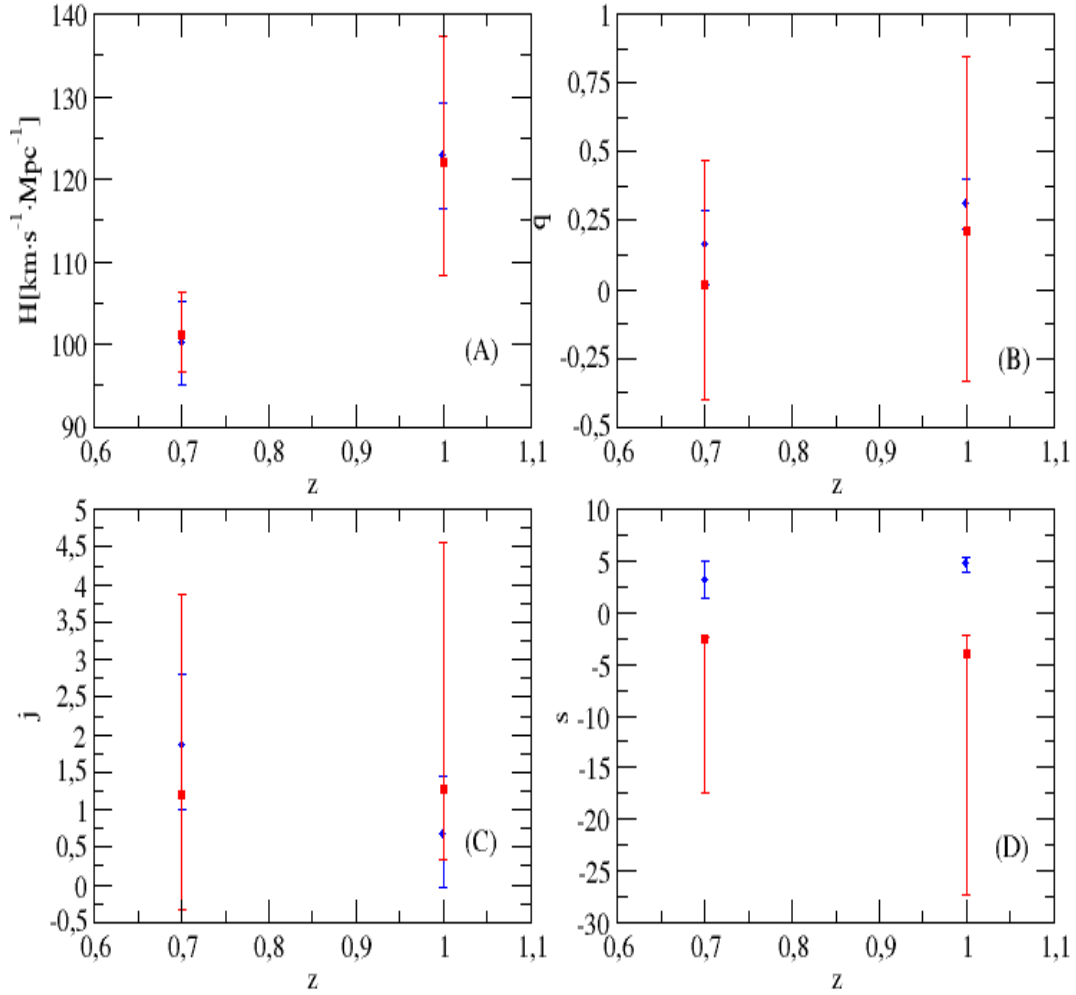


Figura 4.3: Resultados de maior confiança para os parâmetros cosmológicos H (A), q (B), j (C) e s (D) para os dados de SNs Ia ($z = 0,7$), linha vermelha, e dados de $H(z)$ ($z = 1,0$), linha azul.

