

Universidade do Estado do Rio Grande do Norte

Antônio Dgerson Pereira da Costa

**Uma Proposta de Função de Distribuição da Rotação Estelar
com Limite de *Break-Up***

Mossoró, março de 2011

Antônio Dgerson Pereira da Costa

**Uma Proposta de Função de Distribuição da Rotação Estelar
com Limite de *Break-Up***

Dissertação apresentada à
Universidade do Estado do
Rio Grande do Norte como
um dos pré-requisitos para
obtenção do título de
MESTRE em **FÍSICA**

Orientador: Prof. Dr. José Ronaldo Pereira da Silva
Co-orientador: Prof. Dr. Bráulio Batista Soares

Mossoró, março de 2011

Catálogo da Publicação na Fonte.

Costa, Antônio Dgerson Pereira.

Uma Proposta de função de distribuição da rotação estelar com limite de Break - up do serviço de atendimento móvel de urgência./ Antônio Dgerson Pereira da Costa. Mossoró, RN, 2011

52 f.

Orientador(a): Prof . Dr. José Ronaldo Pereira da Silva.

Dissertação (Mestrado) Universidade do Estado do Rio Grande do Norte. Mestrado de Física.

1. Física - Dissertação. 2. Rotação - Dissertação. 3. Distribuição - Dissertação. 4. Associações Estelares - Dissertação.

I. Silva, José Ronaldo Pereira da. II. Universidade do Estado do Rio Grande do Norte. III. Título.

UERN/BC

CDD 614

Bibliotecário: Sebastião Lopes Galvão Neto CRB 15 / 486

Antônio Dgerson Pereira da Costa

**Uma Proposta de Função de Distribuição da Rotação Estelar
com Limite de *Break-Up***

Dissertação apresentada à
Universidade do Estado do
Rio Grande do Norte como
um dos pré-requisitos para
obtenção do título de
MESTRE em FÍSICA

Aprovada em ____ / ____ / ____

Banca Examinadora:

Prof. Dr. José Ronaldo Pereira da Silva
Universidade do Estado do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Bráulio Batista Soares
Universidade do Estado do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Daniel Brito de Freitas
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte

Para pessoas especiais

Meus Pais

Francisco José da Costa Filho
Maria Irismar Pereira da Costa

Meus Irmãos

Deibson José Pereira da Costa
Deise Pereira da Costa

Minha noiva

Joselina da Silva

Minha Sobrinha

Alice da Silva Costa

Agradecimentos

- Primeiramente A **DEUS**, que todos os dias de minha vida me deu forças para nunca desistir.
- Ao meu orientador, **Prof. José Ronaldo Pereira da Silva**, com quem aprendi inúmeras coisas, muitas em relação à nossa atividade de pesquisa e tantas outras da vida. Além da belíssima orientação, apoio, amizade e dedicação, Esteve sempre disponível para ouvir minhas dúvidas e tecer palavras de incentivo. Agradeço também pelos bons comentários e sugestões que me facultou durante todas as fases desta dissertação. Obrigado, Professor;
- Ao meu Coorientador, **Prof. Bráulio Batista Soares** que contribuiu de modo significativo para a realização deste trabalho, principalmente na fase final dos testes;
- Agradeço a meus tios **Raimundo Irã, Raimundo Ivã e Aerson Moreira Barreto**, as minhas tias **Aila Maria e Maria Iraídes** que sempre me apoiaram e incentivaram nesta luta. Agradeço também a meus avós **Maria Pereira Gomes e Raimundo Nonato de Sousa**, os quais sempre torceram por mim;
- A toda minha família, principalmente a meus pais **Francisco José da Costa Filho e Maria Irismar Pereira da Costa** pelos ensinamentos que me fizeram ser quem sou. Estes sim, são mestres e vitoriosos na arte de viver. Tenho muita sorte em tê-los como pais. Sem o apoio, compreensão e amor que têm por mim, eu nunca chegaria ao final deste objetivo. Muito obrigado;
- A todos os Professores do curso de licenciatura em Física da **UERN** e do Programa de Pós-Graduação em Física que contribuíram de maneira significativa para a minha formação profissional;
- A todos os meus colegas de Graduação e Pós-Graduação pelos momentos de companheirismo, alegria e felicidades;
- A CAPES pelo apoio financeiro;
- A todos os que me ajudaram chegar até aqui, obrigado;

Se consegui enxergar mais longe, foi por que me apoiei em ombros de gigantes

Isaac Newton

Resumo

Neste trabalho é proposta uma nova função de distribuição da velocidade de rotação estelar que leva em consideração o limite de *break-up*. Essa função é generalizada no contexto da mecânica estatística não-extensiva, de modo que reproduz a função original no limite quando q tende para 1,0. A função, assim elaborada, é definida no limite onde $v \sin i < v_b$ e para $\sigma > \sqrt{1 - q}$, quando $q < 1$, onde σ é uma função do raio polar e equatorial da estrela e v_b é a velocidade de *break-up*. Aplica-se a função de distribuição para análise estatística da distribuição da rotação de uma amostra de 137 estrelas da associação de Sco OB2, sendo 50 estrelas simples e 87 estrelas binárias. O maior valor de q foi apresentado pela distribuição das estrelas simples, i. e., $q = 1,7$, enquanto para as estrelas binárias o resultado foi $q = 1,1$. Quando analisada todas as estrelas de Sco OB2, simples e binárias, o resultado foi $q = 1,2$. Embora esses valores do parâmetro q ainda precisem de confirmação com base em um estudo mais detalhado, este trabalho permite mostrar fortes indícios de que a distribuição da rotação das estrelas em regime de altas rotações tendem a serem mais bem descritas pela estatística não-extensiva.

Palavras-chave: Rotação; Distribuição; Estatística Não-Extensiva; Associações Estelares.

Abstract

In this work is proposed a new distribution function of the rotational stellar velocity by considering the break-up limit. That distribution function is generalized into non-extensive statistical context in order to reproduce the original function in limit when q tends to 1.0. The function is defined in the interval $v_{\text{sen } i} < v_b$, and $\sigma > \sqrt{1 - q}$, to $q < 1$, where σ is a function of polar and equatorial radius of the star, and v_b is the break-up stellar velocity. One applies the distribution function to make a statistical analysis of the rotational distribution of a sample of 137 stars from Sco OB2 association, from which 50 are single stars and 87 are binary stars. The largest value of q -parameter was derived to the distribution of single stars, i. e., $q = 1.7$, while for the binary stars rotational distribution the result was $q = 1.1$. When analyzed all the stars from Sco OB2, simple and binary stars together, the result was $q = 1.2$. Although these results of the q -parameter need to be confirmed based on a more detailed study, this work presents strong indications that the distribution of rotational stellar velocity in the high rotation regime tends to be better described by non-extensive statistical.

Keywords: Rotation; Distribution; Non-extensive Statistical; Stellar Associations.

Lista de Figuras

3.1	<i>Estrela rotacionando como um corpo sólido. O eixo de rotação é inclinado um ângulo i com relação à linha de visada, eixo z. O vetor $\vec{\omega}$ está sobre o plano $y - z$. Para um ponto qualquer da superfície, definido por um vetor \vec{R}, a velocidade é $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$</i>	14
3.2	<i>Alargamento de uma linha espectral com a rotação. Perfil médio da linha do FeI, $\lambda = 4476\text{Å}$. Os parâmetros atmosféricos, bem como o perfil correspondente a cada rotação estão indicados na figura. Fonte: Mora, A. et al. 2001, A & A 378, 116-131</i>	15
3.3	<i>Comportamento da velocidade de break-up com o tipo espectral da estrela. Fonte: Slettebak, A.1966, ApJ, 145, 126</i>	16
7.1	<i>Comportamento dos termos da função 7.1 para diferentes valores de q e $\sigma = 1$. O conjunto de curvas inferior é a primeira parcela e o conjunto superior é a segunda parcela da função. As curvas em destaque correspondem a $q = 1$. Os valores de q utilizados variam de 0 a 2</i>	37
7.2	<i>Comportamento da função 7.1 para diferentes valores de q, com $\sigma = 1$. A curva tracejada corresponde a $q = 1$. Os valores de q utilizados variam de 0 a 2 . Observa-se a existência de uma correlação entre o valor de q e a moda da distribuição.</i>	38
7.3	<i>Distribuição da velocidade de rotação, $v \sin i$. Linha tracejada: todas as estrelas da amostra, 137 objetos, e passo igual 0,155; linha pontilhada: estrelas simples, 50 objetos e passo igual a 0,206; linha contínua: estrelas binárias, 87 objetos e passo igual a 0,171.</i>	41
7.4	<i>Distribuição da velocidade de rotação relativa, $v \sin i / v_b$, para as estrelas simples . A linha pontilhada representa o histograma dos dados observacionais, com 50 objetos e passo igual 0,206. A linha contínua representa a curva de melhor ajuste para a função 7.1 com com parâmetros $q = 1,7$ e $\sigma = 0,70$. A linha tracejada indica o melhor ajuste da função 7.1, com $q = 1,0$ e $\sigma = 0,20$.</i>	42

7.5 *Distribuição da velocidade de rotação relativa, $v_{sen i}/v_b$, para as estrelas binárias da amostra. A linha pontilhada representa o histograma dos dados observacionais, com 87 objetos e passo igual 0,171. A linha contínua representa a curva de melhor ajuste para a função 7.1 com com parâmetros $q = 1,1$ e $\sigma = 0,30$. A linha tracejada indica o melhor ajuste da função 7.1, com $q = 1,0$ e $\sigma = 0,70$ 44*

7.6 *Distribuição da velocidade de rotação relativa, $v_{sen i}/v_b$, para todas as estrelas da amostra. A linha pontilhada representa o histograma dos dados observacionais, com 137 objetos e passo igual 0,155. A linha contínua representa a curva de melhor ajuste para a função 7.1 com com parâmetros $q = 1,2$ e $\sigma = 0,30$. A linha tracejada indica o melhor ajuste da função 7.1, com $q = 1,0$ e $\sigma = 0,30$ 45*

Lista de Tabelas

6.1	Dados observacionais para as estrelas da associação Sco OB2, extraídas de Brown & Verschueren [1].	32
-----	--	----

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xii
1 Introdução	2
2 Mecânica Estatística Não-Extensiva	5
2.1 Conceito de entropia	5
2.2 Extensividade e aditividade	6
2.3 Estatística não-extensiva	7
2.4 Formalismo matemático da mecânica estatística não-extensiva	8
3 Rotação estelar	12
3.1 Velocidade de rotação projetada v sen i	13
3.2 Limite de <i>break-up</i>	14
4 A função de distribuição da rotação estelar	17
4.1 A função de distribuição segundo Deutsch	18
4.2 A distribuição das rotações segundo Soares <i>et al.</i> : a contribuição da mecânica estatística não-extensiva	22
5 Distribuição da rotação com limite de <i>break-up</i>	26
6 A amostra	30
7 Resultados e discussões	36
8 Conclusões e perspectivas	47
A Obtendo a função $\phi_q(y)$	49
Referências Bibliográficas	52

Capítulo 1

Introdução

Contexto

A Rotação é um fenômeno universal, pois manifesta-se desde os pequenos átomos até às gigantescas galáxias. As estrelas apresentam uma grande diversidade de rotações, que vão de valores menores que 10 km s^{-1} (estrelas do tipo M) até muitas centenas de quilômetros por segundo. (estrelas do tipo Be). A rotação está presente em todos os estágios da evolução estelar e influencia uma grande variedade de fenômenos que têm lugar nas estrelas. Ela afeta a formação estelar, os processos de nucleossíntese e mistura convectiva de elementos químicos, o campo magnético e a perda de massa por vento estelar. Em sistemas binários e planetários, a rotação também influencia a evolução dos elementos orbitais, via transferência de *momentum* angular. Uma discussão geral sobre fenômenos relacionados à rotação estelar pode ser encontrada em [2].

O problema da distribuição estatística da velocidade de rotação estelar está em discussão há mais de meio século. No contexto dessa discussão, duas importantes perguntas ainda permanecem sem respostas. Como se distribui o *momentum* angular de uma nuvem que dá origem a várias estrelas? Qual a lei físico-estatística que descreve essa distribuição? Para responder a essas perguntas é necessário conhecer qual a função de distribuição das velocidades rotacionais das estrelas. Desde os trabalhos pioneiros desenvolvidos por Struve [3] e Chandrasekhar & Münch [4], várias funções de distribuição estatística da rotação estelar foram propostas. Utilizando argumentos da mecânica estatística de Maxwell-Boltzmann, Deutsch [5] sugeriu uma função baseada numa distribuição maxwelliana. Essa função descreve relativamente bem a distribuição dos dados observacionais de rotação, justificando sua boa aceitação pela comunidade astrofísica há quase quatro décadas.

O sucesso da estatística não-extensiva proposta por Tsallis [6] em reproduzir as funções de distribuição de diferentes sistemas físicos, motivaram Soares *et al.* [7] a apresentar uma nova função de distribuição das velocidades de rotação estelar baseada numa q -maxwelliana, ou seja, uma generalização da função maxwelliana proposta por Deutsch no contexto da mecânica estatística não-extensiva. A nova função foi testada para uma amostra de 219 estrelas do aglomerado das Plêiades e apresentou os melhores resultados

quando comparada à função proposta por Deutsch. A despeito dos excelentes resultados da função de distribuição proposta por Soares *et al.* [7] (idem Deutsch [5]), nenhum limite superior para a velocidade de rotação estelar é imposto. A velocidade de rotação de qualquer estrela apresenta um limite bem definido, a sua velocidade de *break-up*, v_b , que é função do raio e da massa da estrela. Uma rotação acima do limite de *break-up* tornará a estrela instável e sua auto-gravidade não será suficiente para impedir a fragmentação. Portanto, qualquer função de distribuição da velocidade rotacional deve excluir a possibilidade de uma estrela girar com rotação maior do que seu limite de *break-up*. Mais especificamente, a função de distribuição deve ser nula para todo valor de rotação maior que v_b .

O presente trabalho desenvolve uma função de distribuição estatística da velocidade rotacional estelar baseada na estatística não-extensiva e considerando-se o limite de *break-up*. Inicialmente, um limite superior da rotação é imposto à função de distribuição proposta por Deutsch, e em seguida, o resultado é generalizado. A nova função é usada para analisar a distribuição de uma amostra de 137 estrelas da associação de Escorpião-Centauro OB2 (Scorpion OB2). Os resultados da análise apontam para um comportamento não-extensivo da distribuição da rotação das estrelas da associação.

Objetivo

Determinar a função de distribuição da velocidade de rotação estelar no contexto da estatística não-extensiva considerando o limite de *break-up* das estrelas.

Contribuições

As principais contribuições deste trabalho estão relacionadas abaixo:

- Imposição de um vínculo físico à função de distribuição das velocidades de rotação;
- Determinação da função de distribuição que descreva o comportamento das velocidades de rotação de estrelas, considerando a velocidade de *break-up*;
- Aplicação da estatística não-extensiva à sistemas astrofísicos; particularmente à objetos com alta rotação, utilizando a nova função;
- Procurar por indícios de não-extensividade na distribuição das estrelas da associação de Escorpião-centauro OB2;

Organização do trabalho

No Capítulo 2, apresenta-se os conceitos básicos envolvendo a mecânica estatística não-extensiva. Em seguida, nos capítulos 3 e 4, apresenta-se um resumo sobre a velocidade de rotação estelar e sua distribuição estatística, bem como se discute o modelo de Roche e o limite de *break-up* da rotação estelar. No Capítulo 5, é deduzida a função de distribuição

proposta neste trabalho. A amostra utilizada para o estudo do comportamento da rotação das estrelas da associação de Escorpião OB2 é apresentada no Capítulo 6. Apresenta-se e se discute os resultados do presente estudo no Capítulo 7 e as Conclusões e Perspectivas são apresentadas no Capítulo 8. Por fim, o Apêndice A mostra a dedução matemática da função de distribuição apresentada no Capítulo 5.

Capítulo 2

Mecânica Estatística Não-Extensiva

2.1 Conceito de entropia

A estatística é a ciência do saber incompleto. Ela diz como podemos obter o máximo de informações quando não conhecemos plenamente um sistema. Os sistemas materiais, com os quais temos contato através de nossos sentidos, são constituídos por um número muito grande de partículas, da ordem de $6,02252 \times 10^{23}$ (número de Avogadro). Essas partículas obedecem as leis da Mecânica (newtoniana), porém, no caso de um sistema com essa quantidade de constituintes, o número de equações do movimento a serem resolvidas é tão grande que tornaria inviável uma abordagem segundo à Mecânica.

A junção de ambas, Mecânica e Estatística, permite criar um atalho e tornar o cálculo factível: daquele enorme número de informações microscópicas é possível extrair poucas e úteis informações macroscópicas. Prenúncios da Mecânica Estatística já apareciam nos trabalhos do físico escocês James Maxwell (1831-1879) e sua formulação ganhou uma base mais sólida graças ao físico austríaco Ludwig Boltzmann (1844-1906), pouco mais tarde ampliada pelo físico norte-americano Josiah Gibbs (1839-1903), sendo seu conceito primordial a entropia.

A compreensão e utilização do conceito de entropia são fundamentais para a análise de sistemas estatísticos. A entropia fornece a conexão entre a descrição microscópica e a descrição macroscópica dos sistemas físicos. O conceito de entropia, que está associado à medida do grau de desordem em sistemas termodinâmicos, foi formulado por Boltzmann, o qual no final do Século XIX introduziu a seguinte expressão:

$$S = - \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i. \quad (2.1)$$

O parâmetro p_i é a probabilidade do sistema ser encontrado no microestado i , e W o número total de microestados acessíveis. Quando os estados são equiprováveis, $p_i = 1/W$,

têm-se a seguinte expressão para a entropia¹:

$$S = \ln W. \quad (2.2)$$

E para um contínuo de estados possíveis x , a entropia pode ser expressa como

$$S = - \int p(x) \ln p(x) dx. \quad (2.3)$$

O conceito de entropia, assim definido, é a base para determinar a extensividade ou não-extensividade de um sistema, e depende da forma pela qual as entropias dos subsistemas podem ser somadas.

