

Universidade do Estado do Rio Grande do Norte
Faculdade de Ciências Exatas e Naturais - FANAT
Departamento de Física
Programa de Pós-Graduação em Física

Isaac Mendonça Macêdo

Ondas Gravitacionais Geradas por Sistemas
Binários Compactos

Mossoró

2016

Isaac Mendonça Macêdo

**Ondas Gravitacionais Geradas por Sistemas Binários
Compactos**

Dissertação apresentada ao programa de Pós-graduação em Física da Universidade do Estado do Rio Grande do Norte como parte dos requisitos para obtenção do título de MESTRE EM FÍSICA

Orientador: Prof. Dr. Fabio Cabral Carvalho (UERN)

Mossoró

2016

Isaac Mendonça Macêdo

Ondas Gravitacionais Geradas por Sistemas Binários
Compactos

Dissertação apresentada ao programa de Pós-graduação em Física da Universidade do Estado do Rio Grande do Norte como parte dos requisitos para obtenção do título de MESTRE EM FÍSICA

Banca Examinadora

Prof. Dr. Fabio Cabral Carvalho (UERN)

Orientador

Prof. Dr. Makarius Oliveira Tahim (UECE)

Examinador externo

Prof. Dr. Edésio Miguel Barboza Júnior (UERN)

Examinador interno

*Este trabalho é dedicado à minha mãe, Maria Celsa
Mendonça Macêdo*

Agradecimentos

À minha mãe, Maria Celsa Mendonça Macêdo, por sua paciência em me educar de maneira profissional e moral e por estar sempre ao meu lado me fortalecendo e apoiando na minha carreira acadêmica e profissional.

À Francisca Cleiva Rodrigues Pereira, por ter dedicado atenção, força, incentivo e que, sem ela essa conquista não teria sido possível e também por ter compartilhado comigo as viagens frias nas madrugadas no trajeto de Quixadá-CE à Mossoró-RN para estudar.

Ao Professor Dr. Fabio Cabral Carvalho, pessoa fundamental na realização deste trabalho, pela disposição, paciência, amizade, dedicação e segura orientação facultado a minha humilde pessoa.

Aos meus colegas de turma/curso, que se tornaram grandes amigos, pelo menos em sua maioria, Marcone Oliveira da Costa, Hissa Maria Lúcio Medeiros, Cornélio Rodrigues Filho, Meirielle Marques de Góis, Antonia Veruska B. Pinheiro pelo conhecimento de vida, alegrias, estudos em grupo, apoio incondicional, críticas e elogios, ideias, sugestões e discussões, realizadas durante os dois anos intensos desse mestrado.

Aos novos colegas que conheci durante o mestrado, Ricardo Luiz, Sérgio Murilo, Italo Philipe, Vanessa Amaral, Ana Carolina, Claudivan Moreira, Leandro Fábio, Diego Silva, Daniel Carneiro, Isivania Gomes, Francisco Bismak, Queiroz, Wellington S. Amorim, João Neto, José Nacizo, Lázaro José, Marcos Vinícius, Moisés Pereira, Mylena Mayla, Ozenildo Moraes, Marreiros, João Batista, Vandielma Silva. Aos poucos amigos que fiz durante toda a minha vida, Marcela Lopes Alves, Elisabeth Cardoso, Cássia Viana, Gustavo Nogueira, Jhonata Matias,

Matheus Oliveira, Ricardo Araújo, Alessandra Alexandrino, Edmauro Araújo e boa parte de meus professores da graduação que se tornaram pessoas honrosas em minha vida: Alexandre Gonçalves(Agopin), Gilberto Dantas, José Sidou, Rinaldo e Silva de Oliveira.

Aos meus familiares, Jarbas M. Macêdo, Jaqueline M. Macêdo e Francisco Jonas M. Macêdo. Meu primeiro sobrinho João Grabiel O. Macêdo.

Aos meus professores, pelo respeito, admiração, comprometimento profissional e aprendizado adquiridos durante a minha vida acadêmica, como cito a Nilson Sena pela sabedoria.

Finalmente, a CAPES pelo apoio financeiro.

Você não sabe o quanto eu caminhei
Pra chegar até aqui
Percorri milhas e milhas antes de dormir
Eu nem cochilei
(A Estrada - Cidade Negra)

Resumo

Em 1916, Einstein previu a existência das ondas gravitacionais a partir da solução das equações de campo da teoria da Relatividade Geral. Após 100 anos, a colaboração científica internacional LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*) anunciou que tinha, pela primeira vez, detectado diretamente ondas gravitacionais. Neste período tivemos grandes esforços para sua detecção direta. As ondas gravitacionais são produzidas por eventos astronômicos cataclísmicos que deformam o “tecido” do espaço-tempo ao propagarem-se pelo Universo à velocidade da luz. As ondas observadas foram emitidas pela colisão de dois buracos negros com cerca de 30 vezes a massa do nosso Sol, que ao girar em torno um do outro, foram colapsando e girando cada vez mais depressa até se fundirem e formarem um único buraco negro. E esse violento encontro final deu origem a um novo buraco negro gerando as ondas gravitacionais observadas.

Nesta dissertação estudamos a produção de ondas gravitacionais de sistemas binários de objetos compactos, em particular buracos negros e/ou estrelas de neutron. Essas fontes compõem um dos cenários mais esperados para a detecção de ondas gravitacionais que consiste no processo de coalescência de sistemas binários formados por buracos negros e/ou estrelas de neutron. A análise desse processo ocorre pelo estudo das fases de coalescência, que são marcados pela inspiração. Nossos estudos cobrem uma ampla faixa de massa, que se estende desde massas estelares até supermassivos ($\sim 10M_{\odot} - 109M_{\odot}$).

Abstract

In 1916, Einstein predicted the existence of gravitational waves from the solution of the field equations of the theory of general relativity. After 100 years, the international scientific collaboration LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) announced that it had for the first time, directly detected gravitational waves. In this period we had great efforts for its direct detection. Gravitational waves are produced by cataclysmic astronomical events that deform the “web” of space-time to propagate to the universe at the speed of light. The observed waves were emitted by the collision of two black holes with about 30 times the mass of our Sun, which by rotating around each other, were collapsing and turning faster and faster to merge and form a single black hole. This violent final meeting gave rise to a new black hole generating gravitational waves observed.

This dissertation studied the production of gravitational waves of binary compact objects systems, particularly black holes and/or neutron stars. These sources comprise one of the most expected scenarios for detection of gravitational waves consisting of the coalescence process of binary systems formed by black holes and/or neutron stars. The analysis of this process is the study of the stages of coalescing, which are marked by inspiration. Our studies cover a wide mass range, which extends from stellar bodies to supermassive ($\sim 10M_{\odot} - 109M_{\odot}$).

Este trabalho é dedicado à minha mãe, Maria Celsa Mendonça

Macêdo

Sumário

Lista de Tabelas	i
Lista de Figuras	ii
1 Introdução	1
2 Teoria da Relatividade Geral	3
2.1 Equações de Einstein Linearizadas	5
3 Radiação Gravitacional de Compactas Binárias	9
3.1 Inspiral de Compactas Binárias	11
3.1.1 Potência Irradiada	15
3.2 Cálculo da Amplitude Reduzida	16
3.3 Órbitas Elípticas e Energia Total e Espectro de Frequência da Radiação Emi- tida	25
3.4 Órbitas Elípticas Keplerianas	25
3.5 Energia Irradiada	28
4 Fontes e Detectores de Ondas Gravitacionais	35
4.1 Ondas Gravitacionais Primordiais - Modos B, Inflação	46
4.2 Sistemas Binários e Pulsares	49
4.3 Buracos Negros Supermassivos Binários	54
5 Conclusões	57

A O tensor Energia Momento de Onda Gravitacionais	59
A.1 O fluxo de Energia	62
Bibliografia	66

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

3.1	Distorção de um anel de partículas-teste durante um ciclo de uma onda gravitacional propagando-se na direção z. O efeito de ambas polarizações lineares é mostrado.	13
3.2	Linhas de campo de uma onda gravitacional. Em (a) a polarização “+”; em (b) polarização “x”.	14
4.1	Joseph Weber e seu detector de ondas gravitacionais(Fonte: http://fizzible.com)	38
4.2	Diagrama simplificado do detector avançado LIGO)	40
4.3	Resultados principais da análise de GW150914 [17]	41
4.4	Vista aérea do Interferômetro Avançado LIGO em Hanford(Washington) . .	42
4.5	Vista aérea do Interferometro Avançado LIGO em Linvigston(Louisiana) . .	43
4.6	Esquema da antena detectora de ondas gravitacionais Schenberg mostrando câmaras criogênicas	46
4.7	Assinatura dos modos de polarização de ondas gravitacionais inflacionarias da Radiação Cosmica de Fundo em Micro-Ondas.(Imagem: http://www.skyandtelescope.com)	47
4.8	BICEP2: OG’s da inflação geram padrão de torção na polarização da radiação cósmica de fundo, conhecido como modo-B. Padrão observado com o telescópio BICEP2. [21]	49
4.9	Diagrama bidimensional com período em função de sua variação para evolução populacional de pulsares (Imagem:Instituto de Astrofísica de Andalucía (IAA-CSIC))	52

Capítulo 1

Introdução

As ondas gravitacionais (OGs) são, segundo a Teoria da Relatividade Geral, perturbações na curvatura local do espaço-tempo que viajam pelo vácuo à velocidade da luz segundo a teoria da Relatividade Geral de Einstein. Elas interagem muito fracamente com a matéria e assim chegam até nós na sua forma original, nos dando informação direta de suas fontes, como explosões de supernovas, formação de buracos negros, instabilidades de estrelas de nêutron, etc. Essas ondas são produzidas por qualquer distribuição de massa sofrendo aceleração e cobrem um espectro de mais de 20 ordens de grandeza em frequência. Ondas gravitacionais transportam energia através de deformações do espaço-tempo, isto é, através do campo gravitacional. Da mesma maneira que um objeto ao cair em um lago gera uma série de ondas com origem no ponto onde a superfície da água é inicialmente perturbada, o movimento de corpos massivos num campo gravitacional pode gerar à sua volta pequenas perturbações no espaço-tempo. A estas perturbações que se propagam pelo “tecido” do espaço-tempo damos o nome de

As características das OG's, tais como, a energia, a forma e a polarização, apenas para citar poucos exemplos, podem nos fornecer um grande número de informações sobre os processos astrofísicos pelos quais estas ondas foram geradas. Observando o universo no espectro das OG's via *redshift* é possível obter informações importantes a respeito da existência de buracos negros; da distribuição de galáxias, distancia e posição; da distribuição de estrelas de nêutrons e buracos negros no Universo; do redshift no qual se iniciou a formação estelar; da razão de formação de estrelas em função do *redshift*; e, dos mecanismos de explosão de supernovas, bem como suas massas e momentos angulares.

Uma onda gravitacional é caracterizada completamente por apenas quatro grandezas: seu comprimento de onda, sua amplitude, sua polarização e sua direção de propagação. O seu comprimento de onda é o tamanho de um ciclo completo da onda na direção de propagação. Como ela viaja com a velocidade da luz, a distância percorrida pela onda em um segundo, dividida pelo comprimento de onda seria igual ao número de ciclos por segundo da onda, ou seja, a sua frequência. Já a sua amplitude é o seu tamanho no sentido transversal à direção de propagação da onda. Enquanto os comprimentos de onda são gigantescos, normalmente muito maiores que um quilômetro, as amplitudes das ondas são diminutas, muito menores que o diâmetro de um próton. Finalmente, as ondas também têm direção e polarização. Através da sua direção de propagação sabemos de onde ela vem, podendo deduzir de onde elas se originaram no céu, ou seja, sua fonte astrofísica ou cosmológica. E a polarização é uma espécie de formato que ela tem no espaço, que nos diz muito sobre o movimento das massas na fonte que a produziu.

Neste trabalho investigamos as propriedades de ondas gravitacionais geradas por sistemas binários compostos por estrelas de neutron e/ou buracos negros. Observacoes indicam que no centro de quase todas as galaxias habita um buraco negro supermassivo com $10^6 M_{\odot}$. Essas observacoes estao em concordancia com alguns modelos teoricos quando se referem ao processo de formacao destes objetos compactos. Tais modelos propoem que o crescimento de sementes primordiais via acrecao de materia leva a formacao desses objetos. As sementes com $10^2 M_{\odot}$ sao possivelmente formadas por estrelas primitivas bastante massivas. [1, 2, 3]

Organizamos esta dissertacao da seguinte maneira: no Capitulo 2, apresentamos uma revisão da Teoria Geral da Relatividade e obtemos as Equacoes de Campo linearizadas. O Capitulo 3 foi destinado ao cálculo das características de OGs geradas por sistemas binários. Calculamos a potência e a energia irradiada, bem como a taxa de oscilação. No Capitulo 4 fazemos uma descricao de detectores de massa ressonante, interferometricos terrestres e espaciais, respectivamente.

Capítulo 2

Teoria da Relatividade Geral

Começamos a nossa discussão de gravidade, considerando a descrição da força gravitacional clássica, não-relativista, da teoria de Newton

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho \Rightarrow \nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho, \quad (2.1)$$

onde os termos Φ é o potencial gravitacional, que surge de do fato de que $\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi$, G é constante gravitacional e ρ é uma densidade de massa gravitacional. Com relação ao fator de densidade de massa, ja encontrado anteriormente, este nada mais é do que o próprio tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$ em um contexto generalizado.[4, 5]

Se observarmos a equação (2.1) vemos claramente que a gravidade Newtoniana não é compatível com a relatividade especial, uma vez que, não existe dependência explicita com o tempo, implicando que o potencial Φ responde instantaneamente a qualquer simples perturbação na densidade de matéria ρ e, por sua vez, na força gravitacional sobre uma partícula. Tal fato viola a postulada da relatividade especial de que os sinais não podem propagar mais rápido do que do que a velocidade da luz c . [6]

A fonte do campo gravitacional na teoria de Newton é a densidade de massa. Na generalização relativística consideramos a energia total, incluindo a massa de repouso. Em um sistema de coordenadas co-móveis (SCC), um elemento fluido tem densidade de energia total ρ . A idéia é construir uma teoria invariante para evitar a introdução de sistemas de coordenadas preferidos, fazendo uso do tensor energia-momento como a fonte do campo gravitacional. Assim, podemos identificar a densidade de energia como sendo a componente T^{00} do tensor energia-momento.