Capítulo 5

Conclusões

Após a descoberta no final da década de 1990 de que o Universo encontra-se numa fase de expansão acelerada [7, 8], a cosmologia vem passando por um momento de grande transformação. Uma vez que explicação teórica mais simples para a atual fase de aceleração cósmica do Universo, a constante cosmológica, apresenta uma grande discrepância entre o valor obtido das observações e o valor previsto teoricamente, torna-se crucial desenvolver novos métodos para explicar a atual fase de aceleração cósmica. Dentre os novos métodos que vem sendo desenvolvidos para compreender a atual fase de expansão acelerada do Universo, a Cosmografia surge como o caminho mais simples, visto que supõe apenas a validade do princípio cosmológico.

Nesta dissertação utilizamos a Cosmografia para estimar a evolução temporal dos parâmetros cosmográficos H , q , j e s utilizando o método proposto por Barboza e Cabral [9]. Para isso realizamos duas análises: uma para distâncias de SNs Ia e outra para dados de $H(z)$.

Os resultados fornecidos através da análise de distância de SN Ia estão de acordo com o esperado teoricamente. O vínculo sobre H_0 é consistente com os seu valor observado. Não foi possível estipular, a partir dos resultados extraídos para q , o intervalo em que encontra-se o *redshift* de transição, uma vez que $q < 0$ é compatível em todo intervalo de *redshifts* coberto na análise. Para baixos *redshifts* j e s fornecem resultados de baixa significância estatística. Para altos- z , os vínculos sobre estes parâmetros estão de acordo com os resultados que devem ser obtidos quando o Universo passa a ser dominado pela matéria com $j \rightarrow 1$ e $s \rightarrow -3,5$ neste regime. Ressalta-se ainda que os resultados obtidos a partir dos dados de SNs Ia são inteiramente compatíveis com o modelo Λ CDM.

Os resultados fornecidos dos dados de $H(z)$ mostraram-se inconsistentes com o esperado teoricamente, $q \rightarrow 1/2$, $j \rightarrow 1$ e $s \rightarrow -3.5$, para altos- z . Apenas os valores extraídos para H mostraram-se consistentes com os resultados obtidos a partir dos dados de SNs Ia em todo intervalo de z estudado. O parâmetro desaceleração começa a decrescer a partir de $z > 1,1$ em desacordo com a previsão teórica e os resultados de SNs Ia. Os vínculos sobre j obtidos dos dados de $H(z)$ começam a diferir dos obtidos dos dados de SNs Ia para $z > 1,1$ tornando-se inclusive negativo. Para s , a diferença entre o resultados obtidos dos dados de $H(z)$ e de SNs Ia tem início em $z > 0,6$.

A tensão existente entre os dados de SNs Ia e os dados de $H(z)$ torna incompatível a utilização em conjunto desses dados para impor vínculos sobre os parâmetros cosmológicos a partir de $z > 0,6$. Talvez as tensões entre os dados se deva ao fato do pequeno número de medidas de $H(z)$ disponíveis atualmente, uma vez que há aproximadamente 16 vezes mais dados de SNs Ia do que de $H(z)$. Assim sendo, não devemos interpretar a incompatibilidade dos resultados obtidos dos dados de $H(z)$ com o modelo Λ CDM como uma evidência contrária a este modelo.

Futuramente pretendemos repetir as análises utilizando dados simulados de $H(z)$ para investigar se a tensão entre os dados de SNs Ia e de $H(z)$ persiste.