2.2 Extensividade e aditividade

Os conceitos de aditividade e extensividade estão relacionados. Se um sistema A está associado a uma quantidade $S(A)$, esta quantidade é dita aditiva, em relação a uma lei de composição particular, se a seguinte regra, é obedecida:

$$S(A + B) = S(A) + S(B). \quad (2.4)$$

Isso é verdadeiro para a maioria dos sistemas físicos, quando sob a hipótese de se poder desprezar as interações entre os elementos dos diferentes subsistemas que o compõe. Em particular, não é verdadeiro para sistemas com interações de longo alcance. No caso de N subsistemas diferentes, a relação pode ser escrita de forma mais geral como segue:

$$S \left(\sum_{i=1}^N A_i \right) = \sum_{i=1}^N S(A)_i.$$

Para o caso especial onde os subsistemas são iguais, $A_i = A$, tem-se:

$$S \left(\sum_{i=1}^N A_i \right) = S(NA) = NS(A)..$$

Por outro lado o conceito de extensividade requer a observância da seguinte relação:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|S(N)|}{N} < \infty.$$

Ou seja, um sistema extensivo tem um comportamento assintótico com o número de subsistemas N , tal que existe um fator de proporcionalidade finito entre $S(N)$ e N . Mais precisamente, a aditividade, em relação a uma dada lei de composição, implica em extensividade. Portanto, um sistema extensivo é considerado assintoticamente aditivo.

¹A expressão completa é $S = k_b \ln W$, onde k_b é a constante de Boltzmann. No caso acima adotou-se $k_b = 1$.

Nos problemas clássicos da Mecânica Estatística, a entropia é uma grandeza extensiva. Isto significa que quando o volume do sistema muda, a entropia muda proporcionalmente devido à independência entre diferentes regiões do sistema. No entanto, a hipótese da extensividade da entropia não se verifica para sistemas com interação de longo alcance, ou em eventos que envolvem um longo tempo de relaxação. Nesses sistemas, a aproximação ao equilíbrio é tão lenta que a extensividade não pode ser encontrada na prática. Tais sistemas, onde não se verifica a extensividade da entropia, são ditos complexos [8]

2.3 Estatística não-extensiva

Há muito tempo se sabe que a estatística de Boltzmann é inadequada para o tratamento de sistemas complexos, apesar do seu sucesso em descrever sistemas simples. Embora não se possa ainda descrever completamente os sistemas complexos, a estatística denominada não-extensiva tem se mostrado um caminho promissor. A estatística não-extensiva consiste de uma generalização da Mecânica Estatística proposta por Boltzmann-Gibbs e foi utilizada com sucesso para descrever quantitativamente vários sistemas complexos, como sistemas altamente turbulentos (ciclones e tornados) [9], gravitacionais (aglomerados multi-estelares) [10], sistemas de altas energias (raios cósmicos) [11], [12], terremotos [13], comportamento oscilatório de aplicações financeiras [14], trânsito de informações pela internet [15]² e distribuição da rotação estelar [7].

Para entender como a Mecânica Estatística Não-extensiva trata sistemas complexos, considere-se dois conceitos essenciais da Física: energia e entropia. A energia obedece a uma lei de conservação, não sendo possível criá-la nem destruí-la, ela apenas muda de forma. A entropia, por sua vez, obedece a uma lei de evolução. Os sistemas naturais possuem uma tendência espontânea para o estado de equilíbrio, e, graças a essa tendência, sua entropia sempre cresce. A entropia é uma medida do grau de desordem e do ponto de vista estatístico, os estados desordenados são mais prováveis que aqueles ordenados. A energia está relacionada com as possibilidades de um sistema encontrar-se em determinado estado, enquanto a entropia diz respeito às probabilidades de ocorrência desses estados. Para W possibilidades, a entropia, segundo a estatística de Boltzmann é dada por:

$$S = k \ln W. \quad (2.5)$$

Essa expressão matemática mostra que a entropia cresce com o número de possibilidades W apresentada pelo sistema. Por outro lado, sabemos que o número W cresce com a energia, ou seja, a entropia sempre cresce com aumento da energia. O quão rapidamente ocorre esse crescimento depende de cada sistema. Quando os sistemas são simples, o crescimento ocorre como prevê a equação de Boltzmann: com o logaritmo do número de possibilidades W , mesmo que as possibilidades cresçam rapidamente, a desordem avança

²Para uma referência completa sobre as aplicações da estatística Não-Extensiva visite a *homepage* <http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm>.

lentamente.

Já nos casos complexos, a desordem pode crescer mais rápido, ou mais lentamente em relação à função logarítmica. A rapidez com que cresce a desordem, a medida que aumenta o número de possibilidades de um sistema complexo, é diferente da velocidade de crescimento verificada nos sistemas simples.

2.4 Formalismo matemático da mecânica estatística não-extensiva

O formalismo básico da mecânica não-extensiva constitui uma generalização da entropia de Boltzmann-Gibbs, ou seja, em situações específicas ela recupera a abordagem da estatística de Boltzmann-Gibbs. O formalismo foi inicialmente apresentado como uma possibilidade técnica para a descrição de sistemas anômalos envolvendo interações de longo alcance, efeitos de memória microscópica efetiva e comportamento (multi) fractal. Segundo o formalismo proposto por Tsallis, o postulado para a forma entrópica é dado por

$$S = k_B \frac{1 - \sum_{i=1}^w p_i^q}{1 - q}, \quad (2.6)$$

onde $\sum_{i=1}^w p_i = 1$, $q \in R$, k_B é a constante de Boltzmann, W o número total de possibilidades microscópicas e p_i é a probabilidade de ocorrência da i -ésima configuração, com energia ϵ_i . A soma é feita sobre todas as probabilidades possíveis e q é um parâmetro livre, que descreve o grau de não-extensividade do sistema. Para estados equiprováveis, a entropia é descrita pela seguinte equação:

$$S = k_B \frac{W^{1-q} - 1}{1 - q}. \quad (2.7)$$

Esta equação tem a forma de uma lei de potência em W , onde o expoente é dado por $(1 - q)$, o que leva a três situações possíveis, relacionando o índice entrópico (q) e a desordem (S_q):

1. Se $q < 1$, a desordem cresce mais rapidamente que o logaritmo de W .
2. Se $q > 1$, a desordem cresce mais lentamente (entretanto é sempre crescente).
3. Se $q = 1$, a equação da entropia recupera a forma estabelecida por Boltzmann, sendo portanto o caso particular da entropia de Boltzmann-Gibbs.

É importante ressaltar que a mecânica estatística não-extensiva é uma generalização da estatística de Boltzmann-Gibbs e não uma alternativa a esta. É, portanto, uma ampliação do domínio de validade da estatística extensiva.

A entropia generalizada como proposta por Tsallis [6], não obedece à regra de aditividade conforme é imposto pelo terceiro postulado fundamental da termodinâmica.

Considerando um sistema formado por dois subsistemas independentes (A) e (B), o terceiro postulado estabelece que a entropia do sistema é dada pela soma das entropias de cada subsistema, ou seja:

$$S(A + B) = S(A) + S(B).$$

Na formulação de Tsallis, a entropia generalizada do sistema é dada pela seguinte relação,

$$S_q(A + B) = S_q(A) + S_q(B) + (1 - q)S_q(A)S_q(B), \quad (2.8)$$

onde o parâmetro q é o índice entrópico que caracteriza a generalização. É evidente que o caso $q = 1$ recupera a aditividade, conforme é estabelecida pelo terceiro postulado.

Outros parâmetros, além da entropia, também podem ser generalizados no formalismo de Tsallis. É comum utilizar-se o índice q para se referir à generalização e o índice B-G representar a estatística usual, de Boltzmann-Gibbs. O termo $(1 - q)$ é uma medida da não aditividade (também referida como não-extensividade) do sistema. Se $q < 1$, o sistema é dito super-aditivo, $S_q(A + B) > S_{BG}(A + B)$, e se $q > 1$, o sistema é sub-aditivo $S_q(A + B) < S_{BG}(A + B)$.

Em termos físicos, o desvio do novo formalismo com relação à aditividade representa o rompimento com o conceito de sistema isolado. Um sistema isolado é aquele que não troca energia, matéria ou informações com sua vizinhança. Sendo o sistema ($A \cup B$) formado pela união dos subsistemas independentes (A) e (B), o termo $S(A)$ representa a entropia do subsistema (A) antes de ter contato com o subsistema (B), sendo portanto um subsistema isolado. Idem para o subsistema $S(B)$. Quando colocados em contato, cada subsistema contribui com parte da entropia para o sistema composto por eles. Na equação 2.8, é como se na formação do sistema ($A \cup B$), o sub-sistema (A) contribuísse com $S_q(A)[1 + \frac{1}{2}(1 - q)S_q(B)]$ e o sub-sistema (B) contribuísse com $S_q(B)[1 + \frac{1}{2}(1 - q)S_q(A)]$. Isso significa que antes do sistema ser formado, os subsistemas já interagem, não estando portanto isolados. Se considerarmos um sistema composto ($A \cup B$) no qual os espaços de fase dos sub-sistemas sejam estatisticamente independentes $P_{ij}(A \cup B) = P_i(A)P_j(B)$, obtém-se como resultado a equação 2.8, que representa o caráter não-extensivo de S_q .

Outra propriedade importante é a denominada concavidade. A entropia de Boltzmann-Gibbs é côncava, isto é, a equação 2.1 é uma função que apresenta um só máximo. É graças a esta propriedade que a formulação de entropia de Boltzmann-Gibbs obedece à Segunda Lei da Termodinâmica, a qual garante a estabilidade dos sistemas. A entropia generalizada S_q é sempre côncava para $q > 0$ (apresenta um único máximo) e sempre convexa para $q < 0$ (apresenta um único mínimo). Dessa forma, S_q também satisfaz a Segunda Lei da Termodinâmica, que pode ser colocada da seguinte forma: a entropia de um sistema isolado em equilíbrio é um extremo. Ou seja, se $q > 0$, o extremo é um máximo e aqui se inclui o caso $q = 1$; se $q < 0$, o extremo é um mínimo.

Equações gerais da mecânica estatística não-extensiva

Como exposto acima, a entropia S_q é uma generalização da entropia S_{BG} , de modo que $S_{q=1} = S_{BG}$. Nesta seção será discutido o procedimento geral para se desenvolver as equações da mecânica não-extensiva. Considere-se as seguintes equações diferenciais, onde $y(0) = 1$:

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad (2.9)$$

com solução é $y = 1$;

$$\frac{dy}{dx} = 1, \quad (2.10)$$

com solução é $y = x + 1$;

$$\frac{dy}{dx} = y, \quad (2.11)$$

com solução $y = \exp(x)$ e cuja inversa é $y = \ln x$. Esta equação 2.11 tem a mesma forma funcional da entropia de Boltzmann-Gibbs, satisfazendo portanto a propriedade da aditividade.

Todos os casos listados acima podem ser unificados por meio da seguinte expressão:

$$\frac{dy}{dx} = y^q, \quad (2.12)$$

que reproduz as equações 2.9, 2.10 e 2.11, para, $q \rightarrow -\infty$, $q = 0$ e $q = 1$, respectivamente. A solução da equação 2.12 é dada pela função q -exponencial, cuja forma é

$$y = [1 + (1 - q)x]^{\frac{1}{1-q}} \equiv e_q^x, \quad (2.13)$$

sendo $e_1^x = e^x$. Sua função inversa é a q -logaritmo, dada por

$$y = \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q} \equiv \ln_q x, \quad (2.14)$$

onde $\ln_1 x = \ln x$. A função 2.14 satisfaz a propriedade de pseudo-aditividade, ou seja,

$$\ln_q(x_A x_B) = \ln_q x_A + \ln_q x_B + (1 - q) \ln_q x_A \ln_q x_B$$

A função exponencial dada pela equação 2.13 é uma generalização da função e^x , no contexto da mecânica estatística de Tsallis, sendo

$$e_q^x \equiv [1 - (1 - q)x]^{\frac{1}{1-q}}, \quad q \in \mathfrak{R}. \quad (2.15)$$

Esta função é positiva e monotonicamente crescente, ou seja:

- Para $q = 1$ retorna $e_1^x = e^x$;
- Para $q > 1$ desaparece como uma lei de potências quando $x \rightarrow \infty$ e diverge em

$$x = \frac{1}{q-1};$$

- Para $q < 1$ tem um ponto de corte em $x = \frac{-1}{1-q}$, abaixo do qual ela é definida como sendo identicamente zero.

Nota-se também que $x \rightarrow 0$ tem como resultado $e_q^x \approx 1 + x$.

Utilizando a expressão 2.14 é possível generalizar a entropia de Boltzmann-Gibbs no contexto da mecânica estatística não-extensiva. Considere a equação 2.1, apresentada no início deste capítulo, pode-se reescrevê-la como segue:

$$\begin{aligned} S_{BG} &= - \sum_{i=1}^w p_i \ln p_i \\ &= \sum_{i=1}^w p_i \ln \frac{1}{p_i} \\ &= \left\langle \ln \frac{1}{p_i} \right\rangle \end{aligned}$$

onde $\langle \dots \rangle = \sum_{i=1}^w (\dots) p_i$, e o termo $\ln \frac{1}{p_i}$ é chamado de incerteza. De fato, $p_i = 1$ corresponde à certeza, ou seja, zero incerteza na ocorrência do evento; por outro lado, $p_i \rightarrow 0$ corresponde à impossibilidade de ocorrência do evento. Introduzindo o termo q -surpresa (ou q -incerteza) na forma $\ln_q \frac{1}{p_i}$, pode-se obter a q -entropia:

$$\begin{aligned} S_q &= \left\langle \ln_q \frac{1}{p_i} \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^w p_i \ln_q \frac{1}{p_i} \\ &= \frac{1 - \sum_{i=1}^w p_i^q}{q-1}, \end{aligned}$$

de modo que a forma entrópica não-extensiva se torna

$$S_q = \frac{1 - \sum_{i=1}^w p_i^q}{q-1} \sum_{i=1}^w p_i = 1, \quad q \in \mathfrak{R} \quad (2.16)$$

onde o termo w é o número total de configurações microscópicas, cujas probabilidades são p_i .

Capítulo 3

Rotação estelar

Os primeiros estudos sobre a rotação das estrelas resultaram de observações do sol, ainda no século XVII, com o advento dos primeiros telescópios refratores e a observação da fotosfera solar por Johannes Fabricius (1587-1616), Galileo Galilei (1564-1642), Thomas Harriot (1560-1621) e Christopher Scheiner (1591-1595). O primeiro anúncio público da observação do Sol foi feito por Johannes Fabricius em um panfleto intitulado *De maculis in Sole observatis et apparente earum cum Sole conversione*, datado de 13 de junho de 1611, no qual atribui padrões escuros observados no Sol a manchas solares em rotação. Esses padrões foram interpretados por Scheiner como pequenos planetas em órbita do Sol, considerado estático, o que ficou conhecida como a hipótese planetária.

Em 1613, Galileo Galilei relatou suas observações, segundo as quais, as manchas solares pareciam aumentar suas velocidades à medida que se deslocavam da borda para o centro do Sol. Galileo também observou que as manchas deslocavam-se todas com a mesma aceleração ao longo do disco solar, cruzando-o em um período de cerca de 14 dias em trajetórias paralelas. Ele assim firmou sua hipótese, segundo a qual os padrões escuros seriam manchas fixas na superfície do Sol em rotação. Com esse trabalho, Galileo refutou a hipótese planetária de Scheiner. Entretanto, as discussões sobre a rotação do Sol não avançaram até 1850, quando Richard Carrington, e independentemente, Gustav Spörer, mostraram que as camadas mais externas do Sol não giram como um corpo rígido, mas com um período de rotação que varia com a latitude.

Com a criação do espectroscópio por Josef von Fraunhofer (1787-1826) em 1814, teve início a era moderna da Astrofísica estelar. Em 1871, Hermann Vogel mostrou que a taxa de variação da rotação do Sol pode ser determinada a partir do desvio doppler das linhas espectrais provenientes de bordas opostas do disco solar. William de Wiveleslie Abney (1843-1920) foi o primeiro cientista a sugerir que a rotação axial de uma estrela poderia ser determinada a partir da medida do alargamento de suas linhas espectrais. Nos anos 50 e 60 já havia uma grande quantidade de estrelas com rotação medidas utilizando esse processo, graças aos trabalhos de Helmut A. Abt, Robert P. Kraft, Arn Slettbak, entre outros.

Atualmente é crescente o número de catálogos publicados na literatura com medidas de

rotação de estrelas de todos os tipos espectrais e populações estelares, utilizando diferentes métodos. Uma pesquisa no *VizieR Service*¹, da base de dados astrofísicos de Strasburgo, com o termo "stellar velocity", dá como resultado uma lista de 140 catálogos contendo dados de velocidades de rotação estelar.

3.1 Velocidade de rotação projetada $v \sin i$

Existem diferentes métodos para medir a rotação estelar, e seu uso depende das características da estrela observada. Uma discussão geral sobre os métodos utilizados para medir a rotação podem ser encontrada em [16] e [17]. Nesta seção será discutido o método de determinação da rotação a partir do alargamento das linhas espectrais das estrelas. Este método foi e ainda se mantém como o mais utilizado para determinar a rotação estelar. A maioria das medidas de rotação conhecidas atualmente foram obtidas usando este método. Sua utilização entretanto, não permite a determinação da velocidade verdadeira da estrela, mas sua componente projetada numa linha imaginária que liga o observador ao centro da estrela (a linha de visada).