As equações de campo de Einstein podem ser escritas de maneira geral em termos do tensor

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} + \mu g^{\alpha\beta} R + \Lambda g^{\alpha\beta} \quad (2.2)$$

onde temos respectivamente $G^{\alpha\beta}$ sendo um operador com componentes $(\alpha\beta)$, $R^{\alpha\beta}$ é o tensor de Ricci, R escalar de Ricci, Λ a constante cosmológica e ainda μ uma constante que determinamos fazendo uso do Princípio de Equivalência de Einstein e também quando tratamos da conservação do tensor energia momento, da qual temos $T_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0$, que implica diretamente em $g_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0$, ou ainda

$$(R^{\alpha\beta} + \mu g^{\alpha\beta} R)_{;\beta} = 0 \quad (2.3)$$

Daí tiramos o valor da constante $\mu = -\frac{1}{2}$. Assim, temos que

$$G_{;\beta}^{\alpha\beta} = (R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R)_{;\beta} = 0. \quad (2.4)$$

Consequentemente, escrevemos a generalização, segundo as informações acima como

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R + \Lambda g^{\alpha\beta} \quad (2.5)$$

por fim, temos as Equações de Campo da Relatividade Geral, ou simplesmente equações de Campo de Einstein, onde Λ e k são constantes que devem ser determinadas Portanto,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu} \quad (2.6)$$

satisfaz todas as restrições que impusermos: ambos os lados são simétricas, é um tensor de segunda ordem com divergência zero absoluto, e o lado esquerdo é formada apenas de combinações da métrica e do tensor linear de Riemann. Aqui $k = 8\pi G/c$ é a constante gravitacional de Einstein, G é a constante de gravitação universal e c é a velocidade da luz no vácuo. [7, 8]

As equações de Einstein (2.6) indicam que a curvatura do espaço-tempo é igual a contribuição de uma constante multiplicado pelo tensor matéria-energia. A parte esquerda da Eq. (2.6) trata da curvatura do espaço-tempo e é dada, matematicamente, pelo tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, no qual cada índices varia tomando os valores de 0, 1, 2 e 3. O tensor $R_{\mu\nu}$ é chamado tensor de Ricci, formado a partir do tensor de curvatura de Riemann, o qual é de ordem 4, sendo a maneira mais geral de se descrever a curvatura de um espaço de n-dimensões

qualquer. No caso da Teoria da Relatividade Geral (TRG), o espaço-tempo de 4 dimensões implica na existência de $4^4 = 256$ componentes. O tensor de Ricci, de ordem 2, é a forma reduzida do tensor de Riemann para ser usada nas equações de Einstein. A forma reduzida é obtida através da aplicação de relações de simetria que eliminam os termos redundantes no tensor de Riemann. O tensor $g_{\mu\nu}$ é o tensor da métrica do espaço-tempo e faz, nas equações de Einstein, o papel do campo. O campo da métrica transmite as perturbações na geometria (ondas gravitacionais) na velocidade da luz, uma situação análoga ao que ocorre no eletromagnetismo. O campo da métrica é o análogo ao campo gravitacional na teoria newtoniana. Finalmente, o termo R , na última equação, é o escalar de curvatura, um escalar associado ao tensor de Ricci e ao tensor da métrica. [9]

Antes de darmos continuidade a nossa discussão estabelecemos um conjunto de unidades mais conveniente, no qual tomamos que a constante de gravidade universal tem valor unitário $G = 1$. Pela mesma razão, a constante da velocidade de propagação da luz no vácuo c , também tem valor unitário $c = 1$, a estas quantidades chamamos de unidades geometrizadas.

2.1 Equações de Einstein Linearizadas

Na ausência de gravidade, o espaço-tempo tem uma configuração de geometria de Minkowski. Por conseguinte, um campo gravitacional fraco corresponde a uma região de espaço-tempo que é apenas "ligeiramente" curvo. Em outras palavras, numa região tal que existam coordenadas x^μ em que a métrica toma a forma da pela equação abaixo. Fazer uma linearização significa tomar na ausência de gravidade o espaço-tempo ligeiramente plano, pois, um campo gravitacional fraco é aquele em que o espaço-tempo é 'quase' plano. Isto é definido como um espaço no qual as coordenadas existem em que a métrica tem componentes dado

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad \text{onde} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (2.7)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é definido para ser $diag(-1, +1, +1, +1)$ e $|h_{\mu\nu}|$ significa a magnitude da componente típico não nula de $h_{\mu\nu}$. Notemos que a condição $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ impõe que o campo gravitacional seja fraco, e, além disso limita para que o sistema de coordenadas seja aproximadamente cartesiano. Nos referiremos à $h_{\mu\nu}$ como a perturbação métrica. Neste contexto, qualquer pequena perturbação significa que manteremos apenas os termos que são lineares em $h_{\mu\nu}$ -

termos de ordem superior são descartados.

Em detrimento dessa razão, os índices serão levantados e baixados apenas utilizando o plano métrico $\eta_{\mu\nu}$. A perturbação métrica $h_{\mu\nu}$ transforma-se como um tensor sob transformações de Lorentz, mas não sob transformações geral de coordenadas.

$$h_{\beta}^{\mu} = \eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\beta} \quad (2.8)$$

$$h^{\mu\nu} = \eta^{\nu\beta} h_{\beta}^{\mu} \quad (2.9)$$

onde definimos o traço por

$$h = h_{\alpha}^{\alpha} \quad (2.10)$$

e ainda o tensor chamado de traço reverso de $h_{\alpha\beta}$ que é

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}h \quad (2.11)$$

que recebe tal nome pelo fato de

$$\bar{h} = \bar{h}_{\alpha}^{\alpha} = -h. \quad (2.12)$$

As consequências destas definições é que obtemos praticamente os mesmos efeitos físicos, uma vez que partimos de uma perturbação da métrica no contexto relativístico cuja magnitude é muito pequena, e por esse fato, tomemos em primeira ordem de aproximação que $g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$. Ainda como consequência destas definições, podemos reescrever as equações de Campo fraco de Einstein onde partimos do tensor curvatura de Riemann e vemos as implicações destas. Tomemos as definições abaixo as quais precisamos determinar que são respectivamente

$$R_{\nu\alpha\mu\beta} = \frac{1}{2} (h_{\nu\beta,\alpha\mu} + h_{\alpha\mu,\nu\beta} - h_{\nu\mu,\alpha\beta} - h_{\alpha\beta,\mu\nu}) \quad (2.13)$$

$$R_{\alpha\beta} = g^{\nu\mu} R_{\nu\alpha\mu\beta} \quad (2.14)$$

$$R = g^{\alpha\beta} g^{\nu\mu} R_{\nu\alpha\mu\beta} \quad (2.15)$$

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R \quad (2.16)$$

Com isso temos o Tensor de Ricci

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (g^{\nu\mu} h_{\nu\beta,\alpha\mu} + g^{\nu\mu} h_{\alpha\mu,\nu\beta} - g^{\nu\mu} h_{\nu\mu,\alpha\beta} - g^{\nu\mu} h_{\alpha\beta,\mu\nu}) \quad (2.17)$$

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (h_{\nu\beta,\alpha}{}^{,\nu} + h_{\alpha\mu,\beta}{}^{,\mu} - h_{,\alpha\beta} - h_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu}) \quad (2.18)$$

Fazendo uso de (2.18) e da relação dada em (2.15) obtemos o escalar de Ricci

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} (g^{\alpha\beta} h_{\nu\beta,\alpha}{}^{,\nu} + g^{\alpha\beta} h_{\alpha\mu,\beta}{}^{,\mu} - g^{\alpha\beta} h_{,\alpha\beta} - g^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu}) \\ &= \frac{1}{2} (h_{\nu\beta}{}^{,\nu\beta} + h_{\alpha\mu}{}^{,\alpha\mu} - h_{,\alpha}{}^{,\alpha} - h_{,\mu}{}^{,\mu}) \\ &= (h_{\nu\beta}{}^{,\nu\beta} - h_{,\mu}{}^{,\mu}) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Agora podemos escrever o Tensor de Einstein dado em (2.16) como

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (h_{\nu\beta,\alpha}{}^{,\nu} + h_{\alpha\mu,\beta}{}^{,\mu} - h_{,\alpha\beta} - h_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu}) - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (h_{\nu\beta}{}^{,\nu\beta} - h_{,\mu}{}^{,\mu}) \quad (2.20)$$

Se substituirmos as definições (2.11) e (2.12) nesta última equação obteremos a Equação de Einstein da seguinte forma

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(\bar{h}_{\nu\beta,\alpha}{}^{,\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\nu\beta} \bar{h}_{,\alpha}{}^{,\nu} + \bar{h}_{\alpha\mu,\beta}{}^{,\mu} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\mu} \bar{h}_{,\beta}{}^{,\mu} + \bar{h}_{,\alpha\beta} - \bar{h}_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \bar{h}_{,\mu}{}^{,\mu} \right. \\ &\quad \left. - \eta_{\alpha\beta} \bar{h}_{,\nu\mu}{}^{,\nu\mu} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \eta_{\nu\mu} \bar{h}{}^{,\nu\mu} - \eta_{\alpha\beta} \bar{h}_{,\mu}{}^{,\mu} \right) \\ &= -\frac{1}{2} (\bar{h}_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu} + \eta_{\alpha\beta} \bar{h}_{,\nu\mu}{}^{,\nu\mu} - \bar{h}_{\alpha\mu,\beta}{}^{,\mu} - \bar{h}_{\beta\mu,\alpha}{}^{,\mu}). \end{aligned} \quad (2.21)$$

A pergunta que caberia aqui seria, de que forma podemos simplificar a última equação de modo que tomemos uma escolha inteligente de coordenadas que torne fazer a solução de um problema ainda mais fácil, por isso, descobriremos que uma escolha inteligente de gauge/calibre possa nos fazer encontrar soluções mais simples na teoria da relatividade geral?

A condição do Gauge de Lorentz que tomaremos é

$$\bar{h}_{,\nu}{}^{,\mu\nu} = 0. \quad (2.22)$$

Tais escolhas de condição de Gauge já é bem comum na teoria eletromagnética. É sempre possível tomarmos um Gauge para satisfazer a Eq. (2.22). Assim, nós nos referimos a ele como uma condição de gauge e, especificamente, como a condição de calibre Lorentz. Se tivermos uma quantidade $h_{\mu\nu}$ que seja satisfeita na condição acima, dizemos que estamos trabalhando no Gauge de Lorentz. Sempre podemos encontrar uma transformação de Gauge de modo que converta para uma nova solução $h_{\alpha\beta}$ que satisfaça a condição de calibre de Lorentz.

Assim, podemos reescrever a equação de Einstein com a condição de gauge em que acabamos de definir logo acima como

$$G_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\bar{h}_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu} = -\frac{1}{2}\square\bar{h}_{\alpha\beta} \quad (2.23)$$

assim, as Equações de Einstein de campo fraco são

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta} \Rightarrow -\frac{1}{2}\square\bar{h}_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta} \quad (2.24)$$

$$\square\bar{h}_{\alpha\beta} = -16\pi T_{\alpha\beta} \quad (2.25)$$

onde

$$\square f = f_{,\mu}{}^{,\mu} = \eta^{\mu\nu} f_{\mu\nu} = \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) f \quad (2.26)$$

é chamado também de operador D'Alembertiano ou de operador de onda.

Essas equações são especialmente interessantes porque elas não só são lineares na perturbação de traço-reverso, as componentes das equações de perturbação de traço-reverso são completamente desacoplados da Equação de Einstein de campo-fraco, uma vantagem tremenda para encontrar soluções. Estas são chamados de equações de campo da "teoria linearizada", uma vez que resultam de manter termos linear em $h_{\alpha\beta}$. Estas equações será o nosso ponto de partida para o estudo de ondas gravitacionais. [6, 10, 11, 12]

Capítulo 3

Radiação Gravitacional de Compactas Binárias

Uma vez que temos desenvolvido uma ferramenta matemática poderosa, podemos então aplica-las em alguns problemas físicos a fim de compreendermos mais profundamente o quão esta é interessante do ponto de vista relativístico e também do ponto de vista de facilidade matemática. Nesta seção aplicaremos o formalismo desenvolvido previamente em alguns problemas, principalmente no que se refere a astrofísica real, pois primeiramente trataremos de um sistema binário movendo-se em numa trajetória Newtoniana. Neste contexto verificaremos como a reação-de-volta de ondas gravitacionais afetam o movimento da fonte, e como consequência deste, induz à coalescência de um sistema binário, neste contexto o sistema binário em questão tanto pode ser duplas estrelas de neutrons ou buracos negros, e finalmente veremos de que forma estas afetam as ondas gravitacionais.

Uma vez que estamos tratando problemas gravitacionais, como por exemplo, o movimento de um planeta em torno do sol na aproximação de orbitas circulares, usualmente tomamos a posição do sol como um ponto fixo, na qual este nos serve de origem do referencial empregado na descrição do movimento. Em verdade, se tomamos um sistema isolado de partículas, ou seja, um sistema no qual a atuam apenas forças internas, como as gravitacionais, é o centro de massa do sistema que obedece a lei de inércia, com isso ou o centro de massa do sistema permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme, podendo sem nenhuma complicação ser tratado como origem de um referencial inercial. Uma vez que cerca de 99,9% da massa total do sistema solar se concentra no sol, implica que o centro de massa é muito proximo do mesmo, assim o erro de aproximação é muito pequeno. Para uma estrela

dupla, porém, em que as massas das duas componentes do par podem ser da mesma ordem, uma aproximação deste tipo é inviável. Vejamos pois como tratar sem essa aproximação o problema de duas corpos: a interação gravitacional entre duas partículas de massas quaisquer m_1 e m_2 .

Se tomamos um novo referencial com origem em O' exatamente sobre o ponto de centro de massa - referencial do CM, os vetores de posição \mathbf{r}'_1 e \mathbf{r}'_2 das partículas relativos ao CM são dados por

$$\mathbf{r}'_1 = -\frac{m_2}{M}\mathbf{r} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}'_2 = \frac{m_1}{M}\mathbf{r} \quad (3.1)$$

onde a massa total do sistema é $M = m_1 + m_2$ e $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ é o vetor de posição de m_2 em relação a m_1 .

As equações que descrevem o movimento no referencial do centro de massa (CM) são dadas pela segunda lei de Newton aplicada em cada massa

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}'_1 = \mathbf{F}_{1(2)} \quad \text{e} \quad m_2\ddot{\mathbf{r}}'_2 = \mathbf{F}_{2(1)} \quad (3.2)$$

onde $\mathbf{F}_{2(1)} = -\mathbf{F}_{1(2)}$ que nada mais é do que a lei de força mais antiga conhecida, Lei de Newton da Gravitação Universal, que exprime as forças de interação gravitacional entre as partículas de massa m_1 e m_2 cujo deslocamento relativo entre as mesmas é \mathbf{r}_{12} .