Referências Bibliográficas

- [1] A. EINSTEIN, Ann. Physik, **17** , 891, 1905.
- [2] A. EINSTEIN, Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber, **844**, 1915
- [3] A. EINSTEIN, Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber, **142**, 1917.
- [4] W. de SITTER, Pro . Akad. Weteus h. Amasterdam, **19**, 1217, 1917.
- [5] E. HUBBLE, Pro . Nat. A ad. S i. (U.S.A.), **15**, 168, 1929.
- [6] A. A. PENZIAS e R. W. WILSON, Ap. J.,**142**, 419, 1965.
- [7] A. G. RIESS et al., *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant*, The Astronomical Journal, **116**, 1009-1038, 1998.
- [8] S. PERLMUTTER et al., *Measurements of Ω and Λ From 42 High-Redshift Supernovae*, *The Astronomical Journal*, **516**, 565-586, 1999.
- [9] E. M. BARBOZA JR., F.C. CARVALHO, *A Kinematic Method to Probe Cosmic Acceleration*, Physics Letters B, **715**, 19-24, 2012.
- [10] O. LUONGO, *Cosmography With The Hubble Parameter*, Modern Physics Lettes A, **20**, 1459 - 1466, 2011.
- [11] L. XU, Y. WANG., *Cosmography: Supernovae Union2, Baryon Acoustic Oscillation, Observational Hubble Data and Gamma Ray Bursts*, Physics Letters B, **702**, 114 - 120, 2011.
- [12] C. CATTOEN, M. VISSER, *The Hubble series: convergence properties and redshift variables*, Classical and Quantum Gravity, **24**, 23, 5985, 2007.
- [13] S. CAPOZZIELLO et al., *Cosmographic Constraints and Cosmic Fluids*, Galaxies, **1(3)**, 216 - 260, 2013.
- [14] WEINBERG, S., Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity,LTC editora,LTC editora,Massachusetts, 1972, único,0-471-92567-5,
- [15] D'INVERNO, R., Introducing Einstein's Relativity,Oxford University Press Inc.,New York, 1992, único,Primeira Edição,0 19 859653 7.
- [16] RYDEN, B., Introdution to Cosmology, Addison Wesley,Ohio.

- [17] P. A. R. ADE et al., *Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters*, [arXiv:1502.01589v2].
- [18] J. A. FRIEMAN, M. S. TURNER, D. HUTERER, *Dark Energy and the Accelerating Universe*, arXiv:0803.0982 [astro-ph].
- [19] AMENDOLA, L. e TSUJIKAWA, S., *DARK ENERGY: Theory and Observations*, Cambridge University Press, New York, 2010, Volume Único, Primeira Edição, 978-0-511-75008-3.
- [20] V.B. JOHRI, P.K. RATH, *Dynamical age of the universe as a constraint on the parametrization of the dark energy equation of state*, Phys. Rev. D, **74**,123516, 2006.
- [21] E.M. BARBOZA JR., J.S. ALCANIZ, *A parametric model for dark energy*, Phys. Lett. B,**666**, 415, 2008.
- [22] E.M. BARBOZA JR., et al., *Generalized equation of state for dark energy*, Phys. Rev. D, **80**, 043521, 2009.
- [23] S. NOJIRI, S. D. ODINTSOV.,*Modified gravity with negative and positive powers of curvature: Unification of inflation and cosmic acceleration*, Phys. Rev. D, **68**, 2003, 0307288, 2003.
- [24] S. CAPOZZIELLO, V. F. CARDON, A. TROISI,*Reconciling dark energy models with $f(R)$ theories*, Phys. Rev. D, **71**, 0501426, 2005.
- [25] WEINBERG, S., *Cosmology*, Oxford University Press Inc., New York, 2008, Volume Único, Primeira Edição, 978-0-19-85268277.
- [26] BASSALO, J. M. F., CATTANI, M. S. D., *Elementos de Física Matemática*, Livraria da Física, São Paulo, 2010, Volume 1, Primeira Edição, 10-02370.
- [27] BRAGA, C. L. R., *Notas de Física Matemática: Equações Diferenciais, Funções de Green e Distribuições*, Livraria da Física, São Paulo, 2006, Volume Único, Primeira Edição, 06-2321.
- [28] A. V. FILIPPENKO, A. G. RIESS, *Results from the High- z Supernova Search Team*, Physics Reports, **307**, 31-44, 1998.
- [29] D. J. EISENTEIN et al., *Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies*, The Astrophysical Journal, **633**, 560-574, 2005.
- [30] E. GAZTANÁGA, A. CABRÉ, L. HUI, *Clustering of Luminous Red Galaxies IV: Baryon Acoustic Peak in the Line-of-Sight Direction and a Direct Measurement of $H(z)$* , Mon.Not.Roy.Astron.Soc., **399**, 1663 - 1680, 2009.
- [31] C. BLAKE et al.,*The WiggleZ Dark Energy Survey: Joint measurements of the expansion and growth history at $z < 1$* , Mon. Not. R. Astron. Soc., **425**, 405 - 414, 2012.