A figura 3.1 ilustra uma estrela, considerada *perfeitamente esférica*, girando como um corpo rígido sobre seu eixo com uma velocidade ω . O sistema de coordenadas cartesianas é escolhido de modo que a linha de visada coincida com o eixo z ; o eixo de rotação está no plano $y-z$ e o ângulo a partir do eixo z até o eixo de rotação é i ; $\vec{\omega}$ é o vetor velocidade angular para um ponto qualquer da superfície da estrela definido por um vetor \vec{R} . A velocidade \vec{v} é dada pelo seguinte produto vetorial:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}.$$

Como $\vec{\omega}$ está no plano $y-z$, suas coordenadas são dadas por $(0, \omega_y, \omega_z)$, sendo (R_x, R_y, R_z) as coordenadas do vetor \vec{R} . O efeito Doppler é dado pela componente da velocidade na linha de visada, o eixo z :

$$v_z = R_x \omega \sin i, \quad (3.1)$$

e tem valor máximo quando $|R_x| = R$, isto é:

$$v_z = R \omega \sin i. \quad (3.2)$$

Portanto, a equação acima pode ser reescrita como

$$v_z = v \sin i, \quad (3.3)$$

onde v é a velocidade equatorial verdadeira da estrela. Note que devido à dependência em $\sin i$, o valor de $v \sin i$ nunca é maior do que v , sendo sempre um indicador do limite

¹<http://vizier.u-strasbg.fr/viz-bin/VizieR/> consultado em 22/12/2010

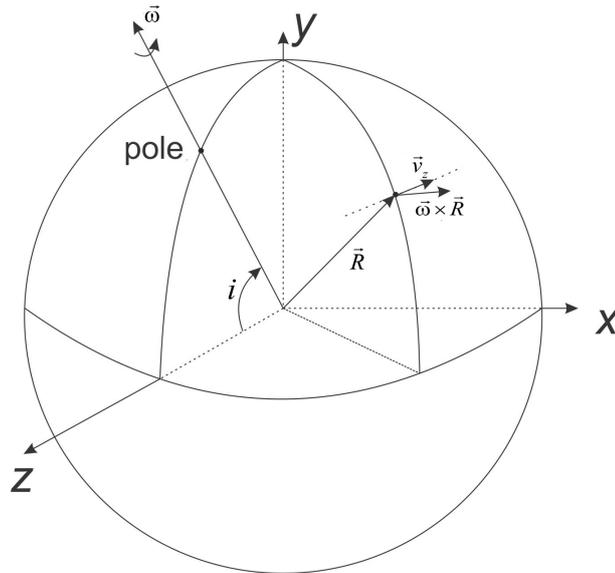


Figura 3.1: Estrela rotacionando como um corpo sólido. O eixo de rotação é inclinado um ângulo i com relação à linha de visada, eixo z . O vetor $\vec{\omega}$ está sobre o plano $y - z$. Para um ponto qualquer da superfície, definido por um vetor \vec{R} , a velocidade é $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$

inferior da velocidade de rotação da estrela.

Como mencionado acima, a rotação afeta as linhas espectrais das estrelas, aumentando sua largura. O efeito da velocidade rotacional no espectro é ilustrado na figura 3.2, onde se apresenta o aumento da largura das linhas espectrais com o aumento da velocidade de rotação da estrela.

Um conjunto de estrelas padrão é dado em [18], onde se fornece a velocidade de rotação $v \sin i$ e as larguras equivalente (FWHM²) para estrelas com vários tipos espectrais, possibilitando uma calibração de $v \sin i$ com FWHM. Quando a rotação não é o mecanismo dominante no alargamento da linha espectral se faz necessário remover as contribuições devido ao perfil instrumental (contribuição do instrumento para o alargamento) e dos efeitos de macro e micro-turbulências, dentre outros. Outras técnicas utilizadas para medir a rotação estelar são: técnica de correlação cruzada, a técnica da transformada de Fourier e a técnica por síntese espectral. Para uma leitura geral sobre essas diferentes técnicas, recomenda-se a leitura da seção 2.2 do artigo de F. Royer [19] ou, recomenda-se [20], para uma exposição mais detalhada sobre o tema.

3.2 Limite de *break-up*

Como mencionado anteriormente, a velocidade de rotação projetada $v \sin i$ fornece apenas um limite inferior para a rotação estelar verdadeira. Para cada estrela, entretanto, há também um limite superior bem definido para a velocidade rotacional, denominado limite de *break-up*. Rotacionando com velocidade acima desse limite, a estrela deixará de ser um objeto estável e perderá sua massa continuamente para o meio externo. O limite

²FWHM é a sigla para *full width at half maximum*, ou seja, largura equivalente da linha espectral

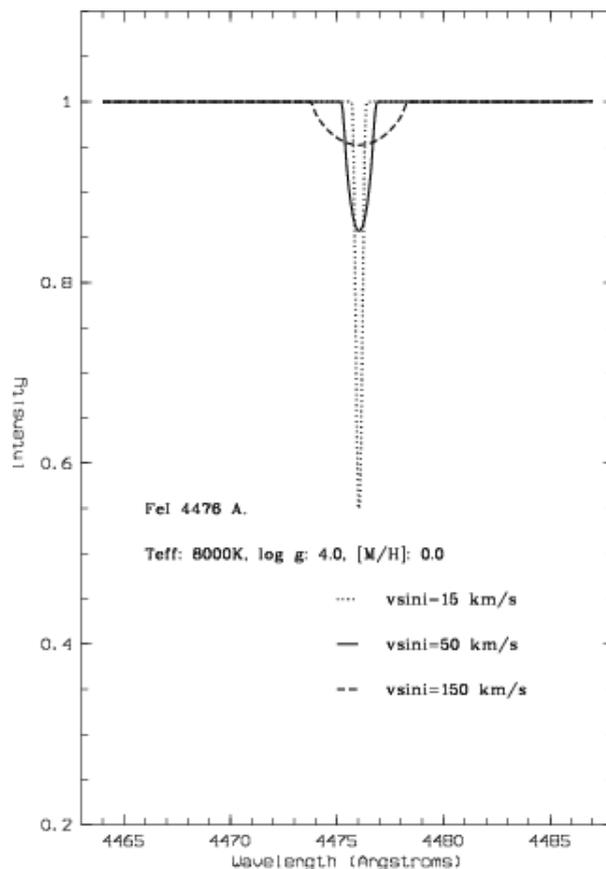


Figura 3.2: Alargamento de uma linha espectral com a rotação. Perfil médio da linha do FeI, $\lambda = 4476 \text{ \AA}$. Os parâmetros atmosféricos, bem como o perfil correspondente a cada rotação estão indicados na figura. Fonte: Mora, A. et al. 2001, *A & A* 378, 116-131

de *break-up* varia de acordo com tipo espectral e a classe de luminosidade da estrela. A figura 3.3 ilustra essa relação.

A rotação de uma estrela produz uma protuberância ao longo da linha do equador, devido à força centrífuga.³ Essa força faz com que suas camadas se expandam de tal modo que o seu diâmetro equatorial torne-se maior que o diâmetro polar⁴. Quanto maior for a rotação, tanto maior será a força centrífuga e, conseqüentemente, maior será a expansão das camadas externas da estrela. Se a estrela rotacionar com velocidade angular acima de um valor crítico, ω_c , ou seja, acima do limite de *break-up*, a força centrífuga exercida nas camadas de gás irá superar a força da gravidade, prejudicando a estabilidade da estrelas e dispersando sua massa gasosa no espaço interestelar.

Pode-se estimar a velocidade rotacional crítica, ω_c , utilizando a aproximação de Roche

³A força centrífuga é uma força fictícia, o que significa que não é real, pois não há uma reação à ela. Esse tipo de força surge como o resultado da aceleração do sistema de referência. Sua consideração, em conjunto com as forças reais, entretanto, é necessária para se fazer previsões físicas exatas. A força centrífuga está sempre presente em sistemas de referência que giram com velocidade angular constante, como uma estrela rotacionando. Quando a velocidade angular depende do tempo deve-se também adicionar ao conjunto mais um termo, chamado de força de Euler [21].

⁴Como as estrelas não são corpos sólidos, é também possível que elas tenham rotação diferencial onde o equador estelar poderá girar com velocidade angular diferente das outras partes da estrela.

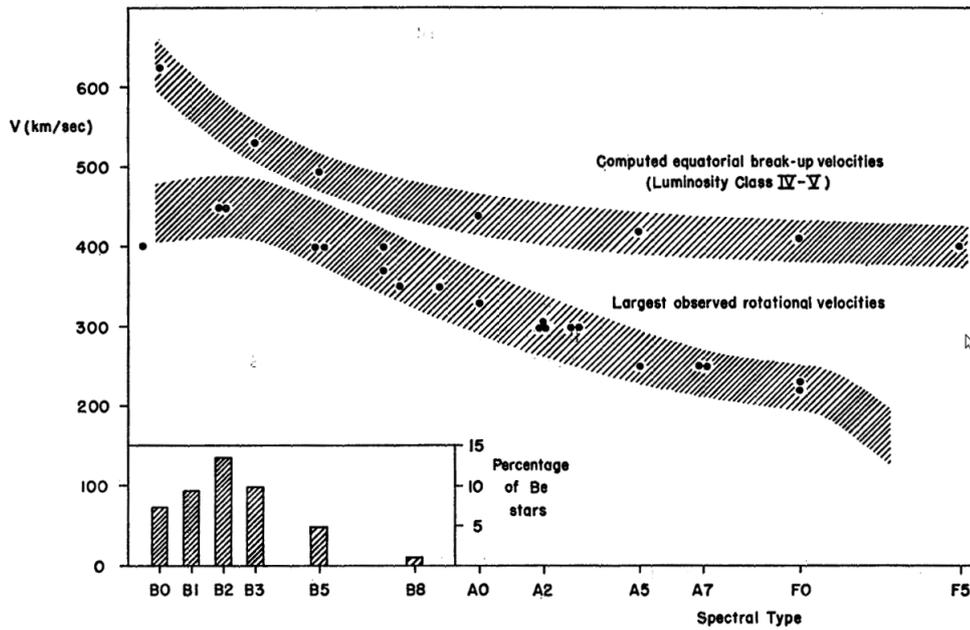


Figura 3.3: *Comportamento da velocidade de break-up com o tipo espectral da estrela. Fonte: Slettebak, A.1966, ApJ, 145, 126*

como segue. Considere-se uma estrela girando como um corpo rígido⁵. Com base no modelo de Roche, a equação que descreve o potencial na superfície de uma estrela de massa M , girando sobre um eixo que passa pelo seu centro, é dada por:

$$\Phi = \frac{GM}{R} + \frac{1}{2}\omega^2 R^2 \sin^2 \theta = \frac{GM}{R_p}, \quad (3.4)$$

onde Φ é o potencial total, que consiste em uma parte gravitacional e um termo associado à força centrífuga. G é a constante da gravitação universal, ω é a velocidade angular da estrela e R a distância entre o centro e um ponto na superfície. R_p é a distância entre o centro e o polo e θ é a latitude, medida do polo para o equador estelar. A velocidade angular crítica, ω_c , é alcançada quando a aceleração de um elemento de massa na superfície é dada por $g = -\nabla \Phi = 0$. Segue-se daí que

$$\omega_c^2 = \frac{8GM}{27R_p^3}. \quad (3.5)$$

Dessa forma, para manter a condição de estabilidade da estrela é necessário que a velocidade de rotação, ω , da estrela não ultrapasse o limite crítico, ω_c . Para uma estrela com raio equatorial dado por R_e , a velocidade angular crítica corresponde à uma velocidade linear $v_b = \omega_c R_e$ que é o limite superior para a velocidade de um elemento de massa situado no equador da estrela, ou o limite de *break-up* da estrela.

⁵Para efeitos de cálculo assume-se que toda a massa da estrela está concentrada no centro e que a superfície estelar coincide com a equipotencial considerada na aproximação de Roche.

Capítulo 4

A função de distribuição da rotação estelar

Conforme discutido na seção 3.1, as medidas das velocidades de rotação das estrelas, utilizando dados espectroscópicos, dão como resultado a componente da rotação estelar na linha de visada. Para determinar a velocidade verdadeira das estrelas é necessário conhecer o ângulo de inclinação do eixo rotacional com a linha de visada, o que quase sempre não é possível. De fato, um dos grandes problemas da física da rotação estelar é determinar a orientação dos eixos de rotação das estrelas. Embora a inclinação do ângulo i possa ser medida para alguns objetos, sua determinação quase nunca é viável para estrelas simples¹. Entretanto, para uma amostra estatisticamente significativa é possível determinar a distribuição das velocidades equatoriais verdadeiras, v , a partir da distribuição das velocidades de rotação projetadas, $v \sin i$. O problema, portanto, da determinação da distribuição das velocidades de rotação v consiste em medir a velocidade de rotação $v \sin i$ e determinar a distribuição dessas rotações. O passo seguinte é utilizar essa distribuição para encontrar a distribuição das velocidades equatoriais verdadeiras, de acordo com uma hipótese de distribuição dos eixos de rotação previamente elaborada. Ou seja, determinando-se a distribuição das velocidades de rotação projetada pode-se determinar a distribuição das rotações verdadeiras. Tal metodologia foi apresentada por Chandrasekhar & Münch [4] na década de 50, e pode ser descrito, como se segue. A média das velocidades equatoriais $\langle v \rangle$ é derivada a partir da média das velocidades projetadas, de acordo com a distribuição

$$\langle v \rangle = \frac{4}{\pi} \langle v \sin i \rangle. \quad (4.1)$$

A função de densidade de probabilidade de $v \sin i$ é o resultado da convolução entre a distribuição da velocidade equatorial v e a distribuição do ângulo entre o eixo de rotação e a linha de visada, i , conforme a equação

$$\phi(v \sin i) = \int \varphi(v) P(v \sin i | v) dv. \quad (4.2)$$

¹Chama-se estrela simples aquelas estrelas cuja interação gravitacional com outros objetos estelares pode ser desprezadas.

onde $P(v_{\text{sen } i}|v)$ é a probabilidade de $v_{\text{sen } i}$ estar no intervalo $[v, v + dv]$ e $\varphi(v)$ é a função de distribuição de probabilidade das velocidades equatoriais. Assumindo uma distribuição aleatória para o ângulo do eixo de rotação estelar com a linha de visada, segue-se que a probabilidade condicional é dada por:

$$P(v_{\text{sen } i}|v) = \begin{cases} \frac{v_{\text{sen } i}}{v\sqrt{v^2 - (v_{\text{sen } i})^2}} & \text{se } v > v_{\text{sen } i} \\ 0 & \text{se } v \leq v_{\text{sen } i} \end{cases}.$$

Substituindo na equação 4.2, temos

$$\phi(v_{\text{sen } i}) = \int_{v_{\text{sen } i}}^{\infty} \varphi(v) \frac{v_{\text{sen } i}}{v\sqrt{v^2 - (v_{\text{sen } i})^2}} dv. \quad (4.3)$$

A equação 4.3 é uma integral abeliana² cuja solução analítica é

$$\varphi(v) = -\frac{2v^2}{\pi} \frac{d}{dv} \int_v^{\infty} \frac{v\phi(v_{\text{sen } i})}{v_{\text{sen } i}^2 \sqrt{v_{\text{sen } i}^2 - v^2}} d(v_{\text{sen } i}).$$

É importante salientar, entretanto, que esta solução formal não é muito prática, uma vez que exige a diferenciação de uma frequência observada. Tal procedimento pode levar a resultados pouco confiáveis quando as observações têm pouca precisão. É mais prático supor uma solução f envolvendo um ou mais parâmetros de acordo com a natureza física do parâmetro com o qual se está lidando.

A partir do trabalho pioneiro de Chandrasekhar & Münch, muitos esforços já foram feitos no sentido de se encontrar uma função que descreva a distribuição das velocidades de rotação projetadas. Nesse contexto apresenta-se, nas seções seguintes, os trabalhos desenvolvidos por Deutsch na década de 70 [5] e, mais recentemente, o trabalho de Soares *et al.* [7], os quais constituem a base para a nova proposta apresentada nesta dissertação.

4.1 A função de distribuição segundo Deutsch

Em seu trabalho publicado em 1970, Deutsch [5] analisa a distribuição das velocidades rotacionais, $v_{\text{sen } i}$, para uma amostra de 782 estrelas da sequência principal de tipos espectrais no intervalo B2-A2. Assumindo uma distribuição homogênea das velocidades e independências entre as componentes cartesianas do eixo de rotação, Deutsch deduz uma função de distribuição das velocidades rotacionais. Seu trabalho foi desenvolvido com base no conceitos da mecânica estatística de Maxwell-Boltzmann e, a função de distribuição

²Uma integral abeliana tem esse nome em homenagem ao matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829). Uma integral abeliana é uma integral definida do tipo $\int_0^x \frac{f(y)}{(x-y)^\alpha} dy = g(x)$, para $0 < \alpha < 1$ e com $g(0) = 0$, e tem a seguinte solução formal, $f(y) = \frac{1}{\pi} \text{sen}(\pi\alpha) \frac{d}{dx} \int_0^y \frac{g(x)}{(y-x)^{1-\alpha}} dx$ (para mais detalhes, consulte Gough D. 1985, *Sol. Phys.*, 100, 65).

proposta é uma maxwelliana. Resume-se abaixo o caminho seguido por Deutsch para derivar sua função de distribuição.