Combinando as Eqs.(3.1) e (3.2), obtemos:

$$\mathbf{F} = \mu\ddot{\mathbf{r}} \quad (3.3)$$

onde $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{2(1)}$ depende somente de \mathbf{r} , e μ é a massa reduzida do sistema de dois corpos dada por

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (3.4)$$

com esta ultima equação, comumente reduz-se um problema de dois corpos interagindo gravitacionalmente a um problema de um só corpo, cuja validade vai alem do caso gravitacional, o que queremos dizer é, esta se aplica a qualquer força de interação central, uma vez que satisfaça as condições acima, como por exemplo, a relação $\mathbf{F}_{2(1)} = -\mathbf{F}_{1(2)}$ dependa apenas de $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. [13]

3.1 Inspiral de Compactas Binárias

Análogo as considerações precedentes tomemos pois um sistema composto de duas estrelas compactas, tais como estrelas de neutron ou buracos negros, em seguida os trataremos pontualmente, com suas respectivas massas m_1 e m_2 e suas posições dadas por \mathbf{r}_2 e \mathbf{r}_1 . No limite Newtoniano e no referencial do CM, a dinâmica do sistema se reduz ao problema de apenas um corpo com massa igual a massa reduzida como dado em (3.4), e a equação que descreve o movimento é dado $\ddot{\mathbf{r}} = -\left(\frac{Gm}{r^3}\right)\mathbf{r}$, onde a massa total do sistema é dado por $m = m_1 + m_2$ e também as coordenadas relativas por $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

Tomemos pois o caso de órbitas circulares. Assim, a frequência orbital ω_s pode ser relacionada ao raio orbital R pelas relações a seguir

$$\frac{v^2}{R} = \frac{Gm}{R^2} \quad (3.5)$$

com $v = \omega_s R$ e

$$\omega_s^2 = \frac{Gm}{R^3} \quad (3.6)$$

Se temos que a amplitude das ondas gravitacionais em seus dois modos são dados pelas relações abaixo

$$h_+(t; \theta, \phi) = \frac{1}{r} \frac{4G\mu\omega_s^2 R^2}{c^4} \left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right) \cos(2\omega_s t_{ret} + 2\phi) \quad (3.7)$$

$$h_\times(t; \theta, \phi) = \frac{1}{r} \frac{4G\mu\omega_s^2 R^2}{c^4} \cos \theta \sin(2\omega_s t_{ret} + 2\phi) \quad (3.8)$$

Podemos usar a massa reduzida para o parâmetro

$$M_c = \mu^{\frac{3}{5}} m^{\frac{2}{5}} = \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right)^{\frac{3}{5}} (m_1 + m_2)^{\frac{2}{5}} = \frac{(m_1 m_2)^{\frac{3}{5}}}{(m_1 + m_2)^{\frac{1}{5}}}, \quad (3.9)$$

conhecido como massa *chirp*. Vamos agora reescrever as equações que correspondem as amplitudes das ondas gravitacionais em termos da massa *chirp* e também eliminarmos a dependência do raio orbital e da frequência orbital. Uma vez que isolamos o raio orbital em (3.6) temos

$$\omega_s^2 = \frac{Gm}{R^3} \quad \Rightarrow \quad R^2 = \frac{G^{\frac{2}{3}} m^{\frac{2}{3}}}{\omega_s^{\frac{4}{3}}} \quad (3.10)$$

e se substituirmos em (3.7) e (3.8) obteremos respectivamente os seguintes valores

$$h_+ = \frac{4}{r} \frac{G^{\frac{5}{3}} \omega_s^{\frac{2}{3}} M_c^{\frac{5}{3}}}{c^4} \left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right) \cos(2\omega_s t_{ret} + 2\phi) \quad (3.11)$$

e

$$h_\times = \frac{4}{r} \frac{G^{\frac{5}{3}} \omega_s^{\frac{2}{3}} M_c^{\frac{5}{3}}}{c^4} \cos \theta \sin(2\omega_s t_{ret} + 2\phi) \quad (3.12)$$

Para escrever as Eqs. (3.11) e (3.12) em termos da massa reduzida, e principalmente em termos de frequência e período da onda gravitacional e de sua respectiva fonte de ondas, vamos usar as relações

$$f_{gw} = \omega_{gw}/(2\pi) \quad e \quad \omega_{gw} = 2\omega_s. \quad (3.13)$$

Substituindo (3.13) nas Eqs. (3.11) e (3.12), obteremos as relações

$$h_+ = \frac{4}{r} \left(\frac{GM_c}{c^2} \right)^{\frac{5}{3}} \left(\frac{\pi f_{gw}}{c} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right) \cos(2\pi f_{gw} t_{ret} + 2\phi) \quad (3.14)$$

$$h_\times = \frac{4}{r} \left(\frac{GM_c}{c^2} \right)^{\frac{5}{3}} \left(\frac{\pi f_{gw}}{c} \right)^{\frac{2}{3}} \cos \theta \sin(2\pi f_{gw} t_{ret} + 2\phi) \quad (3.15)$$

Se estamos em baixa ordem de aproximação Newtoniana, as respectivas amplitudes h_+ e h_\times das ondas gravitacionais emitidas dependem apenas da combinação das massas m_1 e m_2 através do termo combinado M_c .

As amplitudes das ondas gravitacionais ficam melhor expressas se as re-escrevermos em termos de quantidade de raio com dimensão de comprimento, isso implica que, podemos fazer uso da definição do raio de Schwarzschild que pode ser associado a massa *chirp* como $R_c = 2GM_c/c^2$ Se usarmos também o comprimento reduzido da onda gravitacional dado pela relação $c = \omega_s, \bar{\lambda}$ podemos reescrever (3.14) e (3.15) como

$$h_+ = A \left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right) \cos(\omega_{gw} t_{ret} + 2\phi) \quad (3.16)$$

e

$$h_\times = A \cos \theta \sin(\omega_{gw} t_{ret} + 2\phi), \quad (3.17)$$

onde

$$A = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{R_c}{r} \right) \left(\frac{R_c}{\bar{\lambda}} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (3.18)$$

O que obtemos da equação de onda para o vácuo na Relatividade Geral é que as OG's são ondas transversais que se propagam perpendicularmente ao plano de deformação e apresentam dois estados de polarização chamados de h_+ e h_\times e que a radiação gravitacional é de natureza quadrupolar em sua menor ordem. Sendo que o desvio geodésico na direção transversa à direção de propagação da onda fornece um meio de estudar e caracterizar a polarização das ondas planas. Isto significa que uma onda gravitacional plana propagando-se

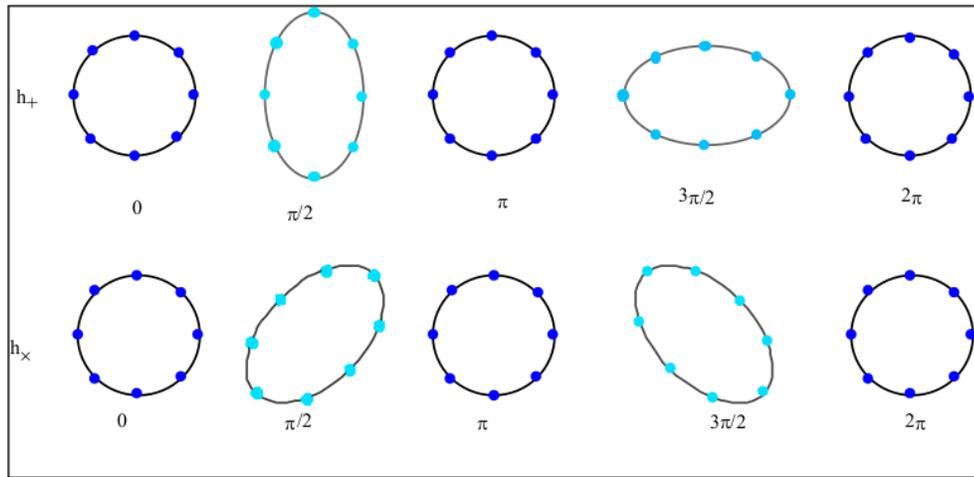


Figura 3.1: Distorção de um anel de partículas-teste durante um ciclo de uma onda gravitacional propagando-se na direção z . O efeito de ambas polarizações lineares é mostrado.

na direção do eixo z positivo, segundo a Relatividade Geral, produziria uma deformação em um conjunto de partículas teste dispostas no formato de uma circunferência ou anel no plano cartesiano xy , perpendicular à direção de propagação da onda, que poderia ser decomposta nas duas componentes h_+ e h_\times de polarização. A Fig. (3.1) mostra o efeito da interação de uma onda gravitacional com polarização linear (+) e (\times) com um anel formado de partículas teste, posicionado em um plano perpendicular à direção de propagação da onda.

Uma vez que temos uma onda plana propagando-se em $+z$, de acordo com a TRG a matriz que define o campo das OG's é transverso e sem traço como mostra a equação abaixo

$$h_{\mu\nu}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -h_{xx}^{TT} & h_{yx}^{TT} & 0 \\ 0 & h_{xy}^{TT} & h_{yy}^{TT} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Assim, levando em conta a transversalidade da onda e também o fato de que estas não possuem componentes temporais, tais como $(h_{0x}, h_{0y}, h_{00}, \dots)$ escolhe-se um calibre, ou gauge, como é comumente encontrado na literatura, na qual estas obrigatoriamente não possuem estas componentes, implicando que as únicas componentes não nulas do campo da onda sejam dadas em termos de h_{xx}^{TT} , $h_{xy}^{TT} = h_{yx}^{TT}$ e h_{yy}^{TT} . Por outro lado, a propriedade do traço nulo implica que $h_{xx}^{TT} = -h_{yy}^{TT}$, fazendo com que as OG's possuam apenas duas componentes independentes, como por exemplo, os dois estado de polarização que podem ser escritos como segue

$$h_+ = -h_{xx}^{TT} = h_{yy}^{TT} = k \{ A_+ e^{-[i\omega(t-z) + \phi_+]} \} \quad (3.20)$$

$$h_\times = h_{xy}^{TT} = h_{yx}^{TT} = k \{ A_\times e^{-[i\omega(t-z) + \phi_\times]} \} \quad (3.21)$$

onde, as quantidades denotadas por A_+ e A_\times são as amplitudes de seus respectivos modos e por sua vez, os termos dados por ϕ_+ e ϕ_\times são as respectivas diferenças de fase das ondas.

Uma análise breve das duas últimas equações mostra que, se tivermos $\phi_+ = \phi_\times$ teremos uma onda linearmente polarizada. Por outro lado, se tivermos $\phi_+ = \phi_\times + 90^\circ$ e com as magnitudes $A_+ = A_\times$ a onda será circularmente polarizada. Em outros casos a onda é elipticamente polarizada como mostra a figura abaixo ilustrada por linhas de campo induzidas pela OG's para as polarizações (+) e (\times).

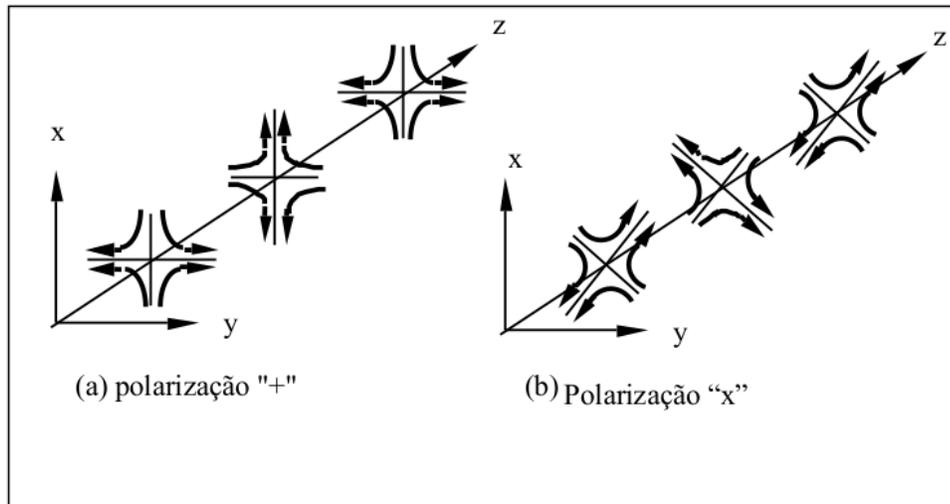


Figura 3.2: Linhas de campo de uma onda gravitacional. Em (a) a polarização "+"; em (b) polarização "x".

3.1.1 Potência Irrradiada

O tratamento para calcularmos a potencia irradiada neste contexto, é tomarmos as equações dadas em (3.16) e (3.17) e fazermos com o que o ângulo ϕ seja um quantidade fixa e com isso constante, e assim temos que, $\omega_s t_{ret} + \phi = \omega_s t + \alpha$, com $\alpha = \phi - \omega_s r/c$ sendo uma constante fixa. A implicação deste tratamento é podermos deslocar a origem dos tempos tal que $2\omega_s t + 2\alpha \rightarrow 2\omega_s t$ somado a um múltiplo inteiro de 2π , e finalmente podemos fazer as transformações das funções trigonométricas das equações citadas da forma, $\cos(2\omega_s t + 2\alpha) \rightarrow \cos(2\omega_s t)$ e $\sin(2\omega_s t + 2\alpha) \rightarrow \sin(2\omega_s t)$. Vejamos pois que esse tratamento nos permite reescrever as mesma equações citadas acima apenas como dependência direta do tempo que é

$$h_+ = \frac{1}{r} \frac{4G\mu\omega_s^2 R^2}{c^4} \left(\frac{1 + \cos^2 t}{2} \right) \cos(2\omega_s t) \quad (3.22)$$

e

$$h_\times = \frac{1}{r} \frac{4G\mu\omega_s^2 R^2}{c^4} \cos \sin(2\omega_s t) \quad (3.23)$$

Vejamos pois que, destes modos de polarização da onda, podemos determinar a potencia irradiada por aproximação de quadropolo dado em termos médios das derivadas temporais dos modos de polarização da onda somado como segue

$$\left(\frac{dP}{d\Omega} \right)_{quad} = \frac{r^2 c^3}{16\pi G} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle \quad (3.24)$$

e assim compreendemos que, uma vez que temos os modos de polarização da onda diferenciado em relação ao tempo e ainda tomados seus quadrados determinamos sua potência em aproximação de quadropolo. Finalmente podemos determinar o potencial irradiada por unidade de angulo sólido, levando em conta que $\langle \cos^2(2\omega t + 2\phi) \rangle = \frac{1}{2}$ é independente do valor ϕ do argumento da função, com isso a distribuição angular da potência irradiada, na qual é proporcional a $\langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle$ também é independente de ϕ . Com isso podemos fazer as devidas substituições dos modos de polarização na definição acima e obter

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{2}{\pi} \frac{c^5}{G} \left(\frac{GM_c \omega_{gw}}{2c^3} \right)^{\frac{10}{3}} g(\theta), \quad (3.25)$$

onde

$$g(\theta) = \left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right)^2 + \cos^2 \theta. \quad (3.26)$$

Fazendo a integração para determinarmos o potência irradiada por unidade de ângulo sólido, obtemos

$$P = \frac{2}{\pi} \frac{c^5}{G} \left(\frac{GM_c \omega_{gw}}{2c^3} \right)^{\frac{10}{3}} \int \frac{d\Omega}{4\pi} g(\theta) \quad (3.27)$$

e assim, se fizermos a integral separadamente levando em conta que o valor do angulo sólido é dlogo, obtemos que a integral na Eq. (3.27) contribui com um fator multiplicativo de 4/5, com isso quando voltamos a expressão original fazendo das identidades de massa reduzida, por fim, obtemos que a potência total irradiada é

$$P = \frac{32}{5} \frac{c^5}{G} \left(\frac{GM_c \omega_{gw}}{2c^3} \right)^{\frac{10}{3}}. \quad (3.28)$$

3.2 Cálculo da Amplitude Reduzida

Vamos assumir que o movimento da fonte de ondas gravitacionais está fixo numa órbita kepleriana. Sabemos que a emissão dessas ondas implica em um custo de energia. Como sabemos a fonte da energia irradiada é dada pela energia mecânica orbital, onde a energia cinética é dada pela velocidade orbital. Como $v^2 = Gm_2/R$, então

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \frac{Gm_1 m_2}{R}. \quad (3.29)$$

Visto que a energia orbital é a soma da energia cinética mais a energia potencial da órbita e $E_{\text{pot}} = -Gm_1 m_2/R$, podemos escrever

$$E_{\text{orbital}} = -\frac{1}{2} \frac{Gm_1 m_2}{R}. \quad (3.30)$$

Desta última equação, vemos que o sinal negativo está indicando a perda de energia, porém, para compensar essa perda de energia para ondas gravitacionais, vemos que há uma relação entre o raio orbital(R) e a sua energia potencial, ou seja, a medida que (R) diminui maior é a perda de energia mecânica da órbita, ou seja, esta fica cada vez mais negativa.