- [32] X. XU et al., *Measuring DA and H at $z = 0.35$ from the SDSS DR7 LRGs using baryon acoustic oscillations*, arXiv:1206.6732 [astro-ph.CO].
- [33] L. SAMUSHIA et al., *The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: measuring growth rate and geometry with anisotropic clustering*, MNRAS, **439**, 3504 - 3519, 2014.
- [34] N. G. BUSCA et al., *Baryon acoustic oscillations in the Ly α forest of BOSS quasars*, *Astronomy Astrophysics*, **552**, 18, 2013.
- [35] A. FONT-RIBERA et al., *Quasar-Lyman α Forest Cross-Correlation from BOSS DR11 : Baryon Acoustic Oscillations*, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, **2014**, 05, 27, 2014.
- [36] T. DELUBAC et al., *Baryon acoustic oscillations in the Ly α forest of BOSS DR11 quasars*, *Astronomy Astrophysics*, **574**, 17, 2015.
- [37] R. JIMENEZ, A. LOEB, *Constraining Cosmological Parameters Based on Relative Galaxy Ages*, *The Astrophysical Journal*, **573**, 37 - 42, 2002.
- [38] R. JIMENEZ et al., *Constraints on the equation of state of dark energy and the Hubble constant from stellar ages and the CMB*, *The Astrophysical Journal*, **593**, 622 - 629, 2003.
- [39] J. SIMON, L. VERDE, R. JIMENEZ, *Constraints on the redshift dependence of the dark energy potential*, *Phys. Rev. D*, **71**, 123001, 18, 2005.
- [40] D. STERN et al., *Cosmic Chronometers: Constraining the Equation of State of Dark Energy. II. A Spectroscopic Catalog of Red Galaxies in Galaxy Clusters*, *The Astrophysical Journal Supplement Series*, **188**, 280 - 289, 2010.
- [41] M. MORESCO et al., *Improved constraints on the expansion rate of the Universe up to $z \sim 1.1$ from the spectroscopic evolution of cosmic chronometers*, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, **2012**, 08, 006, 2012.
- [42] H. C. CHUANG, Y. WANG, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **426**, 226, 2012.
- [43] C. ZHANG et al., *Res. Astron. Astrophys.*, **14**, 1221, 2014.
- [44] M. MORESCO, *Raising the bar: new constraints on the Hubble parameter with cosmic chronometers at $z > 2$* , arXiv:1503.01116 [astro-ph.CO].
- [45] ARFKEN, G. B., *Física matemaica: métodos matemáticos para engenharia e física*, Elsevier Editora Ltda., Rio de Janeiro, 2007, Volume 1, Sexta Edição, 978-85-352-2050-6.
- [46] L. VERDE, *Statistical methods in cosmology*, *Lect. Notes Phys.*, **800**, 147, 2010.
- [47] N. SUZUKI et al., *The Hubble Space Telescope Cluster Supernova Survey. V. Improving the Dark-energy Constraints above $z > 1$ and Building an Early-type-hosted Supernova Sample*, *The Astrophysical Journal*, **746**, 1, 85, 2012.

- [48] X.-L. MENG et al., *Utility of observational Hubble parameter data on dark energy evolution*, arXiv:1507.02517 [astro-ph.CO].
- [49] A. REISS et al., *A 3% Solution: Determination of the Hubble constant with the Hubble Space Telescope and Wide Field Camera 3*, APJ, **730**, 119, 2011.