Considera-se um escalar, ω , o qual é o módulo de um vetor $\vec{\omega}$. Assume-se que a distribuição de $\vec{\omega}$ é isotrópica, que esse vetor possa ser decomposto em componentes cartesianas e que a distribuição de qualquer uma dessas componentes não dependa da distribuição das demais componentes. Seja Ω uma quantidade adimensional definida como $j\omega$, onde j é um parâmetro com dimensão de ω^{-1} , e tal que

$$\vec{\Omega} = \Omega_x \hat{i} + \Omega_y \hat{j} + \Omega_z \hat{k}$$

A probabilidade de se encontrar Ω_x no intervalo $[\Omega_x, \Omega_x + d\Omega_x]$, Ω_y em $[\Omega_y, \Omega_y + d\Omega_y]$, e Ω_z em $[\Omega_z, \Omega_z + d\Omega_z]$ é dada por

$$F(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z) d\Omega_x d\Omega_y d\Omega_z = h(\Omega_x^2) h(\Omega_y^2) h(\Omega_z^2) d\Omega_x d\Omega_y d\Omega_z,$$

e considerando a isotropia da distribuição, segue que

$$F(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z) = H(\Omega^2) = H(\Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2). \quad (4.4)$$

Se também se considera

$$H(\Omega^2) = h^2(0) h^2(\Omega^2), \quad (4.5)$$

tem-se que, pela equação 4.5,

$$h(\Omega_x^2) h(\Omega_y^2) h(\Omega_z^2) = h^2(0) h(\Omega^2). \quad (4.6)$$

Para um determinado $u \geq 0$, seja

$$\xi(u) = \ln \frac{h(u)}{h(0)}. \quad (4.7)$$

Considerando a equação 4.7, temos

$$\begin{aligned} \xi(\Omega^2) &= \ln \frac{h(\Omega_x^2)}{h(0)} + \ln \frac{h(\Omega_y^2)}{h(0)} + \ln \frac{h(\Omega_z^2)}{h(0)} \\ &= \xi(\Omega_x^2) + \xi(\Omega_y^2) + \xi(\Omega_z^2) \end{aligned}$$

E em particular, se $\Omega_x^2 = \Omega_y^2 = u$, e $\Omega_z = 0$, segue-se que

$$\begin{aligned}\xi(2u) &= \ln \frac{h(u)}{h(0)} + \ln \frac{h(u)}{h(0)} \\ &= \xi(u) + \xi(u) \\ &= 2\xi(u)\end{aligned}$$

Novamente, se $\Omega_x^2 = u$, $\Omega_y^2 = 2u$, e $\Omega_z = 0$, tem-se

$$\begin{aligned}\xi(3u) &= \ln \frac{h(u)}{h(0)} + \ln \frac{h(2u)}{h(0)} \\ &= \xi(u) + \xi(2u) \\ &= 3\xi(u).\end{aligned}$$

De um modo geral, para um número inteiro n , segue que

$$\xi(nu) = n\xi(u). \quad (4.8)$$

Seja agora $u = \frac{v}{n}$, daí tem-se que

$$\xi \left[n \left(\frac{v}{n} \right) \right] = n\xi \left(\frac{v}{n} \right),$$

onde

$$\xi \left(\frac{v}{n} \right) = \frac{1}{n} \xi \left[n \left(\frac{v}{n} \right) \right] = \frac{1}{n} \xi(v).$$

E para um m inteiro positivo, pode-se escrever

$$m\xi \left(\frac{v}{n} \right) = \frac{m}{n} \xi(v),$$

e pela equação 4.8 segue que

$$\xi \left(\frac{m}{n} v \right) = \frac{m}{n} \xi(v).$$

Como esse resultado é válido para qualquer número racional positivo (m/n), por continuidade será válido também para um número positivo irracional x , de modo que

$$\xi(xv) = x\xi(v).$$

Em particular, se $v = 1$, tem-se

$$\xi(x) = x\xi(1) = cx.$$

e portanto,

$$\frac{d\xi(x)}{dx} = c.$$

E considerando-se a equação 4.7, tem-se

$$\frac{1}{h(x)} \frac{dh}{dx} = c,$$

cujas solução é dada por

$$h(x) = ae^{cx}. \quad (4.9)$$

Como $h(\Omega_x^2)$ é uma função de probabilidade, a condição de normalização exige que

$$2 \int_0^\infty h(\Omega_x^2) d\Omega_x = 2a \int_0^\infty e^{c\Omega_x^2} d\Omega_x = 1, \quad (4.10)$$

sendo o valor médio de Ω_x^2 dado por

$$\langle \Omega_x^2 \rangle = 2a \int_0^\infty \Omega_x^2 e^{c\Omega_x^2} d\Omega_x. \quad (4.11)$$

Definindo o parâmetro j de acordo com a relação

$$(1/j)^2 = 2 \langle \omega_x^2 \rangle$$

segue das equações 4.10 e 4.11 que $a = \sqrt{\pi}$ e $c = -1$. E pode-se escrever a distribuição de Ω na forma $f(\Omega)d\Omega$, onde

$$\begin{aligned} f(\Omega) &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} H(\omega^2) \omega^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= H(\Omega^2) \Omega^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta 2\pi \\ &= 4\pi H(\Omega^2) \Omega^2. \end{aligned}$$

De acordo com a equação 4.5, pode-se escrever

$$f(\Omega) = 4\pi \Omega^2 h^2(0) h^2(\Omega^2). \quad (4.12)$$

E pela equação 4.9, tem-se

$$f(\Omega) = 4\pi \Omega^2 a^2 e^{c\Omega^2}. \quad (4.13)$$

Sendo $a = \sqrt{\pi}$ e $c = -1$, segue-se que

$$f(\Omega) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \Omega^2 e^{-\Omega^2}. \quad (4.14)$$

Como salientamos antes, a proposta de função de distribuição apresentada por Deutsch [5], bem como os trabalhos pioneiros realizados nas décadas de 50, 60 e 70 estão baseados na mecânica estatística de Maxwell-Boltzmann, ou seja, na mecânica estatística extensiva. Nas décadas que se seguiram após os trabalhos pioneiros, não houve abordagem significativamente nova para o problema da distribuição da velocidade de rotação estelar. Tal cenário mudou com a advento da mecânica estatística não-extensiva.

4.2 A distribuição das rotações segundo Soares *et al.*: a contribuição da mecânica estatística não-extensiva

Uma nova abordagem do problema da distribuição das velocidades de rotação estelar, $v_{sen\ i}$, foi proposta por Soares *et al.* em 2006 [7]. Esses autores reconsideraram o trabalho de Deutsch, no contexto da mecânica estatística não-extensiva, e com isso abriram e ampliaram o horizonte de possibilidades para a investigação dessas distribuições.

O ponto de partida utilizado para a elaboração da função de distribuição de Soares *et al.* é o trabalho de Deutsch [5], tendo como suporte as hipóteses de homogeneidade da distribuição das rotações e a independência entre as componentes do eixo de rotação. A dedução da função de distribuição de Soares *et al.*, conforme descrita em [7] é feita a partir da equação 4.4, escrita na forma

$$F(\Omega)d^3\Omega = f(\Omega_x)f(\Omega_y)f(\Omega_z)d\Omega_xd\Omega_yd\Omega_z, \quad (4.15)$$

onde f é uma função de variáveis aleatórias e $\Omega = \sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2}$. A introdução da distribuição de probabilidades no contexto da estatística não-extensiva é feita reescrevendo-se a equação 4.15 na forma

$$F(\Omega)d^3\Omega = \exp_q[\ln_q f(\Omega_x) + \ln_q f(\Omega_y) + \ln_q f(\Omega_z)]d\Omega_xd\Omega_yd\Omega_z, \quad (4.16)$$

onde $\exp_q(f)$ e $\ln_q(f)$ são definidas respectivamente pelas equações 2.13 e 2.14, tendo as seguintes formas

$$\exp_q(f) = [1 + (1 - q)f]^{\frac{1}{1-q}}$$

e

$$\ln_q(f) = \frac{f^{1-q} - 1}{1 - q}.$$

Aqui é importante lembrar que para $q = 1$ essas equações reproduzem as funções exponencial e logaritmo, respectivamente. Diferenciando a equação 4.16 em relação as

componentes de Ω_i tem-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln_q F}{\partial \Omega_i} &= \frac{\partial}{\partial \Omega_i} \ln_q \{ \exp_q [\ln_q f(\Omega_x) + \ln_q f(\Omega_y) + \ln_q f(\Omega_z)] \} \\ &= \frac{\partial}{\partial \Omega_i} (\ln_q f_x + \ln_q f_y + \ln_q f_z),\end{aligned}$$

onde $\exp_q[\ln_q(f)] = \ln_q[\exp_q(f)] = f$, com $i = x, y, z$. Decorre daí que

$$\frac{\Omega_i F'(x)}{x F^q(x)} = \frac{\partial}{\partial \Omega_i} \ln_q f_i, \quad (4.17)$$

e definindo

$$\phi(x) \equiv \frac{1 F'(x)}{x F^q(x)} \quad (4.18)$$

pode-se escrever a equação 4.17, como segue

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \frac{1}{\Omega_x} \frac{\partial}{\partial \Omega_x} (\ln_q f_x) \\ &= \frac{1}{\Omega_y} \frac{\partial}{\partial \Omega_y} (\ln_q f_y) \\ &= \frac{1}{\Omega_z} \frac{\partial}{\partial \Omega_z} (\ln_q f_z),\end{aligned}$$

a qual somente pode ser satisfeita quando

$$\frac{1}{\Omega_i} \frac{\partial}{\partial \Omega_i} (\ln_q f_i) = -\gamma, \quad (4.19)$$

para γ constante. A solução da equação 4.19 é dada por

$$\ln_q f_i = \frac{-\gamma \Omega_i^2}{2} + \ln_q A,$$

onde A é a constante de integração. Aplicando a q -exponencial nesta equação, segue-se que

$$f(\Omega_i) = \left[1 + (1 - q) \left(\ln_q A - \frac{\gamma \Omega_i^2}{2} \right) \right]^{\frac{1}{1-q}}.$$

Definindo

$$\frac{2}{\sigma^2} \equiv \frac{\gamma}{1 + (1 - q) \ln_q A} = \frac{\gamma}{A^{1-q}},$$

onde o parâmetro σ é a largura equivalente. Assim temos que

$$\begin{aligned} f(\Omega_i) &= \left[1 + (1 - q) \ln_q A - (1 - q) \frac{\gamma \Omega_i^2}{\gamma \sigma^2} (1 + (1 - q) \ln_q A) \right]^{1/(1-q)} \\ &= \left\{ [1 + (1 - q) \ln_q A] \left[1 - (1 - q) \frac{\Omega_i^2}{\sigma^2} \right] \right\}^{1/(1-q)}, \end{aligned}$$

que leva a

$$f(\Omega_i) = A_q \left[1 - (1 - q) \frac{\Omega_i^2}{\sigma^2} \right]^{1/(1-q)}, \quad (4.20)$$

onde o sub-índice q na constante de normalização indica que esta constante depende do parâmetro q .

A probabilidade de encontrar Ω no intervalo $[\Omega, \Omega + d\Omega]$ pode ser calculada pela equação

$$F(\Omega) = \int f(\Omega) d^3\Omega, \quad (4.21)$$

onde $d^3\Omega = \Omega^2 \sin\theta d\theta d\varphi$. Logo, de acordo com a equação 4.20, tem-se

$$F_q(\Omega) = \int \int A_q \Omega^2 \left[1 - (1 - q) \frac{\Omega_i^2}{\sigma^2} \right]^{1/(1-q)} \sin\theta d\theta d\varphi$$

de onde decorre a função de distribuição para as velocidades de rotação estelar proposta por Soares *et al.*:

$$F_q(\Omega) = 4\pi A_q \Omega^2 \left[1 - (1 - q) \frac{\Omega_i^2}{\sigma^2} \right]^{1/(1-q)}.$$

Pode-se verificar que a expressão acima corresponde a uma função de distribuição maxwelliana no contexto da estatística não-extensiva. Como esperado, no limite $q \rightarrow 1$ essa expressão assume a forma da maxwelliana padrão, ou seja:

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 1} F_q(\Omega) &= \lim_{q \rightarrow 1} 4\pi A_q \left[1 - (1 - q) \frac{\Omega_i^2}{\sigma^2} \right]^{1/(1-q)} \\ &= 4\pi \exp\left(-\frac{\Omega_i^2}{\sigma^2}\right). \end{aligned}$$

Este resultado mostra claramente que a função de distribuição proposta por Soares *et al.* constitui uma generalização da função proposta por Deutsch [5].

Soares *et al.* [7] testaram sua função de distribuição para uma amostra de 219 rotações, usen i , de estrelas com massas variando no intervalo de 0,6 a 1,2 M_\odot , provenientes do aglomerado Plêiades e medidas por Queloz *et al.* [22]. Como resultado da análise para a amostra completa, concluíram que o melhor ajuste entre a função teórica e os dados observacionais se dá quando $q = 1,36_{-0,05}^{+0,03}$, o que difere da maxwelliana padrão ($q = 1$) proposta por Deutsch [5]. Apesar do seu sucesso em reproduzir a distribuição

das velocidades de rotação observadas, a função proposta por Soares *et al.*, assim como aquela proposta por Deutsch, não considera a velocidade limite de *break-up* das estrelas, carecendo portanto, desse vínculo físico. Tal vínculo adquire uma importância crucial nas amostras que contêm rotações elevadas, comumente encontradas em estrelas de tipos espectrais precoces (O, B e A).

Capítulo 5

Distribuição da rotação com limite de *break-up*

A despeito do seu sucesso em reproduzir a distribuição das velocidades de rotação observadas, a função proposta por Soares *et al.*, assim como aquela proposta por Deutsch, não considera a velocidade limite de *break-up* das estrelas, carecendo portanto desse vínculo físico. Tal vínculo físico adquire uma importância crucial nas amostras que contêm rotações elevadas, comumente encontradas em estrelas de tipos espectrais precoces (O, B, e A). Neste capítulo, apresenta-se uma proposta para a função da distribuição da velocidade de rotação estelar levando em conta o limite de *break-up*.

Inicialmente, considera-se a hipótese de que os eixos de rotação estão distribuídos aleatoriamente, de acordo com a função

$$f(i)di = \text{sen } i di$$

Para uma estrela rotacionando com velocidade angular ω , define-se as seguintes variáveis:

$$w \equiv \frac{\omega}{\omega_c} \quad \eta \equiv \frac{v}{v_b} \quad y \equiv \frac{v \text{sen } i}{v_b} \quad (5.1)$$

onde ω_c é a velocidade angular crítica, v a velocidade equatorial, v_b é a velocidade no limite de *break-up* e $v \text{sen } i$ é a velocidade de rotação projetada na linha de visada.

A princípio, de acordo com essas definições pode-se pensar que em qualquer caso a velocidade de rotação $v \text{sen } i$ pode ser obtida simplesmente fazendo-se

$$\begin{aligned} v \text{sen } i &= v_b \times w \times \text{sen } i \\ &= v_b \times \eta \times \text{sen } i \end{aligned}$$

havendo uma relação simples e direta entre as variáveis w e η . Entretanto, quando se leva em conta os efeitos da rotação sobre a geometria da estrela, a relação entre w e η se assume uma forma complexa e a relação acima não se sustenta face a uma escolha de valores aleatórios de w ou η para gerar uma distribuição de $v \text{sen } i$. Uma estrela girando com alta rotação não pode, a rigor, ser considerada *perfeitamente esférica*, uma vez que o seu raio equatorial será maior que o seu raio polar. Nesse contexto, é necessário encontrar

a relação mais adequada entre esse dois parâmetros. O problema pode ser abordado utilizando a aproximação de Roche.

Como discutido na seção 3.2 a velocidade angular crítica para uma estrela é dada pela equação 3.5 $\omega_c^2 = 8GM/27R_p^3$. Considerando-se o parâmetro $x \equiv R/R_p$, que é uma medida da deformação da estrela, pode-se portanto escrever a equação 3.4 como:

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{27}w^2x^2 \sin^2 \theta = 1. \quad (5.2)$$

da equação 5.1 e sabendo que $\frac{R_c}{R_p} = \frac{3}{2}$, onde R_c é o raio equatorial crítico da estrela e R_p o raio polar, tem-se que

$$x = \frac{3\eta}{2w}. \quad (5.3)$$

aplicando 5.3 em 5.2 e considerando um elemento de massa no equador, onde $\theta = \frac{\pi}{2}$ vamos ter

$$\eta^3 - 3\eta + 2w = 0. \quad (5.4)$$

que é uma equação do terceiro grau em η e tem a seguinte solução:

$$\eta = -2 \cos \left(\frac{\arccos w - 2\pi}{3} \right). \quad (5.5)$$

A expressão 5.5 é a relação entre os parâmetros η e w , mais apropriada quando a distribuição de y é obtida tomando-se aleatoriamente os valores de w .

Considere a distribuição das velocidades de rotação $v \sin i$, dada pela equação 4.3 escrita como

$$\phi(v \sin i) = v \sin i \int_{v \sin i}^{\infty} \frac{\varphi(v)}{v \sqrt{v^2 - (v \sin i)^2}} dv. \quad (5.6)$$

Observa-se que essa equação não considera um limite superior para a velocidade de rotação.