Pensando ainda nas consequências de aumentar ou diminuir o raio orbital (R) e a frequência angular da fonte, vemos que, uma vez que a frequência angular(ω_s) da fonte aumenta a potência irradiada aumenta de acordo com (3.28). Quanto maior for P maior será (ω_s). Vemos com essas considerações que, R deve ser cada vez menor quanto maior for a escala em que estivermos trabalhando, levando em conta a coalescência do sistema binário, ou seja,

levando em conta o quão unido é esse sistema binário. Nesses termos, se a escala for grande o suficiente de modo que tenhamos $\dot{\omega}_s \ll \omega_s^2$, tal condição nos leva a um regime de ‘Movimento Quase Circular’. Usando a Eq. (3.6) podemos escrever

$$\dot{R} = -\frac{2}{3} (R\omega_s) \frac{\dot{\omega}_s}{\omega_s^2}. \quad (3.31)$$

Portanto, se a condição $\dot{\omega}_s \ll \omega_s^2$ for satisfeita, o valor do $|\dot{R}|$ é tão pequeno quanto a velocidade tangencial dada pelo fator $\omega_s R$ e a aproximação de uma órbita circular com um raio de variação lenta é aplicável.

Se partirmos da energia mecânica dada pela relação (3.30), e se eliminarmos o fator R da expressão dado pela frequência orbital da fonte em (3.6) podemos escrever a energia mecânica em termos da frequência orbital da onda gravitacional por meio da identidade $\omega_{gw} = 2\omega_s$, e assim fazemos

$$E_{\text{orbit}} = - \left(\frac{G^2 M_c^5 \omega_{gw}^2}{32} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (3.32)$$

O que podemos verificar nesta última equação é que, se mantivermos a frequência orbital da onda gravitacional fixa ω_{gw} novamente verificamos que o nosso sistema depende apenas da massa reduzida como mostra acima.

Para verificarmos de que modo a energia mecânica está variando com o tempo, basta tomarmos a diferenciação da mesma. Temos então

$$\frac{dE_{\text{orbit}}}{dt} = \frac{2}{3} \frac{G^{\frac{2}{3}} M_c^{\frac{5}{3}} \dot{\omega}_{gw}}{2^{\frac{5}{3}} \omega_{gw}^{\frac{1}{3}}} \quad (3.33)$$

Levando em conta o fato de $P = -\frac{dE_{\text{orbit}}}{dt}$, onde o valor de P foi determinado em (3.28), podemos isolar $\dot{\omega}_{gw}$ e escrever

$$\dot{\omega}_{gw} = \frac{12}{5} 2^{\frac{1}{3}} \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{\frac{5}{3}} \omega_{gw}^{\frac{11}{3}} \quad (3.34)$$

e mais uma vez, se usarmos o fato que $\dot{\omega}_{gw} = 2\pi \dot{f}_{gw}$, podemos mais uma vez inverter os valores e determinarmos em função de \dot{f}_{gw} , e assim obtemos

$$\dot{f}_{gw} = \frac{96}{5} \pi^{\frac{8}{3}} \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{\frac{5}{3}} f_{gw}^{\frac{11}{3}}. \quad (3.35)$$

A seguir integramos (3.35) até o tempo de coalência t_{coal} . Se definirmos o tempo para coalescência como sendo $\tau = t_{coal} - t$, então temos como resultado a seguinte relação:

$$f_{gw}(\tau) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{5}{256} \frac{1}{\tau} \right)^{\frac{3}{8}} \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{-\frac{5}{8}}. \quad (3.36)$$

A divergência é cortada pelo fato de que, quando a sua separação torna-se menor do que a distância crítica, as duas estrelas fundem-se, que detalharemos a seguir, visto órbita circular estável interna $r_{isco} = \frac{6Gm}{c^2}$, onde se inserirmos valores numéricos na última equação, obtemos

$$f_{gw}(\tau) \simeq 134 \left(\frac{1.21M_\odot}{M_c} \right)^{\frac{5}{8}} \left(\frac{1s}{\tau} \right)^{\frac{3}{8}} \quad (3.37)$$

onde $1.21M_\odot$ é o valor referência de M_c , a massa *chirp* de um sistema de duas estrelas, cada uma com massa de $1.4M_\odot$.

Equivalentemente, se invertermos os valores para τ , podemos escrever

$$\tau \simeq 2.18s \left(\frac{1.21M_\odot}{M_c} \right)^{\frac{5}{3}} \left(\frac{100Hz}{f_{gw}} \right)^{\frac{8}{3}} \quad (3.38)$$

Vemos que quando $M_c = 1.21M_\odot$ numa frequência de $10Hz$ - frequência de baixa ordem acessível nos interferômetros - temos uma radiação emitida cerca de $\tau = 17min$ para a coalescência: em $100Hz$ temos a radiação dos últimos dois segundos, e em $1kHz$ temos a radiação de alguns poucos milionésimos de segundos. Da Eq. (3.6) encontramos que $f_{gw} = 1kHz$, a separação entre os dois corpos com massa $m_1 = m_2 = 1.4M_\odot$ é $R \simeq 33km$. Visto que o raio de uma estrela de neutron com $m = 1.4M_\odot$ esteja cerca de $10km$, as estrelas de neutrons e buracos negros tem aproximação do tipo-ponto num estágio que tornam-se imprecisas, porém ainda significativas. Uma quantidade para avaliar a sensibilidade de um detector para inspirais binárias é um número de ciclos que passam pelo detector de bandas com $f \in [f_{min}, f_{max}]$. Quando o período $T(t)$ da onda gravitacional é varrido pela função temporal, o número de ciclos no intervalo dt é dado por

$$dN_{cyc} = dt f_{gw}(t) \quad (3.39)$$

Após integrar obtemos

$$N_{cyc} = \int_{t_{min}}^{t_{max}} df_{gw} \frac{f_{gw}}{f_{gw}} \quad (3.40)$$

Para a inspiral binária expressamos \dot{f}_{gw} dado em (3.35) como uma função de f_{gw} . Se substituirmos (3.35) na Eq. (3.39), teremos

$$N_{cyc} \simeq 1.6 \times 10^4 \left(\frac{10Hz}{f_{min}} \right)^{\frac{5}{3}} \left(\frac{1.2M_{\odot}}{M_c} \right)^{\frac{5}{3}}, \quad (3.41)$$

onde substituímos os valores das constantes e aproximamos $f_{max}^{-\frac{5}{3}} - f_{min}^{-\frac{5}{3}} \simeq f_{min}^{-\frac{5}{3}}$. O resultado (3.41) significa que o interferômetro segue a evolução do sinal de milhares de ciclos, e a sensibilidade do interferômetro numa região de mHz pode seguir milhões de ciclos. Por essa razão, a estimativa precisa da forma da onda está além da aproximação Newtoniana usada neste contexto.

Uma vez que a frequência aumenta, o raio orbital diminui como vimos anteriormente. Combinando as Eqs. (3.6), (3.31) e (3.37), e usando a definição $\tau = t_{coal} - t$, temos a partir de

$$\frac{\dot{R}}{R} = -\frac{2\dot{\omega}_{gw}}{3\omega_{gw}}. \quad (3.42)$$

Se substituirmos a relação (3.34) nesta última teremos

$$\frac{\dot{R}}{R} = -\frac{1}{4\tau}. \quad (3.43)$$

Integrando a Eq. (3.43), obtemos:

$$R = R_0 \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^{\frac{1}{4}} = R_0 \left(\frac{t_{coal} - t}{t_{coal} - t_0} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (3.44)$$

onde o termo R_0 é o valor de R calculado no instante inicial t_0 . Desta última equação também vemos que a evolução de separação R_t entre esses dois corpos em baixa aproximação Newtoniana decresce numa fase suave, que implica numa aproximação de órbita quase-circular que não é válida.

Se tomarmos f_{gw} em (3.37) para calcularmos o valor de $\tau = \tau_0$ avaliado num instante inicial t_0 , encontramos a relação entre o raio inicial R_0 e o tempo de coalescência dado por τ_0 , então uma vez que partimos das identidades que relacionam a frequência orbital da onda gravitacional e sua respectiva frequência $\omega_{gw} = 2\pi g_{gw}$ e também do fato que frequência orbital da onda gravitacional é o dobro da frequência orbital da fonte ($\omega_{gw} = 2\omega_s$), podemos escrever

$$\tau_0 = \frac{5}{256} \frac{R_0^4 c^5}{\mu G^3 m^2}. \quad (3.45)$$

Colocando esta última equação em termos numéricos e fazendo $\tau = \tau_0$ e $R = R_0$, podemos expressar o raio inicial R_0 em termos da período orbital inicial $T_0 = 2\pi/\omega_s(\tau_0)$ através da relação (3.6). Encontramos

$$\tau_0 \simeq 9.829 \times 10^6 \text{yr} \left(\frac{T_0}{1 \text{ hr}} \right)^{8/3} \left(\frac{M_\odot}{m} \right)^{2/3} \left(\frac{M_\odot}{\mu} \right). \quad (3.46)$$

Portanto, sob as nossas suposições de órbitas circulares e massas da ordem de M_\odot , apenas binárias tem formação no período orbital inicial a menos que cerca de um dia tenha coalescido por emissão de ondas gravitacionais.

Até este momento estudamos a maneira de como as GW são relacionadas no tempo em um sistema binário. Agora vamos investigar como a forma das ondas gravitacionais evolue no tempo. Considere uma partícula que se movem numa órbita quase-circular em um plano (x, y) de raio $R = R(t)$ e velocidade angular $\omega_s = \omega_s(t)$ tem coordenadas cartesianas dadas por

$$x(t) = R(t) \cos\left(\frac{\Phi(t)}{2}\right) \quad (3.47)$$

e

$$y(t) = R(t) \sin\left(\frac{\Phi(t)}{2}\right) \quad (3.48)$$

Levando em conta que $\omega_s(t') = \omega_{gw}(t')/2$, podemos definir

$$\Phi(t) = 2 \int_{t_0}^t dt' \omega_s(t') = \int_{t_0}^t \omega_{gw}(t') dt'. \quad (3.49)$$

Quando determinamos a produção de ondas gravitacionais com a aproximação de quadrupolo, no cálculo da segunda ordem de diferenciação temporal do momento de quadrupolo existem três diferenças quando comparado aos casos de ω_s e R constantes que são: (i) o argumento das funções trigonométricas, $\omega_{gw}t$ devem ser trocados por $\Phi(t)$. (ii) Nos fatores na frente das funções trigonométricas, ω_{gw} deve ser trocado por $\omega_{gw}(t)$ e por fim, (iii) devemos incluir o cálculo da contribuição vindo de $\omega_{gw}(t)$ e $R(t)$.

No entanto, como vimos acima a velocidade radial \dot{R} é dispensável desde $\dot{\omega}_s \ll \omega_s^2$. Usando a Eq. (3.34) sob as condições de que $\dot{\omega}_s \ll \omega_s^2$ traduz que $\frac{GM_c \omega_2}{c^3} \ll 0.5$. Já em termos de $f_{gw} = \frac{\omega_{gw}}{2\pi}$, significa que \dot{R} é dispensável desde que $f_{gw} \ll 13\text{kHz}(1.2M_\odot/M_c)$. Veremos a seguir que, a transição ocorre mais cedo, enquanto assumimos que estamos numa

fase inspiral onde podemos simplesmente desprezar o termo proporcional a \dot{R} . Com isso as mudanças ficam

$$2\pi f_{gw}(t_{ret}) + 2\Phi = \Phi(t_{ret}) \quad \text{e} \quad f_{gw} = f_{gw}(t_{ret}) \quad (3.50)$$

e assim ficamos com as amplitudes abaixo

$$h_+(t) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/3} \left(\frac{\pi f_{gw}(t_{ret})}{c} \right)^{2/3} \left(\frac{1 + \cos^2 t}{2} \right) \cos[\Phi(t_{ret})] \quad (3.51)$$

e

$$h_\times(t) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/3} \left(\frac{\pi f_{gw}(t_{ret})}{c} \right)^{2/3} \cos t \sin[\Phi(t_{ret})] \quad (3.52)$$

se usarmos (3.36), com $f_{gw} = \omega_{gw}/2\pi$, podemos fazer em (3.34) com $d\tau = -dt$ a seguinte relação

$$\omega_{gw} = 2 \left(\frac{5}{256} \frac{1}{\tau} \right)^{3/8} \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{-5/8} \quad (3.53)$$

uma vez substituído em (3.49) temos

$$\Phi(\tau) = -2 \left(\frac{5GM_c}{c^3} \right)^{-5/8} \tau^{5/8} + \Phi_0 \quad (3.54)$$

onde, $\Phi_0 = \Phi(\tau = 0)$ é uma integração constante, igual ao valor de Φ na coalescência. Assim a amplitude das ondas gravitacionais podem ser expressas diretamente em termos do tempo para coalescência τ medida por um observador

$$h_+(t) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/4} \left(\frac{5}{c\tau} \right)^{1/4} \left(\frac{1 + \cos^2 t}{2} \right) \cos[\Phi(\tau)] \quad (3.55)$$

$$h_\times(t) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/4} \left(\frac{5}{c\tau} \right)^{1/4} \cos t \sin[\Phi(\tau)] \quad (3.56)$$

onde $\tau = t_{coal} - t$, e τ é o tempo do observador - ao invés do tempo retardado -, e t_{coal} é o valor de t quando a coalescência ocorre.

Veremos em detalhes nas seções seguintes, para comparar a forma da onda teórica com a sensibilidade experimental necessário ter em mão como ferramenta matemática a transformada de Fourier da amplitude das ondas gravitacionais. Para determinarmos a transformada de Fourier do sinal reduzido não é completamente direto, uma vez que $h_{+,\times}(t)$ são definidos apenas no intervalo de $-\infty < t < t_{coal}$ e determinamos essa transformada explicitamente em um problema específico no qual faremos uso logo a seguir.

Espectro de energia no regime inspiral

Inicialmente vamos calcular a transformada de Fourier das amplitudes dadas pelas Eqs. (3.55) e (3.56). A transformada de Fourier de uma função $f = f(t)$ é:

$$g(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha t} dt', \quad (3.57)$$

na qual o Kernel é dado por:

$$k = k(\alpha - t). \quad (3.58)$$

Podemos escrever a Eq. (3.55) na forma

$$h_+(t) = \frac{1}{r} \left(\frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/4} \left(\frac{5}{c(t_c - t_{ret})} \right)^{1/4} \left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right) \cos \Phi(t_{ret}), \quad (3.59)$$

onde $\tau = t_c - t_{ret}$. Se fizermos

$$A(t_{ret}) = \frac{1}{r} \left(\frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/4} \left(\frac{5}{c(t_c - t_{ret})} \right)^{1/4} \frac{1 + \cos^2 \theta}{2}, \quad (3.60)$$

então podemos reescrever

$$h_+(t) = A(t_{ret}) \cos \Phi(t_{ret}). \quad (3.61)$$

Assim, a transformada de Fourier da Eq. (3.61)

$$\tilde{h}_+(f) = \int A(t_{ret}) \cos \Phi(t_{ret}) e^{i2\pi f t} dt \quad (3.62)$$

Uma vez que $\omega = 2\pi f$, então $t_{ret} = t - \frac{r}{c} \rightarrow t'_{ret} + \frac{r}{c}$. Fazemos uso também de cosseno em função de exponenciais $\cos(\Phi(t_{ret})) = e^{i\Phi} - e^{-i\Phi}/2$, podemos escrever a Eq. (3.62) como

$$\tilde{h}_+(f) \cong \frac{1}{2} e^{i2\pi r/cf} \int A(t') e^{i(2\pi f t' - \Phi)} dt' \quad (3.63)$$

Mas a expansão no termo exponencial da integral para $t' = t_x$, dado como ponto estacionário é

$$f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (x - x_0)^2 + \dots \quad (3.64)$$

Assim obtemos

$$e^{-i\Phi + i2\pi f t'} = e^{-i(2\pi f t_x - \Phi(t_x))} \left[1 - \frac{1}{2} i \ddot{\Phi} (t - t_x)^2 \right] \quad (3.65)$$

Voltando para a integral (3.63) temos

$$\tilde{h}_+(f) = \frac{1}{2} e^{i2\pi r/cf} A(t') \int e^{i(2\pi f t_x - \Phi(t_x))} e^{-ix^2} \left(\frac{2}{\ddot{\Phi}(t_x)} \right)^{1/2} dx \quad (3.66)$$

Calculando a integral (3.66), temos

$$\tilde{h}_+(f) = \frac{1}{2} e^{i2\pi r/cf} A_{(t_x)} \left(\frac{2}{\ddot{\Phi}} \right)^{1/2} e^{-i\pi/4} \sqrt{\pi} \quad (3.67)$$

Podemos calcular $\ddot{\Phi}$ usando a Eq. (3.54). Temos que

$$\left(\frac{2}{\ddot{\Phi}} \right)^{1/2} = \frac{8}{15^{1/2}} \cdot 5^{5/16} \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/16} \tau^{11/16}. \quad (3.68)$$

Usando a Eq. (3.36), temos também que

$$\tau^{11/16} = 5^{11/16} (8\pi f)^{-11/6} \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{-55/48} \quad (3.69)$$

Combinando as Eqs. (3.68) e (3.69), temos:

$$\left(\frac{2}{\ddot{\Phi}} \right)^{1/2} = 2^3 \cdot 3^{-1/2} \cdot 5^{1/2} (8\pi f)^{-11/16} \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{-5/6} \quad (3.70)$$

Substituindo a Eq. (3.70) na Eq. (3.67), obtemos:

$$\tilde{h}_+(f) = A e^{i\psi_+(f)} \frac{c}{r} \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/6} \frac{1}{f^{7/6}} \left(\frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right), \quad (3.71)$$

onde

$$A \equiv \frac{1}{\pi^{43}} \left(\frac{5}{24} \right)^{1/2} \quad (3.72)$$

e

$$\psi_+(f) = 2\pi f \left(t_c + \frac{r}{c} \right) - \Phi_0 - \frac{\pi}{4} + 2 \left(\frac{GM_c}{c^3} 8\pi f \right)^{-5/3}. \quad (3.73)$$

Aqui Φ_0 é o valor da fase Φ na coalescência

Pelo processo análogo, temos

$$\tilde{h}_\times(f) = A e^{i\psi_\times(f)} \frac{c}{r} \left(\frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/6} \frac{1}{f^{7/6}} \cos \theta, \quad (3.74)$$

onde

$$\psi_\times(f) = \psi_+(t) + \frac{\pi}{2} \quad (3.75)$$

Onde ϕ_0 é o valor da fase ϕ na coalescência. Veremos posteriormente que o cálculo de $\psi_{+, \times}(t)$ está além da aproximação Newtoniana, é crucial discriminar o sinal de um binário coalescente do detector de ruído e teremos que a correção pós-newtoniana para a equação

$$\psi_+(f) = 2\pi f \left(t_c - \frac{r}{c} \right) - \phi_0 - \frac{\pi}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{GM_c}{c^3} 8\pi f \right)^{-5/3} \quad (3.76)$$

Este cálculo foi realizado num background para um sistema binário feito de buracos negros ou estrela de nêutrons. No entanto, o campo gravitacional fechado na estrela é forte, isso tem consequências importantes na dinâmica do sistema binário quando dois objetos se aproximam. Uma importante modificação quantitativa para dinâmica vem do fato de que na geometria de Schwarzschild, existe um *Innermost Stable Circular Orbit* (ISCO) (Órbitas Circulares Estáveis Internas). Em coordenadas Schwarzschild isso é localizado com $r = r_{\text{isco}}$. Com

$$r_{\text{isco}} = \frac{6Gm}{c^2} \quad (3.77)$$

onde $m = m_1 + m_2$ é a massa total do binário. No entanto, para binários feitos por buracos negros (BH) ou estrelas de nêutrons (NS), a fase inspiral adiabática lenta, vai através de uma sucessão de órbitas quase circular e dirige-se para emissão da radiação gravitacional, só pode ocorrer a uma distância $r \simeq r_{\text{isco}}$. Quando o ISCO é aproximado, a dinâmica é dominada pelos efeitos de campo-forte, e pelo fato das duas estrelas estarem mergulhadas na direção uma da outra. Assim, a forma da onda calculada acima é apenas válida para máximo de frequência $f_{\text{máx}}$, além do fim da fase inspiral e das duas estrelas mergulhadas uma na outra e coalescentes. A relação $w_0^2 = \frac{Gm}{R^3}$ indica que a fase inspiral acaba levando a fonte de frequência f_s aproxima-se do valor $(f_s)_{\text{ISCO}} = c^3/6Gm\sqrt{6} \simeq 2.2\text{kHz} (M_\odot/m)$ Por exemplo, para um sistema NS-NS com massas $m_1 = m_2 \simeq 1.4M_\odot$, temos $m = m_1 + m_2$, assim $m \simeq 2.8M_\odot$, temos também que $(f_s)_{\text{ISCO}} \simeq 800\text{Hz}$, enquanto que para um sistema BH-BH binário a massa total $m = 10M_\odot$ temos que $(f_s)_{\text{ISCO}} \simeq 200\text{Hz}$ a coalescência de dois BHs supermassivo com $m \simeq 10^6 M_\odot$ ocorre quando f_s está na região de mHz. Por outro lado, o espectro de energia é dado por [Ver Apêndice (A)]

$$\frac{dE}{df} = \frac{\pi c^3}{2G} f^2 r^2 \int d\Omega \left(|\tilde{h}_+|^2 + |\tilde{h}_\times|^2 \right). \quad (3.78)$$

Substituindo as Eqs. (3.71) e (3.74) na Eq. (3.78) e integrando obtemos

$$\frac{dE}{df} = \frac{\pi^{2/3}}{3G} (GM_c)^{5/3} f^{-1/3}. \quad (3.79)$$

Resolvendo a Eq. (3.79) para obtermos a f_{max} da onda gravitacional podemos estimar a energia total irradiada durante a fase inspiral

$$\Delta E_{rad} \simeq \frac{\pi^{2/3}}{2G} (GM_c)^{5/3} f_{max}^{2/3} \quad (3.80)$$

Se substituirmos os valores numéricos temos

$$\Delta E_{rad} \simeq 4.2 \times 10^{-2} M_\odot c^2 \left(\frac{M_c}{1.21 M_\odot} \right)^{5/3} \left(\frac{f_{max}}{1 \text{kHz}} \right)^{2/3} \quad (3.81)$$

Mas $f_{max} = 2(f_s)_{\text{ISCO}}$ para radiação de quadrupolo. Se $(f_s)_{\text{ISCO}} = 2.2 \text{kHz} (M_\odot/m)$ Temos que a energia total irradiada durante a fase inspiral depende apenas da massa reduzida μ do sistema $\Delta E_{rad} \sim 8 \times 10^{-2} \mu c^2$.

Para objetos estelares com muita massa esta é uma enorme quantidade de energia, e isso faz da coalescência binária uma das mais interessantes fontes de ondas gravitacionais.

3.3 Órbitas Elípticas e Energia Total e Espectro de Frequência da Radiação Emitida

Vamos considerar a radiação emitida por massas em uma órbita elíptica Kepleriana. Denotaremos m_1 e m_2 , massas de duas estrelas, e $m = m_1 + m_2$ a massa total, e μ para a massa reduzida. Como de costume, o problema do CM reduz-se ao problema de um corpo por uma partícula de massa μ sujeito a uma aceleração $\ddot{r} = -\left(\frac{Gm}{r^2}\right) \hat{r}$. Primeiro lembraremos a mecânica elementar, a solução para equação do movimento em uma órbita elíptica e em seguida calculamos a energia total irradiada em GW e espectro de frequência.

3.4 Órbitas Elípticas Keplerianas

A solução geral da equação de movimento é obtida resolvendo duas integrais de movimento, para o momento angular L e a energia E . A conservação do momento angular L implica que a órbita pertence ao plano. Introduzimos coordenadas polares (r, Ψ) no plano da órbita com origem no centro de massa, usamos Ψ para denotar a posição angular na órbita desde que θ e Ψ descreve a distribuição angular da radiação emitida. Inicialmente consideremos a lei de gravitação newtoniana $\vec{F} = -Gm_1 m_2 \hat{r} / r^2 = m_1 \ddot{r}$.

Como \hat{r} é o vetor unitário que indica a direção, temos que $\ddot{\vec{r}} = \dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta}$ onde, $d\theta/dt = \dot{\theta}$ é a velocidade angular em relação a estrela. A quantidade $\hat{\theta}$ é o vetor unitario em relação a \hat{r} , de onde tiramos a relação $\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\hat{r}$. Assim, o vetor posição pode ser escrito $\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - \dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$ Assim, pela primeira lei de Newton temos que $\ddot{\vec{r}} = -Gm_2/r^2\hat{r}$. Assim, podemos escrever as equações de movimento do sistema como

$$\ddot{r} = -\frac{Gm_2}{r^2}\hat{r} \quad (3.82)$$

e

$$(\ddot{r} - \dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} = -\frac{Gm_2}{r^2}\hat{r} \quad (3.83)$$

Uma vez que fazemos $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$ temos a liberdade de fazer a seguinte relação $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$. Se multiplicarmos última equação pelo fator mr obtemos respectivamente a relação

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \quad (3.84)$$

o que nos leva a concluir que o fator entre parêntesis, o momento angular, é consevado.

Para um sistema binário o momento angular é $L = \mu r^2 \dot{\psi}$. Portanto

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{L}{\mu r^2} \quad (3.85)$$

onde o fator denotado por $\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt}$.

Por outro lado, a energia do sistema em que estamos trabalhando que é dada por

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{G\mu m}{r} \quad (3.86)$$

Queremos determinar é a solução da Eq. (3.86) em termos de \dot{r} e do momento angular L

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{G\mu m}{r} \right)} \quad (3.87)$$

Podemos eliminar a dependência temporal usando a Eq. (3.85). Temos

$$\frac{dr}{dt} \frac{\mu r^2}{L} = \frac{dr}{d\psi} \quad (3.88)$$

Substituindo a Eq. (3.88) na eq. (3.87) e fazendo $r = 1/u$, obtemos

$$\frac{d\psi}{du} = -\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2\mu}{L^2}E - u^2 + \frac{2G\mu^2 mu}{L^2}\right)}} \quad (3.89)$$

Integrando a Eq. (3.89), obtemos

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} (1 + e \cos(\psi)) , \quad (3.90)$$

onde

$$e^2 \equiv 1 + \frac{2EL^2}{G^2\mu^2m^3} \quad (3.91)$$

e

$$R \equiv \frac{L^2}{G\mu^2m} , \quad (3.92)$$

onde R é o raio e e é a excentricidade da órbita. Temos pois que, os semi-eixos da elipse são dados

$$a = \frac{R}{1 - e^2} \quad (3.93)$$

e

$$b = \frac{R}{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.94)$$

Podemos re-escrever a equação da órbita (3.90) em termos da excentricidade e e de a como segue

$$r = \frac{R}{1 - e \cos(\psi)} = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos(\psi)} \quad (3.95)$$

Combinando as Eqs. (3.85) e (3.92), obtemos

$$\dot{\psi} = \frac{(RGm)^{\frac{1}{2}}}{r^2} \quad (3.96)$$

A dependência explícita de $r(t)$ e $\dot{\psi}(t)$ é obtida quando integramos as relações (3.86) o momento angular $L = \mu r^2 \dot{\psi}$ e é dada na forma paramétrica Obtemos

$$r = a [1 - e \cos(u)] , \quad (3.97)$$

com

$$\cos(\psi) = \frac{\cos(u) - e}{1 - e \cos(u)} , \quad (3.98)$$

onde o termo u é chamado de “anomalia excêntrica” na qual é relacionada a famosa equação de Kepler dada por $\beta \equiv u - e \sin(u) = \omega_0$ com $\omega_0 = Gm/a^3$.

3.5 Energia Irradiada

Calculamos a energia total irradiada pelas ondas gravitacionais, integramos em todas frequências num ângulo sólido. Escolhemos um quadro de referência que a órbita está num plano (x, y) . Nesse quadro o momento de massa é dado por uma matriz (2x2) como segue abaixo

$$M_{ab} = \begin{pmatrix} \cos^2\psi & \sin\psi \cos\psi \\ \sin\psi \cos\psi & \sin^2\psi \end{pmatrix}_{ab} \cdot \mu r^2, \quad (3.99)$$

onde $a, b = 1, 2$ são índices no plano (x, y) . Para calcularmos a energia irradiada total emitida numa aproximação de quadrupolo devemos calcular a terceira derivada de M_{ab} , e podemos usar fórmula do quadrupolo dado logo abaixo

$$P_{qua} = \frac{G}{5c^5} \left\langle \ddot{M}_{i,j} \ddot{M}_{i,j} - \frac{1}{3} (\ddot{M}_{kk})^2 \right\rangle. \quad (3.100)$$

Na Eq. (3.99) tanto r quanto ψ são funções que dependem diretamente do tempo. A maneira mais simples de calcular essas derivadas é escrevermos M_{ab} com dependência apenas de ψ , fazendo uso de resultados já determinados anteriormente (3.93), (3.95) e (3.96). Obtemos

$$M_{11} = \frac{\mu a^2 (1 - e^2)^2}{(1 + e \cos\psi)^2} \quad (3.101)$$

Podemos calcular $\dot{\psi}$ combinando as Eqs. (3.93), (3.95) e (3.96). Obtemos

$$\dot{\psi} = X_1 (1 + e \cos\psi)^2 \quad (3.102)$$

onde

$$X_1 = \left(\frac{Gm}{a^3} \right)^{1/2} (1 - e^2)^{-3/2} \quad (3.103)$$

Temos pois, como decorrente da matriz as relações

$$M_{12} = X_2 \frac{\sin\psi \cos\psi}{(1 + e \cos\psi)^2} \quad (3.104)$$

e

$$M_{22} = X_2 \frac{\sin\psi}{(1 - e^2 \cos\psi)^2}, \quad (3.105)$$

onde

$$X_2 = \mu a^2 (1 - e^2)^2. \quad (3.106)$$

Em seguida fazemos as derivadas M_{11} , Eq. (3.101). A primeira derivada \dot{M}_{11} , fica:

$$\begin{aligned}
\dot{M}_{11} &= X_2 \left[-2 \cos \psi \sin \psi (1 + e \cos \psi)^{-2} \dot{\psi} + 2 \cos^2 \psi \sin \psi (1 + e \cos \psi)^{-3} \dot{\psi} \right] \\
&= X_2 \left[\frac{e 2 \cos^2 \psi \sin \psi}{(1 + e \cos \psi)^3} \dot{\psi} - \frac{2 \cos \psi \sin \psi}{(1 + e \cos \psi)^2} \dot{\psi} \right] \\
&= X_2 X_1 (1 + e \cos \psi)^2 \left[\frac{2 \cos^2 \psi \sin \psi e}{(1 + e \cos \psi)^3} - \frac{2 \cos \psi \sin \psi}{(1 + e \cos \psi)^2} \right] \\
&= X_2 X_1 \left[\frac{2 \cos^2 \psi \sin \psi e}{(1 + e \cos \psi)} - 2 \cos \psi \sin \psi \right] \\
&= X_2 X_1 \left[\frac{2 \cos^2 \psi \sin \psi e - 2 \cos \psi \sin \psi - 2 \cos^2 \psi \sin \psi e}{(1 + e \cos \psi)} \right]. \tag{3.107}
\end{aligned}$$