Conforme discutido na seção 3.2, em cada estrela existe um limite superior para a rotação, a velocidade de *break-up*, v_b , acima do qual a estrela não pode ser considerada estável. Impondo-se v_b como limite superior para a velocidade de rotação na equação 4.3, pode-se reescrevê-la em termos das variáveis definidas em 5.1 como

$$\phi(y) = y \int_y^1 \frac{f(\eta)}{\eta \sqrt{\eta^2 - y^2}} d\eta, \quad (5.7)$$

onde $v \sin i$ e v foram parametrizadas em termos de v_b . Considere agora a relação entre $f(\eta)$ e $f(w)$

$$f(\eta) = f(w) \left| \frac{dw}{d\eta} \right|, \quad (5.8)$$

e pela equação 5.4, segue-se que

$$\left| \frac{dw}{d\eta} \right| = \frac{3}{2} (1 - \eta^2). \quad (5.9)$$

Seguindo as hipóteses de [5] de que as velocidades de rotação ω estão distribuídas isotrópica e independentemente, podemos escrever a equação 4.14 em função de w ,

$$f(w) = w^2 e^{-w^2}. \quad (5.10)$$

E de acordo com as equações 5.8 e 5.9, segue que

$$f(\eta) = (1 - \eta^2) w^2 e^{-w^2}.$$

Lembrando que η é a razão entre a velocidade equatorial e a velocidade de *break-up* da estrela, segue, pela equação 5.3, que $w \propto \frac{\eta}{\sigma}$, onde σ é função da razão, x , entre o raio equatorial e o raio polar da estrela ($x = R/R_p$). Logo, tem-se que, a menos de uma constante,

$$f(\eta) = \eta^2 (1 - \eta^2) e^{-\frac{\eta^2}{\sigma^2}}, \quad (5.11)$$

onde σ pode ser interpretada como sendo a largura equivalente da maxwelliana que descreve a distribuição. Note que o termo $(1 - \eta^2)$ impõe um limite bem definido para a distribuição das velocidades rotacionais, pois de acordo com a definição de η , a função tende a zero quando v tende para v_b . Note ainda que no regime de baixas rotações, η muito pequeno, a equação 5.10, e portanto, a equação 4.14, é recuperada, já que as variáveis η e ω estão relacionadas pela variável σ . Combinando as equações 5.11 e 5.7, tem-se

$$\phi(y) = y \int_y^1 \frac{\eta(1 - \eta^2) e^{-\frac{\eta^2}{\sigma^2}}}{\sqrt{\eta^2 - y^2}} d\eta, \quad (5.12)$$

A solução desta equação pode ser estimada utilizando métodos numéricos de intergração (ver Apêndice A) e é dada, a menos de uma constante, por

$$\phi(y) = f_1 e^{-\frac{y^2}{\sigma^2}} + f_2 e^{-\frac{(1+y)^2}{(2\sigma)^2}}, \quad (5.13)$$

onde f_1 e f_2 são funções de y e têm as seguintes formas:

$$f_1 = y^4 - y^3 - y^2 + y \quad (5.14)$$

$$f_2 = \frac{(y - y^2)(-y^3 - 3y^2 + y + 3)}{(-3y^2 + 2y + 1)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.15)$$

A função 5.13 pode ser generalizada no contexto da estatística não-extensiva, substituindo

as exponenciais padrões por q -exponenciais [7], de modo que tem-se, a menos de uma constante dependente de q e σ :

$$\phi_q(y) = f_1 e_q^{-\frac{y^2}{\sigma^2}} + f_2 e_q^{-\frac{(1+y)^2}{(2\sigma)^2}} \quad (5.16)$$

sendo

$$e_q^{-\frac{y^2}{\sigma^2}} = \left[1 - (1-q) \frac{y^2}{\sigma^2} \right]^{\frac{1}{1-q}}$$

$$e_q^{-\frac{(1+y)^2}{(2\sigma)^2}} = \left[1 - (1-q) \frac{(1+y)^2}{(2\sigma)^2} \right]^{\frac{1}{1-q}}$$

Note que, no limite $q = 1$ a função generalizada 5.16 retorna à distribuição 5.13, o que é uma consequência direta da definição de e_q . (ver Apêndice A) Para garantir a existência e positividade da função 5.16 é necessário restringir seu limite de validade, de modo que ela é definida em $0 \leq y < 1$ e para $\sigma > \sqrt{1-q}$, quando $q < 1$.

Capítulo 6

A amostra

Para testar a função de distribuição da rotação estelar generalizada proposta neste trabalho, escolheu-se uma amostra de velocidades de rotação de estrelas da associação Escorpião-Centaurus (Sco OB2). Esta associação de estrelas dos tipos O e B é composta de três subgrupos: Escorpião Superior (Upper Scorpius, US), Centaurus-Lobo Superior (Upper Centaurus-Lupus, UCL) e Centaurus-Cruzeiro Inferior (Lower Centaurus-Crux, LCC). Utilizando modelos teóricos de traçados evolutivos (isócrinas), Fuchs *et al.* [23], dataram os três subgrupos entre 20 e 30 milhões de anos. Assim como os aglomerados, as associações estelares reúnem estrelas com características comuns como composição química e idade. Pode-se, portanto, fazer uma boa análise estatística da rotação de tais estrelas, sem maiores preocupações com as variações de tais parâmetros. Outro aspecto importante é que a associação Sco OB2 engloba estrelas que apresentam elevadas velocidades de rotação, algumas muito próxima do seu limite de *break-up*, constituindo um excelente laboratório para função que aqui é proposta.

As medidas de rotação

Os primeiros estudos das velocidades de rotação na associação Sco OB2 concentravam-se nas estrelas de US e UCL. Em 1968, Slettebak determinou a velocidade de rotação para estrelas desses dois subgrupos e concluiu que as estrelas de US tinham rotação média de cerca de 174 km s^{-1} , enquanto as estrelas de UCL rotacionavam com uma média de 119 km s^{-1} . Rajamohan [24] estudou a rotação de 112 membros da associação Sco OB2 e concluiu que as estrelas com tipo espectral mais tardio que B7 apresentam rotações mais elevadas do que as estrelas do campo com mesmo tipo espectral. Desde os primeiros estudos realizados, a associação Sco OB2 apresenta-se como um bom laboratório para o estudos de estrelas com alta rotação. Para realização dos testes, foi utilizada a amostra de estrelas de Brown & Verschueren [1].

Brown & Verschueren [1] mediram a velocidade de rotação, $v_{\text{sen } i}$, para 90 estrelas da associação Sco OB2. Essas rotações foram obtidas a partir de espectros tipo *echelle* utilizando diferentes técnicas (consistentes) de acordo com o valor de $v_{\text{sen } i}$ (ver Seção 3 em [1]). As medidas foram feitas utilizando espectrógrafo ECHELEC (ECFELEle

+ Electronographie Camera), montado no telescópio de 1,52 m do ESO em La Silla, Chile. Os espectros obtidos têm resolução de 21 500 e cobrem uma faixa espectral de 3 800 a 4 070 Å. A razão sinal/ruído varia de 70 a 300. Mais detalhes sobre os dados observacionais e as técnicas para obtenção das velocidades de rotação podem ser encontrados em [1] (seções 2 e 3). Com objetivo de completar sua amostra, os autores acrescentaram 47 estrelas reconhecidamente de Sco OB2 com rotações disponíveis na literatura. As velocidades de rotação utilizadas no presente trabalho, tanto as medidas por Brown & Verschueren, quanto aquelas acrescentadas a sua amostra, são apresentadas na tabela 6. As colunas da tabela são as seguintes:

- Coluna 1: numero HD da estrela;
- Coluna 2: Tipo espectral conforme listado no Catálogo HIPPARCOS;
- Coluna 3: Velocidade de rotação projetada, $v \sin i$;
- Coluna 4: Velocidade de *break-up*;
- Coluna 5: Razão entre a rotação projetada e a velocidade de *break-up*
- Coluna 6: Indicador de binaridade: As estrelas binárias são indicadas com um asterisco e as estrelas simples com um espaço vazio

Tabela 6.1: Dados observacionais para as estrelas da associação Sco OB2, extraídas de Brown & Verschueren [1].

HD	MK	$v_{\text{sen } i}$ (km s^{-1})	v_b (km s^{-1})	$\frac{v_{\text{sen } i}}{v_b}$	binaridade
102776	B3V	251	411	0.611	*
103079	B4V	47	401	0.117	
103884	B3V	251	411	0.363	
104841	B2IV	25	459	0.054	*
105382	B2IIne	75	303	0.248	*
105435	B2IVne	298	411	0.725	*
105937	B3V	135	411	0.328	*
106026	B5V	188	401	0.469	*
106490	B2IV	135	411	0.328	
106983	B2.5V	65	459	0.142	
108483	B3V	169	459	0.368	*
108257	B3Vn	298	411	0.725	*
109668	B2IV-V	114	459	0.248	*
109787	A2V	280	365	0.767	
110879	B2V	139	411	0.338	*
110956	B3V	26	411	0.063	*
111123	B0.5III	40	401	0.100	*
112078	B4Vn	298	411	0.725	*
112091	B5vne	242	401	0.603	
112092	B2IV-V	34	459	0.074	
113703	B5V	140	411	0.341	
113791	B1.5V	15	475	0.032	
115823	B6V	42	381	0.110	*
116087	B3V	223	411	0.543	
118716	B1III	114	377	0.302	*
118978	B9IV	182	363	0.501	
120098	B5II	85	308	0.276	
120307	B2IV	65	459	0.142	*
120324	B2IV-Ve	130	459	0.283	*
120640	B2Vp	21	459	0.046	
120710	B9V	175	350	0.500	*
120955	B4IV	40	401	0.100	*
121790	B2IV-V	124	459	0.270	
122980	B2V	15	459	0.033	*
125238	B2.5V	222	411	0.540	
125823	B2V	15	459	0.033	*
126981	B8Vn	320	381	0.840	
127381	B2III	69	364	0.190	*
127972	B1Vn+...	270	491	0.530	*
128345	B5V	186	401	0.464	
129056	B1.5III	16	377	0.042	*

Tabela 6.1: *continuação*

HD	MK	$v_{\text{sen } i}$ (km s^{-1})	v_b (km s^{-1})	$\frac{v_{\text{sen } i}}{v_b}$	binaridade
129116	B2.5V	129	411	0.314	
130807	B5IV	27	388	0.070	*
132058	B2III	92	364	0.253	*
132200	B2IV	32	459	0.070	*
132851	A4IV	120	350	0.343	
132955	B3V	8	411	0.019	
133937	B7V	402	411	0.978	*
133955	B3V	135	411	0.328	*
134481	B9V	175	350	0.500	*
134687	B3IV	132	411	0.032	*
136298	B1.5IV	193	411	0.470	*
136504	B2IV-V	41	459	0.089	*
136664	B4V	177	411	0.431	*
137432	B5V	77	1411	0.187	*
138769	B3IVp	67	411	0.163	*
138690	B2IV	229	412	0.557	*
138485	B2Vn	212	459	0.463	*
138764	B6IV	17	342	0.050	*
139094	B8IV/V	153	363	0.421	
139365	B2.5v	134	459	0.292	*
139486	B9V	212	350	0.607	*
140008	B5V	11	388	0.028	*
141404	B9.5IV	170	350	0.486	
141637	B1.5Vn	227	411	0.552	*
141774	B9V	136	350	0.389	*
142096	B3V	146	411	0.355	*
142114	B2.5Vn	240	411	0.584	
142165	B5V	204	388	0.526	*
142184	B2V	255	411	0.620	
142250	B7V	42	373	0.114	*
142315	B9V	255	350	0.729	*
142378	B2/B3V	204	411	0.496	*
142669	B2IV/V	98	459	0.214	*
142883	B3V	14	411	0.046	*
142884	B8/B9III	170	283	0.601	
142983	B8Ia/Iab	40	187	0.214	
142990	B5V	178	388	0.459	*
143018	B1V+...	100	491	0.204	*
143118	B2.5Iv	191	411	0.465	*
143275	B0.2IV	148	489	0.303	*
143567	B9V	153	350	0.437	*
143600	B9.5V	255	350	0.729	*
143699	B6III/IV	144	303	0.477	*

Tabela 6.1: *continuação*

HD	MK	$v_{sen\ i}$ (km s ⁻¹)	v_b (km s ⁻¹)	$\frac{v_{sen\ i}}{v_b}$	binaridade
144217	B0.5IV	91	504	0.181	*
144218	B2V	56	459	0.122	*
144294	B2.5Vn	252	411	0.613	*
144470	B1V	100	491	0.204	
144334	B8V	38	363	0.105	
144661	B8IV/V	85	363	0.234	*
144844	B9V	10	350	0.029	*
145102	B9VpSi	34	350	0.097	*
145353	B9V	187	350	0.534	
145482	B2V	174	459	0.379	*
145483	B9V	225	350	0.643	
145501(1)	B8V+B9VpSi	59	357	0.167	*
145501(2)	B8V+B9VpSi	63	357	0.179	*
145502	B2IV	162	411	0.394	*
145519	B9Vn	255	350	0.729	*
145554	B9V	153	350	0.437	
145631	B9V	153	350	0.437	
145792	B6IV	21	342	0.062	
146001	B8V	170	363	0.468	
146029	B9V	212	350	0.607	
146284	B9III/IV	170	270	0.612	
146285	B8V	136	363	0.375	*
146416	B9V	255	350	0.729	
146706	B9V	229	350	0.655	
146998	A2pSr	23	350	0.068	
147010	B9II/III	21	278	0.076	*
147084	A4II/III	10	261	0.038	*
147009	B9.5V	136	350	0.389	
147165	B1III	56	390	0.144	*
147196	B6/B7Vn	297	377	0.789	
147703	B9Vn	238	350	0.680	
147888	B3/B4V	153	406	0.377	
147890	B9.5pSi	25	350	0.073	*
147932	B5v	153	153	0.394	
147933	B2V	196	411	0.477	*
147934	B2V	223	411	0.543	*
147955	B9V	238	350	0.680	
148184	B2Vne	148	401	0.369	*
148199	B9VSi	17	350	0.049	
148579	B9V	127	350	0.364	*
148594	B8Vnn	255	363	0.702	
148605	B2V	195	459	0.426	
148703	B2III-IV	70	364	0.192	*

Tabela 6.1: *continuação*

HD	MK	$v \sin i$ (km s ⁻¹)	v_b (km s ⁻¹)	$\frac{v \sin i}{v_b}$	binaridade
148860	B9.5V	255	350	0.729	
149438	B0V	10	515	0.019	*
149757	O9.5v	320	601	0.532	
151890	B1.5IV+...	180	411	0.438	*
151985	B2IV	52	459	0.113	*
157056	B2IV	31	459	0.068	*

Capítulo 7

Resultados e discussões

Neste capítulo são apresentados e discutidos os resultados do presente trabalho. Inicialmente, apresenta-se a nova função de distribuição e discuti-se o seu comportamento com os parâmetros q e y . Em seguida, é feita uma análise estatística da distribuição da rotação das estrelas da associação Sco OB2 utilizando a nova função.

A função de distribuição da rotação estelar generalizada

O principal resultado do presente trabalho consiste na proposta de uma função de distribuição da rotação estelar generalizada considerando o limite de *break-up*. Essa função pode ser escrita como:

$$\phi_q(y) = f_1 \left[1 - (1 - q) \frac{y^2}{\sigma^2} \right]^{\frac{1}{1-q}} + f_2 \left[1 - (1 - q) \frac{(1 + y)^2}{(2\sigma)^2} \right]^{\frac{1}{1-q}}, \quad (7.1)$$

onde

$$f_1 = y^4 - y^3 - y^2 + y$$

$$f_2 = \frac{(y - y^2)(-y^3 - 3y^2 + y + 3)}{(-3y^2 + 2y + 1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Seu limite de validade é restrito ao intervalo $0 \leq y < 1$ e para garantir sua positividade, deve-se observar que $\sigma > \sqrt{1 - q}$, quando $q < 1$. No contexto da rotação estelar, a restrição $y < 1$ traduz-se na imposição de um limite máximo para a velocidade de rotação estelar, a velocidade de *break-up* (ver seção 3.2). Está, portanto, posto um importante vínculo físico à função de distribuição da rotação estelar.

A função 7.1 é composta de dois termos e é importante analisar a contribuição de cada um deles para a distribuição, bem como o seu comportamento dependendo do parâmetro q . A figura 7.1 mostra o comportamento de cada termo da equação 7.1 em função do parâmetro q , com σ mantido constante ($\sigma = 1$). Observa-se que ambos os termos da equação são mais sensíveis ao parâmetro q para altos valores de y , permanecendo praticamente inalterados para baixos valores de y . Entretanto, o primeiro termo da equação apresenta pouca sensibilidade às variações do parâmetro q , restringindo o potencial de

ajuste da função à distribuição de dados observacionais no regime de altos valores de y . Observa-se ainda que ambas as funções são mais sensíveis a valores de q menores que 1, tendendo a permanecer inalteradas para grandes valores de q .

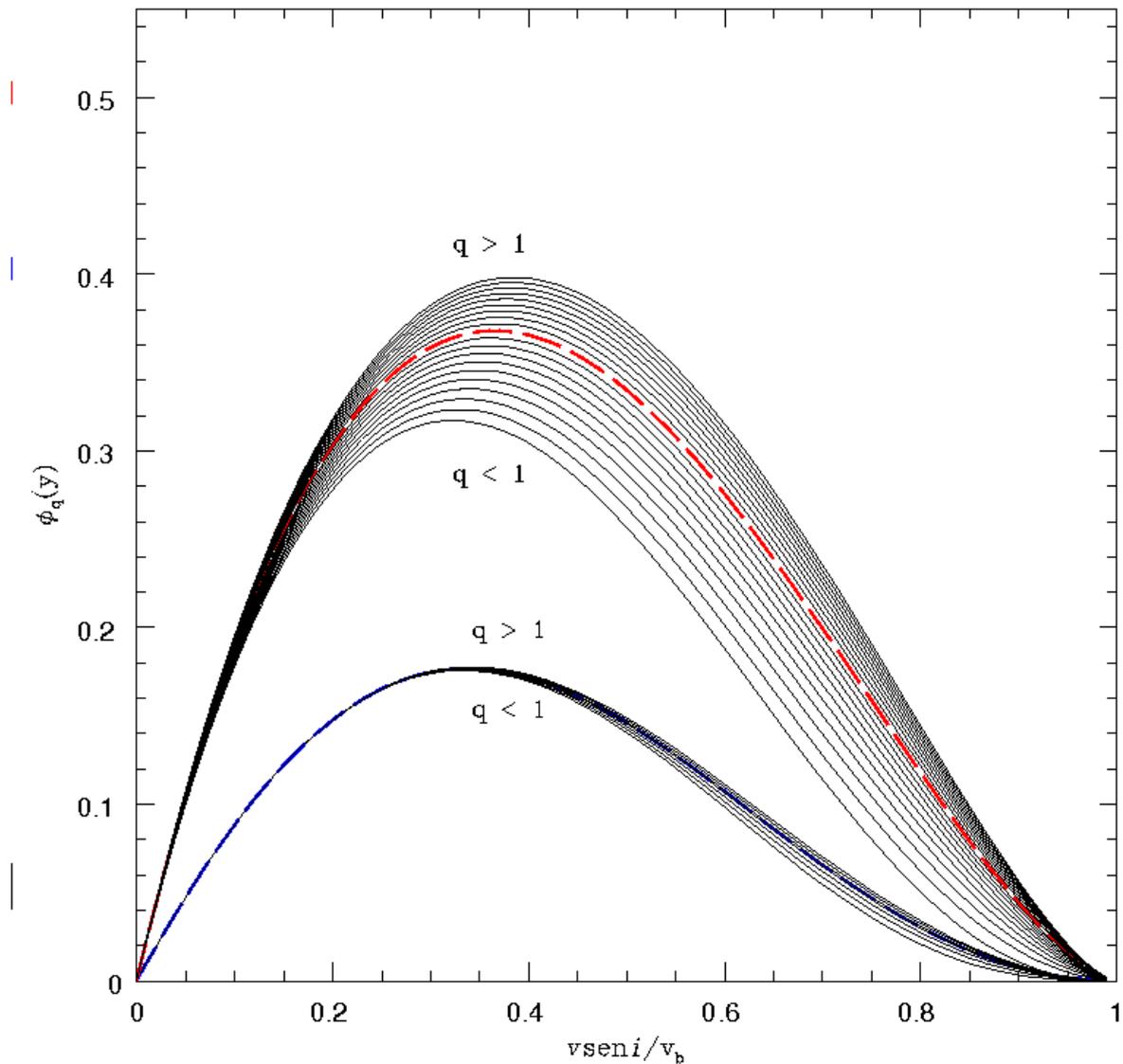


Figura 7.1: Comportamento dos termos da função 7.1 para diferentes valores de q e $\sigma = 1$. O conjunto de curvas inferior é a primeira parcela e o conjunto superior é a segunda parcela da função. As curvas em destaque correspondem a $q = 1$. Os valores de q utilizados variam de 0 a 2

Na figura 7.2 é mostrado o comportamento da função (soma dos dois termos analisados acima) em relação ao parâmetro q . Observa-se que o efeito do aumento de q é deslocar a moda da distribuição para a direita, apontando para uma correlação positiva entre o parâmetro q e a moda da distribuição. Tal comportamento, que neste caso é basicamente devido ao segundo termo da função, também é observado, embora de forma menos acentuada, na função de distribuição proposta por Soares [7] (figura 3.1 de Soares –

tese de doutorado [25]). Observa-se também que o decrescimento da função é menos acentuado para altos valores de y do que aquele apresentado pela função proposta por [7]. Esse comportamento da função 7.1 permite um melhor ajuste às distribuições onde altos valores de y são mais comuns. Também é evidente que a função de distribuição é nula para todo valor de y maior do que 1. Uma análise da função 7.2 mostra que isso é verdadeiro mesmo que o parâmetro q cresça indefinidamente.

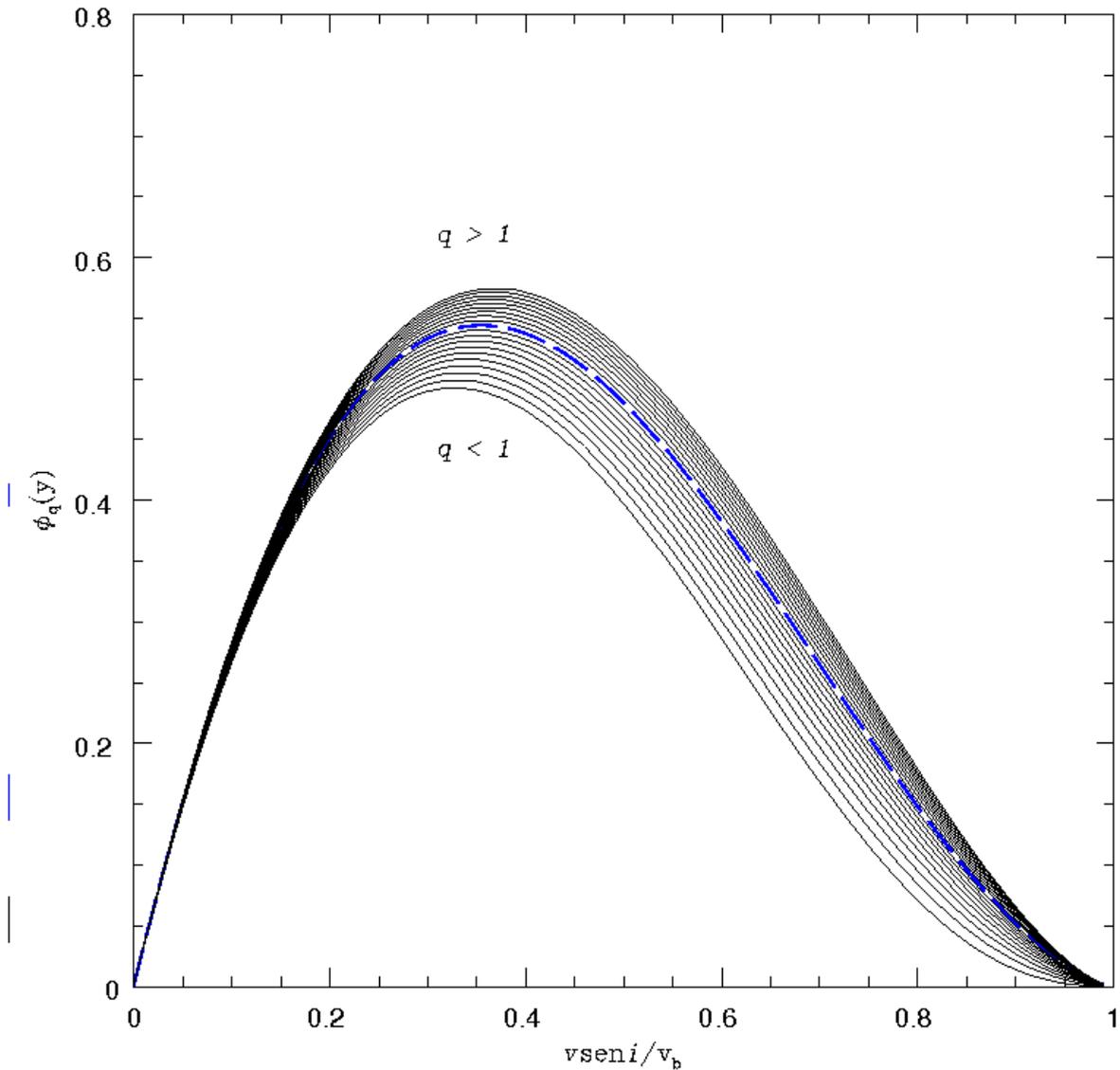


Figura 7.2: Comportamento da função 7.1 para diferentes valores de q , com $\sigma = 1$. A curva tracejada corresponde a $q = 1$. Os valores de q utilizados variam de 0 a 2. Observa-se a existência de uma correlação entre o valor de q e a moda da distribuição.

Análise estatística da rotação das estrelas de Sco OB2

O estudo da distribuição da velocidade rotacional das estrelas é fundamental ao entendimento da origem do *momentum* angular estelar e do processo de formação das estrelas. Nesse sentido, o conhecimento da estatística que controla essa distribuição é fundamental. Com o objetivo de investigar a natureza da distribuição da rotação da associação Sco OB2, submeteu-se uma amostra de 137 estrelas dessa associação [1] à uma análise estatística utilizando a função de distribuição da rotação estelar generalizada 7.1. Analisou-se a distribuição da rotação de todas as estrelas da associação Sco OB2, em seguida, analisou-se separadamente a distribuição da rotação das estrelas simples e binárias. Uma mesma análise em cada subgrupo da associação não foi possível, dado ao pequeno número de estrelas em cada sub-amostra quando separada por subgrupos. Por exemplo, na amostra de estrelas simples de LCC, há somente 9 estrelas e no caso de UCL, apenas 5 estrelas. Para comparação entre modelo e dados observacionais, utilizou-se o teste- χ^2 com um nível de significância de 5%.

O objetivo da análise foi verificar, segundo o modelo de função de distribuição proposto neste trabalho, se a hipótese de não-extensividade poderia ser descartada para a distribuição da velocidade rotacional das estrelas da associação de Sco OB2. Tal teste foi motivado pelos recentes resultados de estudo de distribuição da rotação estelar de aglomerados e do campo, os quais apontam para um comportamento não-extensivo dessas distribuições (Soares *et al.* 2006, Carvalho *et al.* 2009). Tais trabalhos, entretanto, analisaram amostras de estrelas com baixa média de rotação (em torno de 20 km s⁻¹). Uma análise estatística de amostra com alta rotação média é, portanto, pertinente.

O teste- χ^2 é paramétrico, ou seja, pressupõe-se o conhecimento prévio da distribuição teórica apropriada para os dados. Sendo assim, um controle cuidadoso na elaboração dos histogramas, mais especificamente na escolha do passo do histograma, é fundamental à uma boa análise, uma vez que o valor do passo pode influenciar a forma da distribuição. Assim, a escolha do valor do passo pode influenciar bastante o resultado da análise estatística, sendo necessário um processo de escolha de passo que minimize essa influência.

Nesse sentido, para determinação do passo de cada histograma, utilizou-se a escolha de Scott [26], dada pela equação 7.2. Scott mostrou que o comprimento ótimo para o passo, W , de um histograma, o qual permite uma estimativa mais eficiente e imparcial da distribuição de frequências é atingido, quando

$$W = 3.49 \times s \times N^{-\frac{1}{3}}, \quad (7.2)$$

onde s é o desvio padrão da amostra e N é o número de dados observacionais.

A rotação das estrelas da associação Sco OB2

A figura 7.3 mostra a distribuição das velocidades rotacionais para as estrelas da associação Sco OB2, para toda a amostra, e para as estrelas segregada por categoria, simples ou binária. Nota-se que a amostra apresenta objetos com rotação, $v_{\text{sen } i}$, em um largo intervalo, variando desde valores próximos de zero até o limite de *break-up* (ver tabela 6). A média de rotação para cada distribuição são as seguintes: $137,82 \text{ km s}^{-1}$ para a amostra completa, $172,50 \text{ km s}^{-1}$ para as estrelas simples e $116,82 \text{ km s}^{-1}$ para as estrelas binárias.

A despeito dos histogramas terem sido elaborados com diferentes passos, cuja escolha foi explicada acima, parece evidente que a distribuição da rotação das estrelas simples tendem a apresentar um pico de máxima frequência em rotações mais elevadas do que a distribuição das estrelas binárias. De fato, testes estatísticos realizados nessa amostra por Brown & Verschueren [1] demonstraram com um nível de confiança de 99,99%, que a distribuição das estrelas simples apresentam mais objetos com $v_{\text{sen } i} \geq 150 \text{ km s}^{-1}$ do que a distribuição da rotação das estrelas binárias. A menor incidência de estrelas com rotação elevada entre as binárias pode ser interpretada como sendo o resultado da transferência de *momentum* angular da rotação da estrela para o movimento orbital da sua companheira estelar, via efeito de maré (e.g., Zahn 1977 [2]) em sistemas binários espectroscópicos. Tal processo é responsável pela redução da rotação das estrelas binárias. Somente esse fato já é suficiente para justificar a análise em separado dos dois tipos de estrelas, simples e binárias.

A estatística da distribuição da rotação em Sco OB2

Nesta seção será feita a análise da estatística que governa a distribuição da velocidade rotacional de Sco OB2 quanto a sua natureza, se é extensiva ou não-extensiva. Conforme discutido no capítulo 2, o parâmetro q pode ser interpretado como sendo um medidor da extensividade de um sistema, ou de sua aditividade. A determinação do parâmetro q para a distribuição da rotação de Sco OB2 dará, portanto, o grau da extensividade daquele sistemas com respeito a rotação. É importante ressaltar que uma discussão sobre a física que controla a rotação estelar no contexto da entropia não-extensiva está muito além dos objetivos do presente trabalho. Aqui nos limitaremos a investigar a possibilidade da extensividade ou não na distribuição da rotação de Sco OB2. A resposta a essa indagação dará subsídio para investigações mais detalhadas sobre a não-extensividade de distribuições de $v_{\text{sen } i}$ em sistemas com objetos apresentando alta rotação.

A rotação das estrelas simples

A distribuição da velocidade rotacional relativa, $v_{\text{sen } i}/v_b$, das estrelas simples da associação Sco OB2 é apresentada na figura 7.4. Também são apresentadas as curvas de melhor ajuste para $q = 1, 0$ e para o valor de q que permite o melhor ajuste à distribuição.

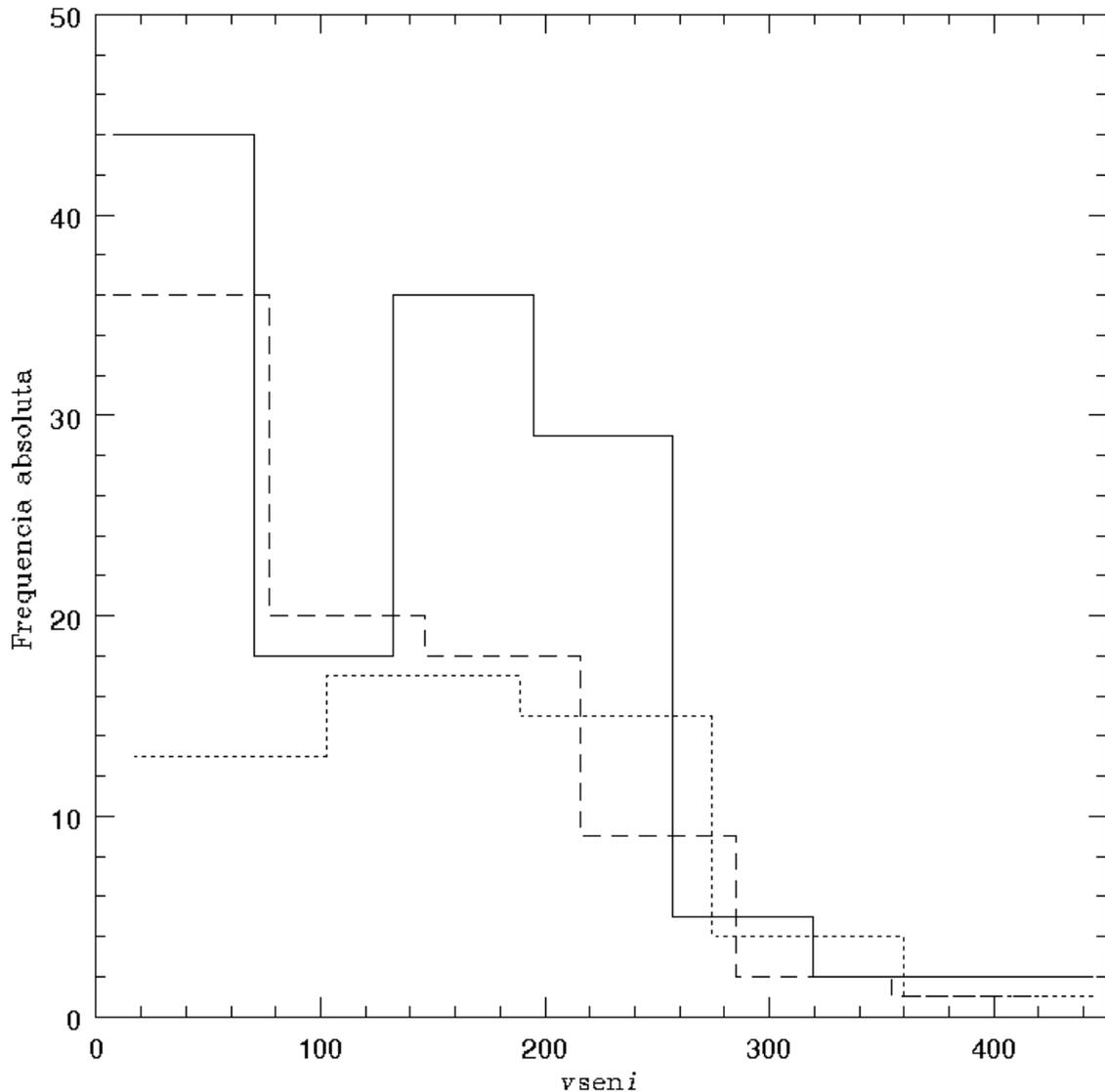


Figura 7.3: Distribuição da velocidade de rotação, v_{seni} . Linha tracejada: todas as estrelas da amostra, 137 objetos, e passo igual 0,155; linha pontilhada: estrelas simples, 50 objetos e passo igual a 0,206; linha contínua: estrelas binárias, 87 objetos e passo igual a 0,171.