O que nos dá

$$\dot{M}_{11} = -X_2 X_1 \frac{2 \cos \psi \sin \psi}{(1 + e \cos \psi)}. \tag{3.108}$$

A segunda derivada \ddot{M}_{11} , fica:

$$\begin{aligned}
\ddot{M}_{11} &= -2X_1 X_2 \dot{\psi} \frac{(e \cos^3 \psi + \cos(2\psi))}{(e \cos \psi + 1)^2} \\
&= -2X_1 X_2 X_1 (1 + e \cos \psi)^2 \frac{(e \cos^3 \psi + \cos(2\psi))}{(e \cos \psi + 1)^2} \\
&= -2X_1^2 X_2 (e \cos^3 \psi + \cos(2\psi)) \tag{3.109}
\end{aligned}$$

Calculando terceira derivada \dddot{M}_{11} , obtemos:

$$\begin{aligned}
\dddot{M}_{11} &= 2X_1^2 X_2 \dot{\psi} \sin \psi \cos \psi (3e \cos \psi + 4) \\
&= 2X_1^2 X_2 X_1 (1 + e \cos \psi)^2 \sin \psi \cos \psi (3e \cos \psi + 4) \\
&= 2X_1^3 X_2 (1 + e \cos \psi)^2 \sin \psi \cos \psi (3e \cos \psi + 4) \\
&= 2X_1^3 X_2 (1 + e \cos \psi)^2 (2 \cdot 2 \sin \psi \cos \psi + 3e \sin \psi \cos^2 \psi) \\
&= 2X_1^3 X_2 (1 + e \cos \psi)^2 (2 \sin 2\psi + 3e \sin \psi \cos^2 \psi) \tag{3.110}
\end{aligned}$$

onde

$$\beta \equiv 2X_1^3 X_2 = 2 \left(\frac{Gm}{a^3} \right)^{3/2} (1 - e^2)^{-9/2} \cdot (\mu a^2 (1 - e)^2) = \frac{4\mu}{a^5} \frac{(G^3 m^3)}{(1 - e^2)^5} \tag{3.111}$$

Agora fazemos as derivadas em M_{22} como segue

$$\begin{aligned}
\dot{M}_{22} &= 2X_2\dot{\psi} \frac{\sin \psi (\cos \psi + e)}{(e \cos \psi + 1)^3} \\
&= 2X_2X_1 (1 + e \cos \psi)^2 \frac{\sin \psi (\cos \psi + e)}{(1 + e \cos \psi)^3} \\
&= 2X_1X_2 \frac{\sin \psi (\cos \psi + e)}{(1 + e \cos \psi)}
\end{aligned} \tag{3.112}$$

A segunda derivada \dot{M}_{22} , fica:

$$\begin{aligned}
\ddot{M}_{22} &= \frac{2X_1X_2\dot{\psi} (7e \cos \psi + 4 \cos 2\psi + e \cos 3\psi + 4e^2)}{4 (e \cos \psi + 1)^2} \\
&= \frac{2X_1^2X_2}{4} \frac{(1 + e \cos \psi)^2}{(1 + e \cos \psi)^2} (7e \cos \psi + 4 \cos 2\psi + e \cos 3\psi + 4e^2) \\
&= \frac{2X_1^2X_2}{4} (7e \cos \psi + 4 \cos 2\psi + e \cos 3\psi + 4e^2)
\end{aligned} \tag{3.113}$$

Calculando terceira derivada \ddot{M}_{22} , obtemos:

$$\begin{aligned}
\ddot{M}_{22} &= \frac{2X_1^2X_2}{4} \dot{\psi} (-7e \sin \psi - 8 \sin 2\psi - 3e \sin 3\psi) \\
&= 2X_1^3X_2 (1 + e \cos \psi)^2 (-7e \sin \psi - 8 \sin 2\psi - 3e \sin 3\psi) \\
&= \frac{\bar{X}}{4} (1 + e \cos \psi)^2 (-7e \sin \psi - 8 \sin 2\psi - 3e \sin 3\psi) \\
&= \frac{\bar{X}}{4} (1 + e \cos \psi)^2 (-7e \sin \psi - 8 \sin 2\psi - 3e (4 \sin \psi \cos^2 \psi - \sin \psi)) \\
&= \frac{\bar{X}}{4} (1 + e \cos \psi)^2 (-7e \sin \psi - 8 \sin 2\psi - 3e \cdot 4 \sin \psi \cos^2 \psi + 3 \sin \psi) \\
&= \frac{\bar{X}}{4} (1 + e \cos \psi)^2 (-4e \sin \psi - 8 \sin 2\psi - 3e \cdot 4 \sin \psi \cos^2 \psi) \\
&= \bar{X} (1 + e \cos \psi)^2 (-2e \sin 2\psi - e \sin \psi - 3e \sin \psi \cos^2 \psi) \\
&= \bar{X} (1 + e \cos \psi)^2 (-2e \sin 2\psi - e \sin \psi (1 + 3 \cos^2 \psi)) ,
\end{aligned} \tag{3.114}$$

onde $\bar{X} \equiv 2X_1^3X_2$ e

$$\beta = \frac{4G^3\mu^2m^3}{a^5(1-e^2)^5}. \tag{3.115}$$

Aqui usamos a identidade trigonométrica $\sin 3x = 4 \sin x \cos^2 x - \sin x$. Por fim temos que a primeira derivada de (3.104) é

$$\dot{M}_{12} = X_1X_2 \frac{(e \cos \psi \cos 2\psi)}{(e \cos \psi + 1)}. \tag{3.116}$$

A segunda derivada de (3.104) é

$$\begin{aligned}
\ddot{M}_{12} &= -X_1 X_2 \dot{\psi} \frac{(e \sin \psi + 2 \sin 2\psi - e \sin \psi \cos \psi + 2e \sin 2\psi \cos \psi)}{(e \cos \psi + 1)^2} \\
&= -X_1^2 X_2 (1 + e \cos \psi)^2 \frac{(e \sin \psi + 2 \sin 2\psi - e \sin \psi \cos \psi + 2e \sin 2\psi \cos \psi)}{(e \cos \psi + 1)^2} \\
&= -X_1^2 X_2 (e \sin \psi + 2 \sin 2\psi - e \sin \psi \cos \psi + 2e \sin 2\psi \cos \psi) \\
&= -X_1^2 X_2 \dot{\psi} (3e \cos 2\psi \cos \psi + e \cos \psi + 4 \cos 2\psi) \\
&= -X_1^3 X_2 (1 + e \cos \psi)^2 (3e \cos 2\psi \cos \psi + e \cos \psi + 4 \cos 2\psi)
\end{aligned} \tag{3.117}$$

onde

$$\beta = \frac{4G^3 \mu^2 m^3}{a^5 (1 - e^2)^5} \tag{3.118}$$

A terceira derivada de (3.104) é

$$\ddot{\ddot{M}}_{12} = \beta (1 + e \cos \psi)^2 (4 \cos 2\psi + e \cos \psi (1 + 5 \cos^2 \psi)) \tag{3.119}$$

Da Eq. (3.100), temos que

$$\begin{aligned}
P(\psi) &= \frac{G}{5c^5} \left[\ddot{M}_{11}^2 + \ddot{M}_{22}^2 + 2\ddot{M}_{12}^2 - \frac{1}{3} (\ddot{M}_{11} + \ddot{M}_{22})^2 \right] \\
&= \frac{G}{5c^5} \left[\ddot{M}_{11}^2 + \ddot{M}_{22}^2 + 2\ddot{M}_{12}^2 - \frac{1}{3} (\ddot{M}_{11}^2 + \ddot{M}_{22}^2 + 2\ddot{M}_{11}\ddot{M}_{22}) \right] \\
&= \frac{G}{5c^5} \left[\frac{3\ddot{M}_{11}^2 + 3\ddot{M}_{22}^2 + 6\ddot{M}_{12}^2 - \ddot{M}_{11}^2 - \ddot{M}_{22}^2 - 2\ddot{M}_{11}\ddot{M}_{22}}{3} \right] \\
&= \frac{G}{5c^5} \left[\frac{2\ddot{M}_{11}^2 + 2\ddot{M}_{22}^2 + 6\ddot{M}_{12}^2 - 2\ddot{M}_{11}\ddot{M}_{22}}{3} \right] \\
&= \frac{2G}{15c^5} \left[\ddot{M}_{11}^2 + \ddot{M}_{22}^2 + 3\ddot{M}_{12}^2 - \ddot{M}_{11}\ddot{M}_{22} \right] \\
&= \frac{2G}{15c^5} \left[\ddot{M}_{11}^2 + \ddot{M}_{22}^2 + 3\ddot{M}_{12}^2 - \ddot{M}_{11}\ddot{M}_{22} \right]
\end{aligned} \tag{3.120}$$

Mas,

$$\ddot{\ddot{M}}_{11}^2 = \beta^2 (1 + e \cos \psi)^4 [2 \sin 2\psi + 3e \sin \psi \cos^2 \psi]^2 \tag{3.121}$$

$$\ddot{\ddot{M}}_{22}^2 = \beta^2 (1 + e \cos \psi)^4 [-2 \sin 2\psi - e \sin \psi (1 + 3 \cos^2 \psi)]^2 \tag{3.122}$$

$$\ddot{\ddot{M}}_{12}^2 = \beta^2 (1 + e \cos \psi)^4 [-2 \cos 2\psi + e \cos \psi (1 - 3 \cos^2 \psi)]^2 \tag{3.123}$$

Substituindo as Eqs. (3.121), (3.122) e (3.123) na Eq. (3.120), obtemos:

$$P(\psi) = \frac{8G^4}{15c^5} \frac{\mu^2 m^3}{a^5 (1-e^2)^5} (1+e \cos \psi)^4 [12(1+e \cos \psi)^2 + e^2 \sin^2 \psi] \quad (3.124)$$

A energia das ondas gravitacionais é definida tomando a média temporal do período da onda. Como veremos a seguir, uma partícula em órbita elíptica Kepleriana emite ondas gravitacionais que são múltiplos inteiros na frequência ω_0 definido em $\omega_0^2 = \frac{Gm}{a^3}$ e no entanto, a onda gravitacional é uma fração do período orbital T dado em $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Então, definimos $P(\psi)$ como uma média de período T . Assim, escrevemos

$$P \equiv \frac{1}{T} \int_0^T dt P(\psi) = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^T d\psi \frac{P(\psi)}{\dot{\psi}} \quad , \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (3.125)$$

Usando a Eq. (3.102), temos

$$\frac{1}{\dot{\psi}} = \frac{a^{3/2} (1-e^2)^{3/2}}{G^{1/2} m^{1/2} (1+e \cos \psi)^2} \quad (3.126)$$

Combinado as Eqs. (3.124) e (3.126), obtemos: podemos então calcularmos combinando $\frac{1}{\dot{\psi}}$ e $P(\psi)$ como segue

$$\omega_0 \frac{P(\psi)}{\dot{\psi}} = \frac{8G^4 \mu^2 m^3}{15c^5 a^5} (1-e^2)^{-7/2} (1+e \cos \psi)^2 [12(1+e^2 \cos \psi)^2 + e^2 \sin^2 \psi] \quad (3.127)$$

Substituindo a Eq. (3.127) na Eq. (3.125), temos

$$P = \frac{8G^4 \mu^2 m^3}{15c^5 a^5} (1-e^2)^{-7/2} I \quad (3.128)$$

onde

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} (1+e \cos \psi)^2 [12(1+e^2 \cos \psi)^2 + e^2 \sin^2 \psi] d\psi \\ &= \frac{1}{4} (96 + 292e^2 + 37e^4) \pi \end{aligned} \quad (3.129)$$

Portanto

$$\begin{aligned} P &= \frac{32G^4 \mu^2 m^3}{5c^5 a^5 (1-e^2)^{7/2}} \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{11}{24} \cdot 96 \left(1 + \frac{292e^2}{96} + \frac{37e^4}{96} \right) \right] \\ &= \frac{32G^4 \mu^2 m^3}{5c^5 a^5} \frac{1}{(1-e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4 \right) \\ &= \frac{32G^4 \mu^2 m^3}{5c^5 a^5} f(e) \\ &= \frac{32}{5} \frac{G\mu^2}{c^5} a^4 \omega_0^6 f(e) \end{aligned} \quad (3.130)$$

com

$$f(e) = \frac{1}{(1-e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4 \right) \quad (3.131)$$

Quando $e = 0$, $f(e) = 1$. Enquanto a é o raio da órbita circular e ω_0 torna-se o mesmo ω_s , com isso temos o mesmo resultado dado abaixo

$$P_{quad} = \frac{32}{5} \frac{G\mu^2}{c^5} R^4 \omega_s^6 \quad ; \quad f(e) = 1 \quad (3.132)$$

Quando combinamos as relações $T = 2\pi/\omega_0$, $\omega_0^2 = Gm/a^3$ e $a = Gm\mu/2|E|$, temos

$$T = K (-E)^{-3/2} , \quad (3.133)$$

onde

$$K = \left[\frac{g^2 m^2 \pi^2 \mu^3}{2} \right]^{1/2} . \quad (3.134)$$

Se tomarmos a diferenciação encontraremos o resultado abaixo

$$\dot{T} = \frac{3}{2} K (-E)^{-5/2} \dot{E} . \quad (3.135)$$

Uma vez que dividimos toda a equação por T e substituímos (3.133), obteremos

$$\frac{\dot{T}}{T} = \frac{3}{2} K (-E)^{-5/2} \dot{E} \frac{1}{K} \cdot (-E)^{3/2} = -\frac{3}{2} \frac{\dot{E}}{E} . \quad (3.136)$$

Mas $\dot{E} = -P$, com P determinado em (3.130), então temos que

$$\dot{E} = -\frac{32G^4\mu^2m^3}{5c^5a^5} f(e) . \quad (3.137)$$

Se usarmos a relação $a = Gm\mu/2|E|$ para expressarmos a energia em termos de a , teremos

$$E = \frac{Gm\mu}{2a} . \quad (3.138)$$

Então podemos escrever

$$\frac{\dot{E}}{E} = -\frac{322G^3m^2\mu}{5a^4c^5} f(e) . \quad (3.139)$$

Substituindo a Eq. (3.139) na Eq. (3.135), obtemos

$$\frac{\dot{T}}{T} = -\frac{96}{5} \frac{G^3m^2\mu}{a^4c^5} f(e) \quad (3.140)$$

onde a média ao longo de um período orbital é entendida. Se expressarmos a em termos do período T usando a relação abaixo Combinando relações $T = 2\pi/\omega_0$ e $\omega_0^2 = Gm/a^3$, obtemos

$$a^4 = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{8/3} G^{4/3} m^{4/3} \quad (3.141)$$

Substituindo a Eq. (3.141) na eq. (3.140), obtemos

$$\frac{\dot{T}}{T} = -\frac{96}{5} \frac{G^{5/3} m^{2/3} \mu}{c^5} \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-8/3} f(e) \quad (3.142)$$

Esta equação é de grande importância, uma vez que esta é base da primeira evidência experimental da radiação gravitacional. Os dados do pulsar binário levam à previsão teórica $dT/dt = (2.40242 \pm 0.00002)1012s/s$, enquanto que o valor observado é $dT/dt = (2.4056 \pm 0.0051)1012s/s$ [14].