Para selecionar as melhores curvas, utilizou-se o método dos mínimos quadrados para equações não lineares, onde se ajusta as variáveis q e σ . (Programa NONLINFT [27]). Para escolha do melhor ajuste, utilizou o teste- χ^2 com limite de significância de 5%.

A figura 7.4 apresenta a distribuição da rotação das estrelas simples da associação de Sco OB2. A curva obtida com a função 7.1 e $q = 1,0$ que melhor se ajusta à distribuição tem $\sigma = 0,20$ e está representada na figura pela linha tracejada. Esta curva pode ser descartada com um nível de confiança de mais de 95%, e portanto, a distribuição não parece ser extensiva. A curva que melhor descreve a distribuição das rotações das estrelas simples de Sco OB2 é obtida quando $q = 1,7$ e $\sigma = 0,70$. A probabilidade desta curva

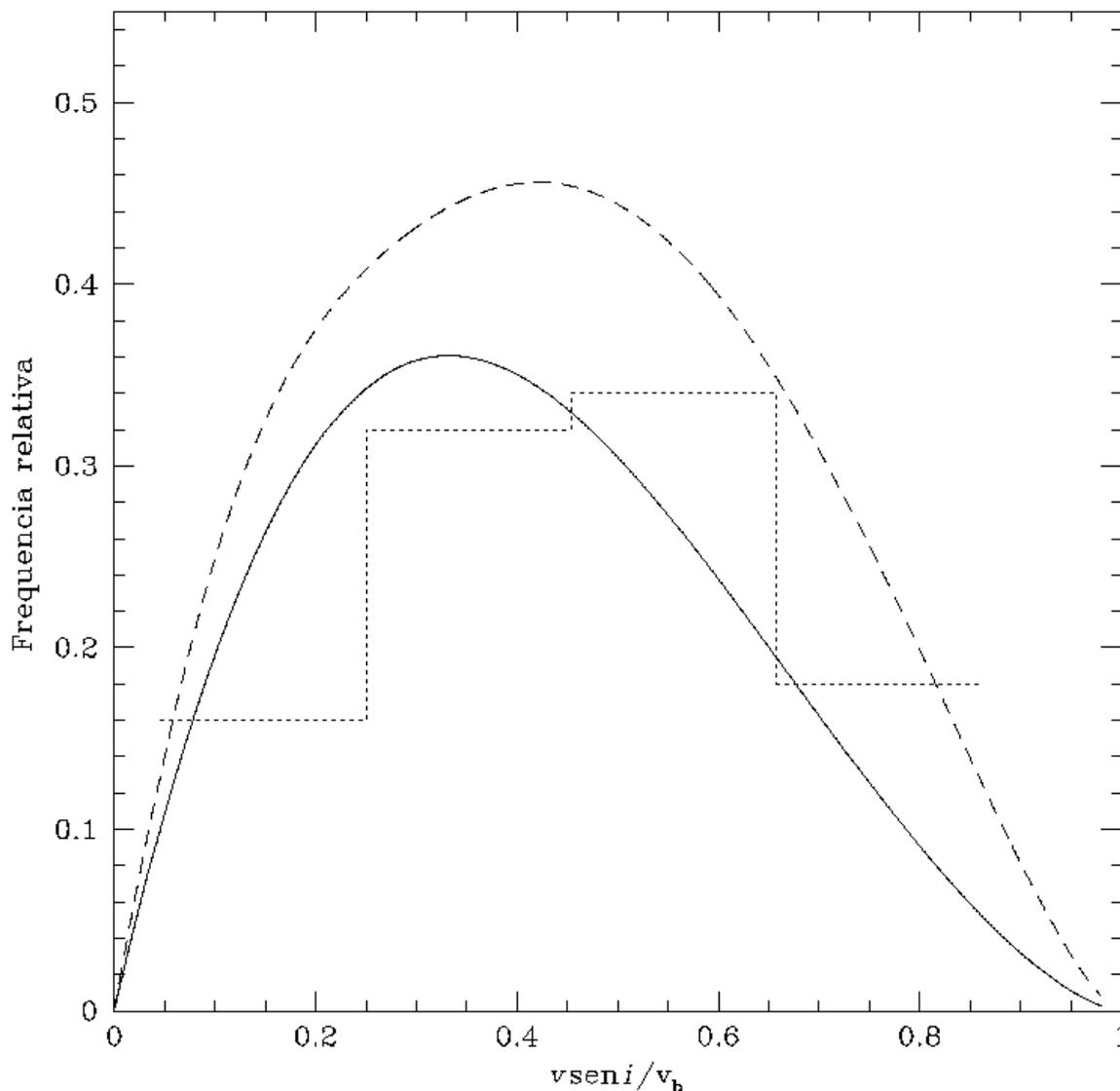


Figura 7.4: Distribuição da velocidade de rotação relativa, $v_{sen i}/v_b$, para as estrelas simples. A linha pontilhada representa o histograma dos dados observacionais, com 50 objetos e passo igual 0,206. A linha contínua representa a curva de melhor ajuste para a função 7.1 com parâmetros $q = 1,7$ e $\sigma = 0,70$. A linha tracejada indica o melhor ajuste da função 7.1, com $q = 1,0$ e $\sigma = 0,20$.

representar a distribuição da rotação das estrelas simples é 93%, segundo o teste- χ^2 . Tal resultado aponta para a não-extensividade nos fenômenos que controlam a distribuição de $v_{sen i}$, das estrelas de Sco OB2.

O processo de formação e evolução estelar não é um fenômeno isolado, e uma estrela ou um conjunto de estrelas em uma associação estelar, assim como em um aglomerado, não pode ser considerado um sistema isolado. Espera-se, portanto, que tais sistemas apresentem um grau de não-extensividade, de modo que o resultado aqui obtido não é de forma alguma estranho.

Como discutido em Soares *et al.*, o *momentum* angular de uma estrela é estabelecido nos momentos iniciais de sua formação, via acoplamento entre a rotação das estrelas e o *momentum* angular do seu disco de acreção. Para altas taxas de acreção ou desacoplamento tardio entre a estrela e seu disco, em ambiente de densidade elevada, como é o caso dos aglomerados e associações estelares, a velocidade média das estrelas tende para valores mais altos (ver Strom *et al.* [28]). Tal processo também poderia explicar diferenças encontradas entre o comportamento das estrelas de campo e de aglomerados (Melo *et al.* [29]). O resultado desse processo é o deslocamento da frequência máxima da distribuição da rotação na direção do regime de altas velocidades. E, como discutido no início deste capítulo, o parâmetro q está correlacionado com a moda da distribuição (ver figura 7.2), de modo que o processo de aumento da rotação média das estrelas se traduz em um aumento do valor de q .

A rotação das estrelas binárias

Na associação estelar Sco OB2, a quantidade de estrelas binárias supera a quantidade de estrelas simples. Usando dados da literatura, Brown (2001) [30] estimou as seguintes taxas de binaridade em Sco OB2: cerca de 80% para US, 85% para UCL e 70% para LCC. Mais recentemente Kouwenhoven *et al.* (2007) [31] estimou a taxa de binaridade em Sco OB2 como sendo 70%, com um nível de confiança de 3σ . Altas taxas de binaridade é de fato bastante comum entre estrelas dos tipos espectrais O, A e B. Por exemplo, na associação Cassiopeia OB6 a taxa de binárias espectroscópicas é em torno de $50 \pm 19\%$ (Hillwig *et al.* 2006), em NGC 6231, a taxa de sistemas binários espectroscópicos é de $63 \pm 20\%$ (Sana *et al.* 2007). A multiplicidade é na realidade um parâmetro fundamental para o processo de formação estelar. Para a amostra analisada no presente estudo, a taxa de binaridade é de cerca de 64%, e portanto, representa relativamente bem a população estelar de Sco OB2.

A figura 7.5 mostra a distribuição da velocidade de rotação relativa, $v_{sen i}/v_b$, para as estrelas binárias da associação Sco OB2. A linha tracejada representa o melhor ajuste permitido para a função 7.1, com $q = 1,0$ e $\sigma = 0,70$. O teste- χ^2 mostra que tal curva pode ser descartada com uma confiabilidade superior a 95%. A distribuição é melhor ajustada pela função 7.1 quando $q = 1,1$ e $\sigma = 0,30$, tendo probabilidade de 78%, segundo o teste- χ^2 . Observa-se que embora os resultados dos testes sejam favoráveis a não-extensividade, o sistema não está longe da extensividade. É possível que tal resultado se deva às alterações mais bruscas na rotação dessas estrelas devido à interação de maré. De acordo com a teoria de maré (Zahn 1977 [2]; Hut 1981 [32]), novamente é importante ressaltar que a interação gravitacional entre as duas componentes de um sistema binário resulta no acoplamento, segundo o qual a estrela transfere parte do *momentum* angular de sua rotação para o movimento orbital de sua companheira. Como resultado, as estrelas dos sistemas binários tendem a apresentar rotações mais baixas do que suas equivalentes

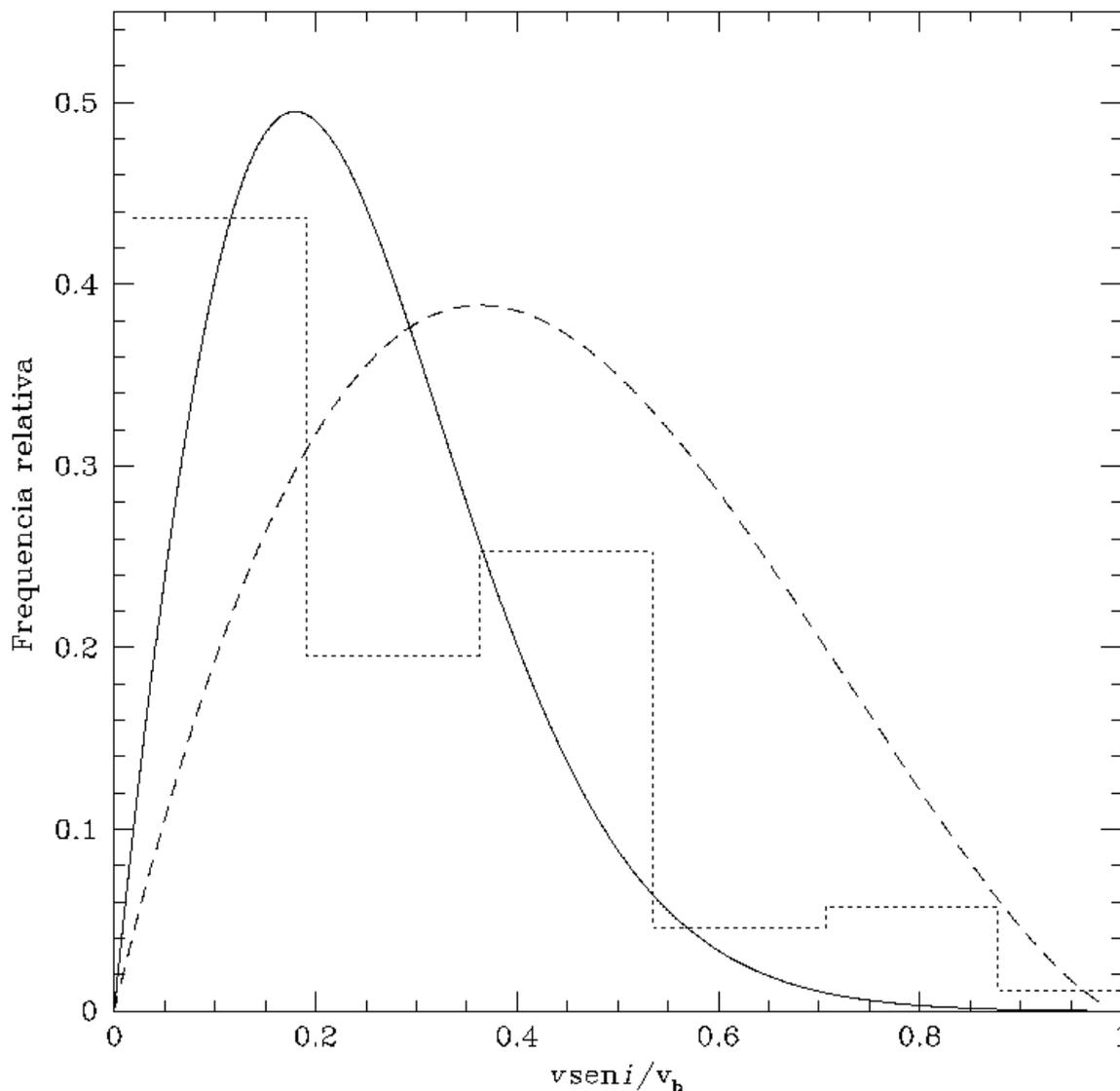


Figura 7.5: Distribuição da velocidade de rotação relativa, $v_{sen i}/v_b$, para as estrelas binárias da amostra. A linha pontilhada representa o histograma dos dados observacionais, com 87 objetos e passo igual 0,171. A linha contínua representa a curva de melhor ajuste para a função 7.1 com parâmetros $q = 1,1$ e $\sigma = 0,30$. A linha tracejada indica o melhor ajuste da função 7.1, com $q = 1,0$ e $\sigma = 0,70$.

simples, tendo a distribuição estatística descrita para valores de q mais baixos. Um valor de q menor para as binárias, portanto, é compreensível.

A rotação das estrelas de Sco SB2

A figura 7.6 apresenta a distribuição da rotação, $v_{sen i}/v_b$, para todas as estrelas de Sco OB2. A linha tracejada representa o melhor ajuste para a função 7.1 quando $q = 1,0$, com $\sigma = 0,30$. Assim como nos casos anteriores, pode-se descartar essa curva com uma confiabilidade superior a 95%. A distribuição é melhor ajustada pela função 7.1 quando

$q = 1,2$ e $\sigma = 0,30$, tendo probabilidade de 82%, segundo o teste- χ^2 . A distribuição

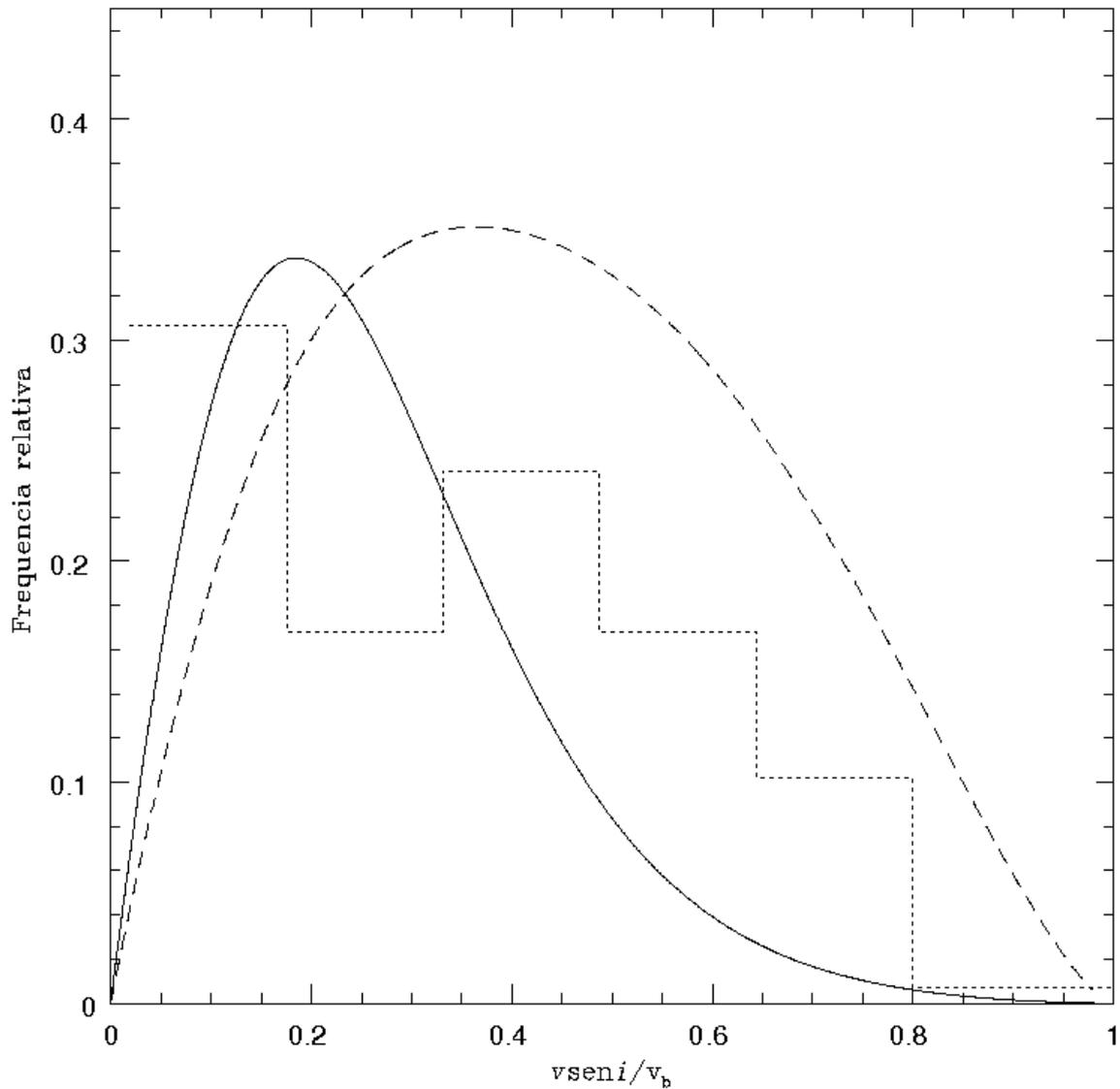


Figura 7.6: Distribuição da velocidade de rotação relativa, v_{seni}/v_b , para todas as estrelas da amostra. A linha pontilhada representa o histograma dos dados observacionais, com 137 objetos e passo igual 0,155. A linha contínua representa a curva de melhor ajuste para a função 7.1 com com parâmetros $q = 1,2$ e $\sigma = 0,30$. A linha tracejada indica o melhor ajuste da função 7.1, com $q = 1,0$ e $\sigma = 0,30$.

das velocidades de rotação de Sco OB2 reflete a tendência para a não-extensividade apresentada pelas distribuições das estrelas simples e binárias. O elevado percentual de sistemas binários (64%) faz com que a distribuição de v_{seni} de Sco OB2 tenha o seu máximo de frequência deslocado na direção do regime de baixa rotações, resultando em valor de q menor que aquele apresentado pelas estrelas simples.