O limite de $e \rightarrow 1^-$ com R fixo corresponde ao movimento parabólico $R = r(1 + \cos \psi)$. Quando $\psi \rightarrow -\pi$ a partícula está em $r = -\pi$, se ψ aumentar o valor de r diminui para $r = R/2$ ($\psi = 0$). Neste limite, se eliminarmos a em favor de R usando $a = R/(1 - e^2)$ em $P(\psi)$ em (3.124) obtemos a energia irradiada ao longo de uma trajetória

$$\begin{aligned} P(\psi) &= \frac{8G^4 \mu^2 m^3}{15c^5 R^5} (1 + \cos \psi)^4 [12(1 + \cos \psi) + \sin^2 \psi] \\ &= \frac{16G^4 \mu^2 m^3}{15c^5} \frac{1}{r^5} \left(1 + \frac{11R}{2r}\right) \end{aligned} \quad (3.143)$$

O que podemos ver de (3.143) é que $P(\psi)$ vai mais rápido para zero uma vez que $r \rightarrow \infty$. Aqui, determinamos a energia total irradiada em ondas gravitacionais no infinito é

$$E_{rad} = \int_{-\infty}^{\infty} dt P(\psi(t)) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\psi}{\dot{\psi}} P(\psi) = \frac{85\pi}{48} \frac{G\mu^2}{R} \left(\frac{v_0}{c}\right)^5 \quad (3.144)$$

onde $v_0 = 2(Gm/R)^{1/2}$ é a velocidade em $\psi = 0$ onde esta por sua vez corresponde a $r = R/2$, assim segue que, é a velocidade máxima associada a trajetória. Desta forma, o resultado é similar ao que encontramos para uma fonte periódica. Uma vez que esta energia está sendo emitida no infinito em um tempo $T = \infty$, se tomarmos o valor médio da potência em um tempo T encontramos um resultado nulo, exatamente como checamos a pouco quando fizemos $(1/a^5)f(e) = (1/R^5)(1 - e^2)^5 f(e)$ e tomando o limite $e \rightarrow 1^-$ fixados em R . Claramente isso reflete o fato de que a radiação emitida de basicamente entre $-\pi/2 < \psi < \pi/2$; a radiação emitida quando $-\pi/2 < |\psi| < \pi$ ao inves de finito, e vai ao infinito quando temos $\psi = \pi$ ou vem de $\psi = -\pi$. [15]

Capítulo 4

Fontes e Detectores de Ondas Gravitacionais

Da mesma maneira que ao deixarmos cair em um lago uma pedra gera uma série de ondas com origem no ponto onde a superfície da água é inicialmente perturbada, o movimento de corpos massivos num campo gravitacional gera à sua volta pequenas perturbações no espaço-tempo. É a estas pequenas perturbações que damos o nome de ondas gravitacionais (OGs). Usando a mesma analogia é fácil perceber que as características das OGs dependem dos detalhes do processo que lhes deu origem: tal como uma pedra grande e pesada não gera exactamente o mesmo padrão à superfície do lago que um pequeno grão de areia, uma supernova ou uma colisão de dois buracos negros produzem OG com características diferentes. Em geral, quanto mais intenso é o processo maior é a amplitude das OGs produzidas. Numa situação ideal ao medirmos as características físicas de interesse, como por exemplo frequências e amplitudes, das OG que observamos em cada instante podemos determinar os fenômeno que lhes deram origem e assim aprender mais sobre o universo que nos rodeia.

As características das OG's, tais como, a energia, a forma e a polarização, apenas para citar poucos exemplos, podem nos fornecer um grande número de informações sobre os processos astrofísicos pelos quais estas ondas foram geradas. Observando o universo no espectro das OG's via *redshift* é possível obter informações importantes a respeito da existência de buracos negros; da distribuição de galáxias, distancia e posição; da distribuição de estrelas de nêutrons e buracos negros no Universo; do redshift no qual se iniciou a formação estelar; da razão de formação de estrelas em função do *redshift* ; e, dos mecanismos de explosão de supernovas, bem como suas massas e momentos angulares.

A Astrofísica nos fornece uma série de sistemas candidatos com frequências na faixa de $10^{-18} Hz$ até $10^{10} Hz$, que devem ser observáveis no espectro das ondas gravitacionais. Entre os candidatos, espera-se detectar radiação gravitacional da formação de buracos negros e estrelas de nêutron, da coalescência de sistemas binários de estrelas de nêutron e do colapso final destes binários na formação de buracos negros. Devemos esperar não apenas fontes discretas, mas também sinais de fundo contínuos, criados por um grande número de fontes discretas. Também podem ser possíveis de observar ondas gravitacionais da era inflacionária quando tínhamos altas densidades e temperatura, também conhecido como Big Bang.

As fontes astrofísicas e Cosmológicas de Ondas Gravitacionais são classificadas de acordo com o comportamento temporal da radiação.

- Fontes Periódicas: são aquelas que emitem sinal a uma frequência constante, ou aproximadamente constante. Exemplo de fonte periódica é uma estrela de nêutrons em rotação e que possua alguma assimetria em sua superfície.;
- Fontes “Chirps”: Um sinal “chirp” é produzido por sistemas binários em coalescência formados por estrelas de nêutrons(ENs) e buracos negros (BNs) que emitem radiação gravitacional, aumentando sua amplitude e frequência quanto mais se aproximam do colapso final do sistema . A taxa de ocorrência para tais eventos é muito baixa por ano em um raio de $200 Mpc$ para sistemas binários EN-EN e é incerta para o caso de sistemas binários BN-BN;
- Fontes impulsivas ou “bursts”: são aquelas que geram um pulso energético - e curto, cobrindo uma grande faixa de frequências. Algumas destas fontes são estrelas de nêutrons acretando matéria e sistemas binários em coalescência formados por estrelas compactas tais como buracos negros e/ou estrelas de nêutrons;
- Fontes Estocásticas: são caracterizadas por emissões aleatórias de ondas gravitacionais vindas de um grande número de fontes independentes e não correlacionadas que não são resolvidas individualmente. Um exemplo de fonte estocástica é a emissão de OG’s devido ao colapso para buracos negros, de estrelas pré-galácticas a diferentes “redshifts”.

Veremos na sequência um pouco mais sobre detectores de barras ressonantes e interferômetro e sobre os demais nas seções seguintes. Particularmente, serão descritos aqui alguns dos detectores, onde para alguns será feita uma breve discussão e outros serão citados apenas a critério de ilustração. Assim, o critério da exposição será posto por exemplo, se é terrestre e em funcionamento como é o caso de LIGO, GEO 600, VIRGO, TAMA, MiniGRAIL, Mario Schenberg (Graviton) e CLIO, se é terrestre porém ainda como proposta de lançamento num futuro não tão distante com é o caso de Advanced LIGO, AIGO, LCGT, Einstein Telescope, INDIGO, AGIS, Torsion-Bar Antenna e SFERA, terrestres e fora de serviço como é caso de NAUTILUS, EXPLORER, AURIGA, ALLEGRO, NIOBE, IGEC e AIGRC, espaciais planejados e propostos como é o caso de LISA, LISA Pathfinder, DECIGO e Big Bang Observer (BBO), os astronômicos European Pulsar Timing Array (EPTA), NANOGrav, PPTA e os que trabalham com análises de dados que é Einstein@Home.

Detectores de Barras Ressonantes

O trabalho pioneiro foi o detector de Barras Ressonantes de Joseph Weber, Fig. (4), construído na década de 1960. O detector era composto de um cilindro em liga de alumínio com uma massa de cerca de 1 tonelada no interior de uma câmara de vácuo, onde a finalidade era de isolar a barra de vibrações sísmicas-externas. Em 1969, Joseph Weber após grandes melhorias, já possuía uma sensibilidade de 10^{-16} . O sinal era dominado por ruídos dada a baixa intensidade das ondas gravitacionais a serem observadas. Hoje os detectores deste tipo passaram por grandes mudanças, como o desenvolvimento de suspensões melhores que diminuíram significativamente a transmissão das vibrações externas, as barras são mantidas a alguns kelvins de temperatura para diminuir o ruído térmico, e foi introduzido um transdutor ressonante que amplifica as vibrações do modo fundamental da barra. Essas mudanças serviram para diminuir o ruído e amplificar o sinal. Apesar de Weber não ter detectado uma onda gravitacional, sua tentativa foi extremamente importante para incentivar diversos pesquisadores do mundo todo a continuar incessantemente na busca por tais ondas.



Figura 4.1: Joseph Weber e seu detector de ondas gravitacionais(Fonte:<http://fizzible.com>)

O detector LIGO

O detector LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*) tem como finalidade observar ondas gravitacionais de origem cosmológica e astrofísicas em geral, tais como sistemas binários compactos, usualmente dados por duplas estrelas de neutrons ou duplos buracos negros e, o colapso de estrelas com formação de buracos-negros. Este detector interferômetro é composto por dois setores de observação operando em conjunto: um situado em Livingston, Louisiana e outro localizado na reserva de Handford, situada perto de Richland, Washington, a 3km de distância do primeiro observatório. A razão de se ter dois sistemas distantes operando em conjunto é que se pode determinar a localização da fonte de ondas no céu através de triangulação e medida do tempo de atraso entre as detecções realizadas pelos dois observatórios. Além disso, um par de detectores correlacionados apresenta maior confiabilidade, pelas mesmas razões postas por Webber, já que se pode comparar as observações de ambos e analisar as coincidências. Assim, mesmo que a amplitude do sinal detectado seja muito baixa e o ruído seja alto, através da análise das coincidências pode-se mais facilmente diferenciar um sinal proveniente de uma fonte real.

Cada observatório LIGO possui uma câmara de alto vácuo em forma de "L", medindo 4 km em cada braço. Dentro dessa câmara está instalado o interferômetro, semelhante ao de Michelson-Morley: há espelhos em cada extremidade da câmara, um feixe de laser com 10 Watts de potência viaja através de um colimador antes de passar por um espelho semi-refletor localizado no vértice da câmara. O feixe então se divide em dois, cada um viajando através de um braço do sistema. Cada braço contém cavidades do tipo Fabry-Perot que aprisionam os raios e aumentam sua distância percorrida. Os caminhos ópticos (distâncias entre os espelhos) dos dois braços são ajustados para que exista o cancelamento perfeito entre os dois feixes luminosos que percorreram cada um dos dois braços. A onda gravitacional, quando chega na direção e polarização adequadas, causa uma variação relativa entre esses caminhos ópticos, modificando a situação de interferência perfeita, permitindo que alguma luz chegue até o fotodetector, acusando, desta forma, a passagem da onda gravitacional.

O Advanced LIGO(aLIGO) que é uma colaboração que conta com dois interferômetros de 4km de comprimento. Os dois detectores foram colocados a uma grande distância, onde o tempo da viagem da luz entre eles é de $\simeq 10\text{ ms}$ para que os ruídos não estivessem correlacionados. O aLIGO é dez vezes mais sensível e cobre uma faixa de frequência muito mais ampla que sua versão inicial (LIGO). Pode, também, observar um volume do espaço mais de mil vezes maior.

A Fig. (1) mostra o esquema de um interferômetro utilizado pelo detector avançado LIGO. No quadro (a) são mostradas as posições e orientações dos dois observatórios LIGO e também é indicado o tempo que demora para a luz viajar entre eles. No quadro (b) se mostra como a amplitude de ruído do instrumento variou em função da frequência em cada detector em torno do tempo do evento. Quanto menor é o ruído do instrumento, mais sensível é o detector. Os picos altos indicam faixas pequenas de frequência onde o ruído do instrumento é particularmente grande.

Com este interferômetro foi possível detectar no dia 14 de Setembro de 2015, o sinal - evento - astrofísico batizado de GW150914, pelos observatórios LIGO em Hanford e Livingston. Pela primeira vez o sinal foi identificado pelo método chamado de "busca de baixa latência", projetada para analisar padrões de ondas gravitacionais sem sequer modelar os detalhes precisos do modelo de onda. Os dados de amplitude da onda gravitacional adquiridos

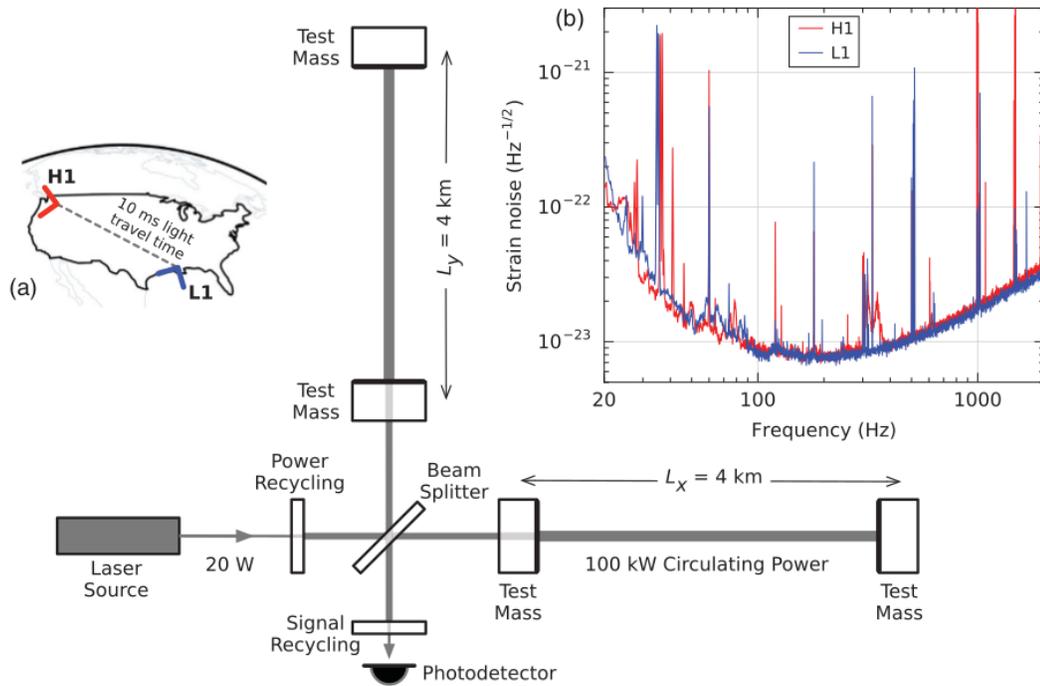


Figura 4.2: Diagrama simplificado do detector avançado LIGO)

pelos interferômetros LIGO foram comparados com um vasto banco de modelos de onda previstos de forma teórica - processo conhecido como filtragem por coincidência - com o objetivo de encontrar o modelo de onda mais semelhante aos dados observados.