Nossos testes indicam, portanto, que a distribuição da rotação das estrelas da associação Sco OB2 pode ser controlada por processos governados pela mecânica estatística

não-extensiva. Novamente, é importante lembrar que aqui não se buscou o melhor valor do parâmetro q para cada distribuição, ou uma resposta definitiva para a extensividade ou não na distribuição das rotações da associação Sco OB2. Tal tarefa requer uma análise mais detalhada, em que se considere os erros de medidas e estatísticos, bem como uma análise que leve em consideração um maior refinamento nas características das estrelas. Neste sentido, é necessário uma segregação dos objetos com características comuns, tais como intervalo de massa e temperatura, bem como um estudo comparativo do comportamento da função 7.1 para diferentes associações de estrelas OB.

Capítulo 8

Conclusões e perspectivas

Conclusões

Desde os trabalhos pioneiros desenvolvidos por Struve [3] e Chandrasekhar & Münch [4], várias funções de distribuição estatística da rotação estelar foram propostas. Utilizando argumentos da Mecânica Estatística de Maxwell-Boltzmann, Deutsch [5] sugeriu uma função de distribuição da rotação baseada numa distribuição Maxwelliana. Soares *et al.* [7] estudou a rotação estelar no contexto da mecânica estatística não-extensiva (Tsallis 1988) e apresentou uma função de distribuição das velocidades de rotação baseada numa maxwelliana generalizada, a q -Maxwelliana. Testes estatísticos, em amostras de estrelas de aglomerados e do campo apresentaram resultados mais favoráveis às q -maxwellianas (Soares *et al.* 2006 e Carvalho *et al.* 2009). As q -maxwellianas, entretanto, não impunham limite superior às velocidades de rotação, carecendo, portanto, de um importante vínculo físico da Astrofísica Estelar: a velocidade de *break-up*, v_b , das estrelas.

No presente trabalho utilizou-se a função de distribuição deduzida por Deutsch [5] para se estabelecer uma função de distribuição da rotação que leve em consideração o limite de *break-up* da rotação estelar. Essa função foi generalizada no contexto da Mecânica Estatística não-extensiva, de modo que reproduzisse a função original no limite quando q tende para 1,0. A função, assim elaborada, é definida no intervalo $0 \leq y < 1$, onde $y = v \sin i / v_b$ e $\sigma > \sqrt{1 - q}$, para $q < 1$, onde σ é uma função do raio polar e equatorial da estrela. Esta função apresenta uma correlação entre o valor do parâmetro q e a moda da distribuição da velocidade de rotação e decresce mais lentamente em altas rotações do que a função de Soares *et al.*. Apresenta também, maior sensibilidade a valores de q menores do que 1 para valores de alta rotação.

A função de distribuição proposta neste trabalho foi empregada para analisar a distribuição da rotação das estrelas da associação de Sco OB2. Para isso, analisou-se uma amostra de 137 estrelas, sendo 50 estrelas simples e 87 estrelas binárias. O maior valor de q foi apresentado pela distribuição das estrelas simples, ou seja, $q = 1,7$, enquanto para as estrelas binárias o resultado foi $q = 1,1$. Quando analisadas todas as estrelas de Sco OB2, simples e binárias, o resultado foi $q = 1,2$. Os resultados da análise mostraram,

portanto, que a distribuição da rotação em associação Sco OB2 parece ser controlada por mecanismos físicos melhor descritos pela Mecânica estatística não-extensiva. Esses valores, para o parâmetro q , precisam ser verificados com base em um estudo mais detalhado, que leve em conta as propriedades individuais das estrelas, os erros das medidas na rotação e os erros estatísticos da análise, bem como um estudo comparativo entre diferentes sistemas contendo objetos com alta rotação. Todavia, este trabalho permite afirmar que existem fortes indícios de que a distribuição da rotação das estrelas em regime de altas rotações tendem a ser melhor descrita pela estatística não-extensiva.

Perspectivas

Difícilmente um trabalho de dissertação de mestrado esgota um assunto, e isso é verdade principalmente no caso do presente estudo. O estudo da distribuição da rotação estelar com base na estatística não-extensiva está apenas começando e certamente trará à luz muito resultados que permitirão uma maior compreensão dos mecanismos físicos que controlam essas distribuições.

O presente trabalho é o primeiro a considerar o limite de *break-up* da rotação estelar e analisar sistemas contendo objetos com rotações muito próximas desse limite. Há muito ainda para ser explorado a partir deste ponto, mas queremos propor a realização de cinco investigações, consideradas como sendo de maior relevância no momento:

- Repetição deste trabalho, separando as estrelas por intervalo de $B - V$ e considerando os erros observacionais da amostra, bem como a contribuição dos erros intrínsecos da análise estatística;
- Estudo comparativo com base na função proposta neste trabalho para diferentes associações ou aglomerados contendo estrelas dos tipos espectrais O, B e A;
- Fazer uma análise comparativa entre a função de distribuição proposta neste trabalho e a função apresentada por Soares *et al.* nos regimes de alta e baixa rotação;
- Investigar melhor a correlação entre o parâmetro q e a moda da distribuição da velocidade de rotação;
- Investigar a relação entre σ e a geometria das estrelas no contexto do modelo de Roche;

Apêndice A

Obtendo a função $\phi_q(y)$

Considere-se a equação abaixo, que relaciona a função de distribuição $\phi(y)$ com a variável η ,

$$\phi(y) = y \int_y^1 \frac{\eta(1 - \eta^2)e^{-\frac{\eta^2}{\sigma^2}}}{\sqrt{\eta^2 - y^2}} d\eta. \quad (\text{A.1})$$

A solução aproximada desta equação pode ser obtida utilizando métodos numéricos de integração. Aplicando a regra de integração de Simpson, tem-se que

$$\int_y^1 \frac{\eta(1 - \eta^2)e^{-\frac{\eta^2}{\sigma^2}}}{\sqrt{\eta^2 - y^2}} d\eta \cong \frac{h}{3} \left[f(y) + 4f\left(\frac{1+y}{2}\right) + f(1) \right], \quad (\text{A.2})$$

onde $h = (1 - y)/2$. Cada parcela do segundo membro da equação A.2 pode ser calculado separadamente. A primeira parcela desta equação não é definida quando $\eta = y$, pois o termo $\sqrt{\eta^2 - y^2}$ se anula. Esse problema é contornado tomando-se o limite desta parcela quando $\eta \rightarrow y$, ou seja,

$$f(y) = \lim_{\eta \rightarrow y} \frac{\eta(1 - \eta^2)e^{-\frac{\eta^2}{\sigma^2}}}{\sqrt{\eta^2 - y^2}}.$$

Segue, portanto, que

$$f(y) = \frac{8}{3}(1 - y^2)e^{-\frac{y^2}{\sigma^2}}.$$

A segunda parcela resulta em

$$f\left(\frac{1+y}{2}\right) = \frac{(-y^3 - 3y^2 + y + 3)}{(-3y^2 + 2y + 1)^{\frac{1}{2}}},$$

e a última parcela é nula. Tem-se então o seguinte resultado:

$$\int_y^1 \frac{\eta(1 - \eta^2)e^{-\frac{\eta^2}{\sigma^2}}}{\sqrt{\eta^2 - y^2}} d\eta = \frac{2}{3}(1 - y) \left[\frac{2}{3}(1 - y^2)e^{-\frac{y^2}{\sigma^2}} + \frac{(-y^3 - 3y^2 + y + 3)}{(-3y^2 + 2y + 1)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(y+1)^2}{(2\sigma)^2}} \right]. \quad (\text{A.3})$$

Substituindo A.3 em A.1, esta função se torna

$$\phi(y) = f_1 e^{-\frac{y^2}{\sigma^2}} + f_2 e^{-\frac{(1+y)^2}{(2\sigma)^2}}, \quad (\text{A.4})$$

onde

$$f_1 = y^4 - y^3 - y^2 + y$$

e

$$f_2 = \frac{(y - y^2)(-y^3 - 3y^2 + y + 3)}{(-3y^2 + 2y + 1)^{\frac{1}{2}}}.$$

A função A.1 é válida no intervalo $0 \leq y < 1$ e, para garantir sua positividade, também se faz necessário impor a seguinte restrição, $\sigma > \sqrt{1-q}$ para valores de $q < 1$.

A generalização desta função consiste em generalizar as exponenciais, substituindo-as por q -exponenciais, de modo que se tem

$$\phi_q(y) = f_1 \left[1 - (1-q) \frac{y^2}{\sigma^2} \right]^{\frac{1}{1-q}} + f_2 \left[1 - (1-q) \frac{(1+y)^2}{(2\sigma)^2} \right]^{\frac{1}{1-q}}. \quad (\text{A.5})$$

A função A.4 é recuperada quando $q = 1$, como é demonstrado abaixo.

Considere-se a expressão A.5, no limite $q \rightarrow 1$:

$$\phi_{q=1}(y) = f_1 \lim_{q \rightarrow 1} \left[1 - (1-q) \frac{y^2}{\sigma^2} \right]^{\frac{1}{1-q}} + f_2 \lim_{q \rightarrow 1} \left[1 - (1-q) \frac{(1+y)^2}{(2\sigma)^2} \right]^{\frac{1}{1-q}}. \quad (\text{A.6})$$

Fazendo

$$x = \left[1 - (1-q) \frac{y^2}{\sigma^2} \right]^{\frac{1}{1-q}} \implies \ln x = \frac{\ln \left[1 - (1-q) \frac{y^2}{\sigma^2} \right]}{1-q},$$

de modo que

$$\lim_{q \rightarrow 1} \ln x = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\ln \left[1 - (1-q) \frac{y^2}{\sigma^2} \right]}{1-q}.$$

Segue, portanto, que

$$\lim_{q \rightarrow 1} \ln x = -\frac{y^2}{\sigma^2}$$

e sendo a função exponencial, uma função contínua, tem-se

$$\lim_{q \rightarrow 1} e^{\ln x} = e^{\lim_{q \rightarrow 1} \ln x},$$

de modo que

$$\lim_{q \rightarrow 1} x = e^{-\frac{y^2}{\sigma^2}}.$$

De forma análoga, pode-se demonstrar que para

$$z = \left[1 - (1 - q) \frac{(1 + y)^2}{(2\sigma)^2} \right]^{\frac{1}{1-q}} \implies \ln x = \frac{\ln \left[1 - (1 - q) \frac{(1+y)^2}{(2\sigma)^2} \right]}{1 - q},$$

tem-se

$$\lim_{q \rightarrow 1} z = e^{-\frac{(1+y)^2}{(2\sigma)^2}}.$$

Logo, segue-se que

$$\phi_{q=1}(y) = f_1 e^{-\frac{y^2}{\sigma^2}} + f_2(y) e^{-\frac{(1+y)^2}{(2\sigma)^2}}.$$

Referências Bibliográficas

- [1] BROWN, A. G. A.; VERSCHUEREN, W. High s/n Echelle Spectroscopy in Young Stellar Groups. ii. Rotational Velocities of Early-Type Stars in Sco OB2. *A*, v. 281, p. 15, 1997. [xii](#), [30](#), [31](#), [32](#), [39](#), [40](#)
- [2] ZAHN, J. P. A Lubricant for Tidal Friction. *A&A*, v. 57, p. 383, 1977. [2](#), [40](#), [43](#)
- [3] STRUVE, O. *Stellar Evolution*. 1^a. ed. New York: Princeton University Press, 1950. [2](#), [47](#)
- [4] CHANDRASEKHAR, S.; MÜNCH, G. On the Integral Equation Governing the Distribution of the Rotational Velocities of Stars. *ApJ*, v. 111, n. 380, p. 142, 1950. [2](#), [17](#), [47](#)
- [5] DEUTSCH, A. J. *Stellar Rotation*. A. slettebak. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company, 1970. [2](#), [3](#), [18](#), [22](#), [24](#), [28](#), [47](#)
- [6] TSALLIS, C. *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics*. 1^a. ed. Rio de Janeiro: Springer, 2009. [2](#), [8](#)
- [7] SOARES, B. B. et al. Tsallis Maximum Entropy Distribution Function for Stellar Rotational Velocities in the Pleiades. *Physica A*, v. 364, p. 413–422, 2006. [2](#), [3](#), [7](#), [18](#), [22](#), [24](#), [29](#), [37](#), [38](#), [47](#)
- [8] BORGES, E. P. Na sutil Fronteira entre a Ordem e o Caos. *Ciência Hoje*, v. 38, n. 223, p. 42–46, 2006. [7](#)
- [9] ARIMITSU, T.; ARIMITSU, N. of Velocity Fluctuation in Turbulence by a Statistics Based on Generalized Entropy. *Physica A*, v. 305, p. 218–226, 2002. [7](#)
- [10] LAVAGNO, A. et al. Astrophysical Letters and Communications. *Phys. Lett. A*, v. 35, p. 449, 1998. [7](#)
- [11] TSALLIS, C.; ANJOS, J. C.; BORGES, E. P. Fluxes of Cosmic Rays: a Delicately Balanced Stationary State. *Phys. Lett. A*, v. 310, p. 372–376, 2003. [7](#)
- [12] BECK, C. Generalized Statistical Mechanics of Cosmic Rays. *A*, v. 331, p. 173–181, 2004. [7](#)
- [13] BORGES, E. P. Manifestações Dinâmicas e Termodinâmicos de Sistemas Não-Extensivos. *Tese de Doutorado*, p. 199, 2004. [7](#)
- [14] BORLAND, L. *PRL*, v. 83, 2002. [7](#)
- [15] ABE, S.; SUZUKI, N. itineration of the Internet over Nonequilibrium Stationary States in Tsallis Statistics. *Phys. Rev. E*, v. 67, p. 4, 2003. [7](#)

- [16] SLETTEBAK, A. Determination of Stellar Rotational Velocity: Calibration of Fundamental Stellar Quantities. *IAU Symp.*, v. 111, p. 163, 1895. [13](#)
- [17] VANBELLE, G. T. et al. Altair's Oblateness and Rotation Velocity from Long-Base Line Interferometry. *ApJ*, v. 559, p. 1155, 2001. [13](#)
- [18] SLETTEBAK, A. et al. A System of Standard Stars for Rotational Velocity Determination. *ApJS*, v. 29, p. 137, 1975. [14](#)
- [19] ROYER, F. On the Rotation of A-Type Stars. *Lect. Notes Phys.*, v. 735, p. 207–230, 2009. [14](#)
- [20] GRAY, D. *The Observation and Analysis of Stellar Photospheres*. 3rd. ed. New York: Springer, 2005. [14](#)
- [21] JERROLD, E. M.; TUDOR, S. *Introduction to Mechanics and Symmetry: a Basic Exposition of Classical I*. 2nd. ed. EUA: Springer, 1999. [15](#)
- [22] QUELOZ, D. et al. The Rotational Velocity of Low-Mass Stars in the Pleiades Cluste. *A&A*, v. 335, p. 183, 1998. [24](#)
- [23] FUCHS, B. et al. Origin of the Local Bubble. *Space Science Reviews*, v. 143, p. 437–448, 2008. [30](#)
- [24] RAJAMOHAN, R. *Pramana*, v. 7, p. 160–180, 1978. [30](#)
- [25] SOARES, B. Função de Distribuição Generalizada Aplicada à Velocidade de Rotação Estelar. *Tese de doutorado*, p. 24, 2006. [38](#)
- [26] SCOTT, D. On Optimal and Data-Based Histograms. *Biometrika*, v. 66, p. 605–610, 1979. [39](#)
- [27] PHILIP, R.; BERVIGTON, D.; KEITH, R. *Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*. 3rd. ed. Boston: McGraw Hill, 2003. [41](#)
- [28] STROM, S. E.; WOLFF, S. C.; DROR, D. H. A. Rotational Velocities for B0-B3 stars in 7 Young Clusters: Further Study of the Relationship Between Rotation Speed and Density in Star-Forming Regions. *AJ*, v. 129, p. 809, 2005. [43](#)
- [29] MELO, C. F. H.; PASQUINI, L.; MEDEIROS, J. R. D. Accurate $v \sin i$ Measurements in M 67: The Angular Momentum Evolution of $1.2 M_{\odot}$ Stars 1. *A&A*, v. 375, p. 851, 2001. [43](#)
- [30] BROWN, A. The Binary Population in OB Associations. *A&A*, v. 322, p. 43–46, 2001. [43](#)
- [31] KOUWENHOVEN, M. B. N. et al. The Primordial Binary Population. II. - Recovering the Binary Population for Intermediate Mass Stars in Scorpius OB2. *A&A*, v. 474, p. 77, 2007. [43](#)
- [32] HUT, P. Tidal Evolution in Close Binary Systems. *A&A*, v. 99, p. 126–140, 1981. [43](#)