Os resultados deste evento descrevem GW150914 como a fusão de um binário de dois buracos negros com massas de aproximadamente 36 vezes e 29 vezes a massa do Sol, respectivamente, e que por sua vez o buraco negro após esta fusão teria uma massa cerca de 62 vezes a do Sol. Ainda se conclui que o buraco negro resultante está girando como formulou teoricamente no ano de 1963 o matemático Roy Kerr. Os resultados indicam também que GW150914 ocorreu a uma distância de mais de um bilhão de anos luz. Desta forma, os detectores do LIGO observaram um evento certamente notável, que ocorreu há muito tempo atrás em uma galáxia muito distante.

A Fig. (3.5) acima nos dá os principais resultados detalhadamente no qual apontam para GW150914, como a coalescência de dois buracos negros. A parte do meio da figura mostra a reconstrução do padrão da amplitude da onda gravitacional vista pelo detector de Hanford. É particularmente clara a concordância entre a amplitude estimada (mostrada em cinzento)

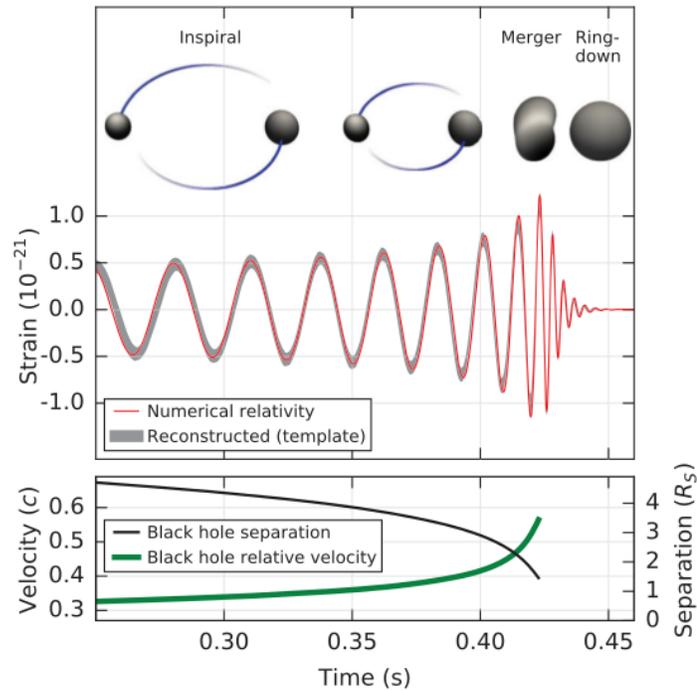


Figura 4.3: Resultados principais da análise de GW150914 [17]

e o modelo teórico da onda mais semelhante no caso de dois buracos negros coalescentes (mostrado em vermelho), tal como previsto pela relatividade geral. [17])

Imagens dos horizontes dos buracos negros em vários estágios do cálculo computacional são mostrados no topo da figura: a espiralação para dentro, durante a qual os buracos negros se aproximam, a fusão, durante a qual os dois buracos negros se unem, e a fase de estabilização, quando o buraco negro remanescente oscila brevemente antes de estabilizar-se.)

A comparação dos dados de amplitude com as previsões teóricas permite testar se a relatividade geral é realmente a teoria correta para descrever o evento. Esta resposta é surpreendente "sim": as observações sugerem que a relatividade geral passa no teste com louvor. Também podemos usar os dados para estimar características físicas específicas de GW150914: as massas dos dois buracos negros antes da fusão, a massa do buraco negro remanescente e a distância ao evento como discutido acima.)

A detecção e observação de ondas gravitacionais da fusão de buracos negros são conquistas significativas, mas representam apenas o capítulo inicial da nova era de pesquisas científicas

em astrofísica. Projetos futuros incluem melhorias nos novos detectores avançados, e a extensão da rede global de detectores para incluir o Virgo Avançado, KAGRA, e um possível terceiro detector LIGO na Índia, o que irá melhorar significativamente a nossa capacidade de localizar posições de fontes de ondas gravitacionais no céu e estimar suas propriedades físicas. O novo campo da astronomia de ondas gravitacionais parece ser promissor.

As figuras a seguir mostram imagens aéreas dos observatórios LIGO em Hanford, Washington e Livingston, Louisiana. É importante ressaltar novamente as gerações em que o interferômetro Ligo passa a cada expedição em que está posto para colher sinais de ondas gravitacionais e que atualmente o mesmo já têm passado pelas gerações chamadas de Advanced LIGO, Enhanced LIGO e assim por diante, podemos aguardar para vermos as próximas fases desses interferômetros. Uma vez que o LIGO obteve sucesso em suas investigações tudo indica para um investimento mais rigoroso nas próximas décadas.



Figura 4.4: Vista aérea do Interferômetro Avançado LIGO em Hanford(Washington)

Há ainda projetos semelhantes na Alemanha (GEO600 em Hannover), Itália (VIRGO), Japão (TAMA300). Ainda em construção temos na Austrália (AIGO – Australian International Gravitational Observatory) e outro no Japão (LCGT – Large-scale Cryogenic Gravitational-wave Telescope) e a possibilidade da construção de mais um na Índia (INDIGO). Os detectores interferométricos têm como principal vantagem o fato de atuarem em uma faixa larga de frequência, bem mais larga que os de massa ressonante. Por outro lado apresentam algumas desvantagens em relação aos de massa ressonante como: serem cegos para certas direções e polarizações das ondas gravitacionais; serem muito mais caros; e não



Figura 4.5: Vista aérea do Interferometro Avançado LIGO em Linvigston(Louisiana)

poderem responder sobre a quantização das ondas gravitacionais, enquanto os de massa ressonante poderão. Outro projeto importante, são os detectores espaciais já em desenvolvimento. Temos o LISA (Laser Interferometer Space Antenna), um projeto em parceria da NASA e da ESA e será um interferômetro com braços em forma de triângulo equilátero de 5 milhões de quilômetros de comprimento, com a finalidade de detectar ondas na faixa de 0,03miliHertz a 0,1Hz e lançamento previsto para 2020. Ainda, o DECIGO (DECI-hertz Interferometer Gravitational-wave Observatory) japonês previsto para 2027. E ainda o projeto Einstein Telescope (ET) europeu, em forma de triângulo, mas debaixo da Terra.

O Einstein Telescope

O Einstein Telescope (ET) é um futuro detector de terceira geração de ondas gravitacionais, que está sendo projetado por diferentes instituições da União Europeia. Será capaz de verificar a relatividade geral em condições de campo forte e realizar astronomia com precisão em ondas gravitacionais. Esta é uma proposta de detector interferométrico que deve trabalhar na faixa de $\sim 1Hz$ a alguns kHz. Este servirá como complemento para outros tais como o LIGO, os quais possuem frequências de corte mínimas da ordem de dezenas de hertz. Ou seja, o ET será sensível nas regiões do espectro onde outros detectores interferométricos não o são. Adicionalmente, o ET preencherá uma faixa de sensibilidade entre o eLISA (que possuirá frequência máxima de corte de aproximadamente 0.1Hz) e os interferômetros terrestres. É interessante colocarmos destaque que muitas das fontes observáveis pelo ET serão

similares àqueles que seriam visíveis com os detectores terrestres, entre às quais se destacam os sistemas binários compactos usuais da literatura, como por exemplo, o pulsar de Hulse-Taylor. Porém a principal diferença entre o ET e os demais está em uma maior sensibilidade aliada a frequências mínimas mais baixas (da ordem de $\sim 1Hz$). Este consiste em três pares de interferômetros com escalas de 10km e posicionados de tal maneira a formar um triângulo equilátero. Cada par de interferômetros representa um detector de banda larga, na qual um interferômetro é otimizado para ondas abaixo de 100Hz e o outro para ondas acima de 100Hz.

O projeto LISA

O projeto LISA (The Laser Interferometer Space Antenna) é uma parceria da NASA e Agência Espacial Européia(ESA) para desenvolver e operar o detector de ondas gravitacionais no espaço onde este é sensível a frequências entre 0,03 MHz e 0,1 Hz. LISA detecta ondas gravitacionais induzidas por tensões no espaço-tempo medindo mudanças da separação entre as massas em três naves espaciais a uma distância de 5 milhões de quilômetros. LISA descobrirá fontes astrofísicas extraordinárias: dezenas a centenas de espirais e buracos negros binários massivos para um redshift de $z \sim 20$; dezenas de objetos compactos de massa estelar espiral em buracos negros maciços centrais para fora $z \sim 1$; mais de dez mil binários compactos na Galáxia; um mapa do céu profundo feito por milhões a mais; e, possivelmente, fundos de origens cosmológicas. O instrumento de todo o céu vai ver milhares de fontes nos primeiros meses de operação. Parâmetros astrofísicos, como a massa, a rotação e a distância de luminosidade, de muitas fontes será medido com precisão incomum. LISA irá acompanhar inspirais mais enérgicas por semanas ou meses, a previsão de posição no céu cada vez mais precisas e distância de luminosidade da fusão para os observadores eletromagnéticas. Devido à natureza revolucionária da detecção de ondas gravitacionais, os números e tipos de fontes para o detector LISA é um pouco incerto. Felizmente, não são garantidos, fontes binárias de anãs brancas conhecidas a partir de observações eletromagnéticas, e muitos outros que LISA deve ver em grande número a menos que o Universo seja radicalmente diferente do que observações eletromagnéticas nos levaram a acreditar. Em virtude da abertura de um novo espectro, a astronomia de ondas gravitacionais promete pela primeira vez na história humana alto potencial de descoberta.

Projeto Brasileiro Graviton

O Detector de Ondas Gravitacionais Mario Schenberg - Projeto brasileiro Graviton - é um detector esférico de ondas gravitacionais de massa ressonante semelhante ao detector holandês MiniGRAIL, uma antena esférica criogênica para as ondas gravitacionais de 68cm de diâmetro. O detector Mario Schenberg detecta as ondas gravitacionais por uma antena - esfera metálica - de 1150kg com 65cm de diâmetro feita de cobre e 6% de alumínio equipada com transdutores paramétricos de cavidade fechada de dois modos, para monitorar as vibrações da antena.

Essas oscilações são captadas por sensores na superfície da esfera. Depois de captado, o sinal mecânico é transformado em um sinal elétrico, o qual pode ser enviado para um computador e analisado. Os sensores possibilitarão a determinação não só da forma da onda, mas a sua direção de origem. A frequência de ressonância é de 3,2 kHz e a faixa de detecção, com transdutores de dois modos, varia na faixa de 3,17 a 3,23 kHz.

Estes detectores recebem sinais provenientes de diversas fontes astrofísicas, de forma que todos estimulam o detector produzindo um sinal de saída que é amplificado e armazenado para posteriormente ser analisado. Entretanto, estes sofrem interferência de sinais provenientes de diversas outras fontes, não necessariamente apenas de astrofísicas, que ao interagirem com o detector geram um sinal facilmente confundido com sinal de uma onda gravitacional, como os provenientes de abalos sísmicos e efeitos eletromagnéticos que geravam interferência nos detectores de Weber. A estes "sinais" damos o nome de ruído e estes por sua vez prejudicam a sensibilidade de detecção, dificultando a detecção de uma suposta onda. Dentre os diversos ruídos existentes, o ruído térmico (gerado pelo movimento natural das moléculas do meio material, movimento browniano), sísmico (causado pelo movimento da crosta terrestre resultando em terremotos) e vibracional (gerado pelo tráfego de pessoas e automóveis em regiões próximas à antena, bem como pelo movimento de dilatação das estruturas e construção civil), destaca-se o ruído proveniente da interação dos raios cósmicos altamente energéticos com a antena gravitacional.

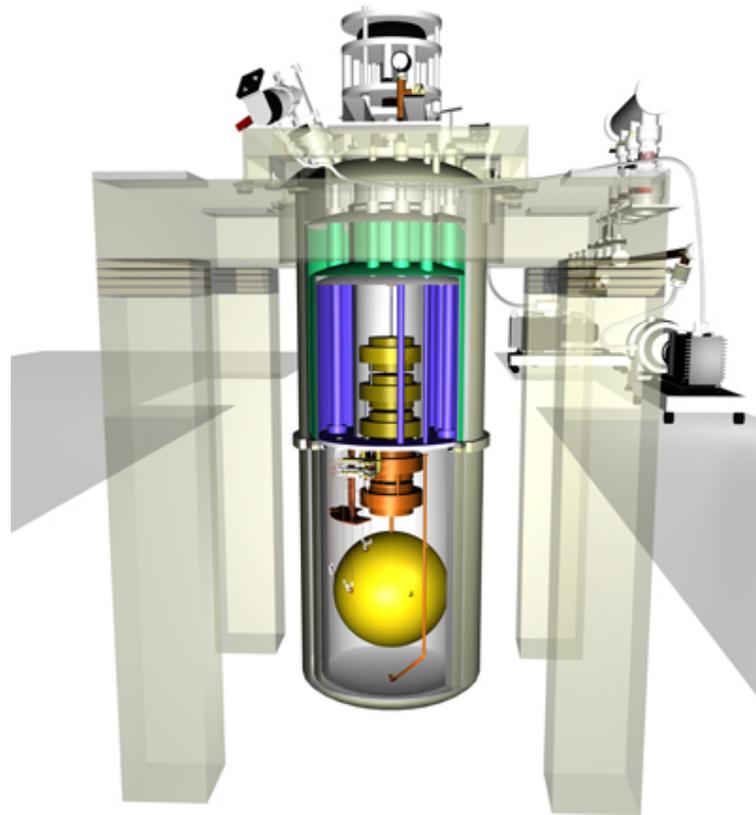


Figura 4.6: Esquema da antena detectora de ondas gravitacionais Schenberg mostrando câmaras criogênicas

4.1 Ondas Gravitacionais Primordiais - Modos B, Inflação

A teoria da inflação cosmológica prevê uma quantização do campo gravitacional vinculado a expansão exponencial no universo na qual esta produz um fundo primordial de ondas gravitacionais estocásticos - este fundo primordial de ondas gravitacionais estocásticos foi discutido na seção anterior - com uma forma característica espectral. Levando em conta a defasagem tecnológica, refiro-me a interferômetros com alta potência e precisão, é pouco provável que estas ondas gravitacionais geradas no período inflacionário sejam detectadas por instrumentos modernos, pelo fato de esta ter impresso uma assinatura sobre a radiação cósmica de fundo, como se fosse uma espécie de registro geral destas ondas. Por conta

desta característica marcante as ondas gravitacionais do período inflacionário tem todas as propriedades de fornecer um teste definitivo, levando em conta, no entanto, que a inflação também prevê uma quantização do campo gravitacional e este produz um fundo primordial de ondas com uma característica marcante.

Quando falamos em quantização do campo gravitacional inflacionário, implica também em falar de polarização da radiação cósmica de fundo que nada mais é do que marca indelével de ondas gravitacionais, ou seja, o mesmo registro geral em que falávamos a pouco. Como a radiação cósmica de fundo é uma forma de luz, ela exhibe todas as propriedades da luz, incluindo a polarização. Existem assim dois modos de polarização na radiação cósmica de fundo em micro-ondas mostradas na Fig. (4.1), as quais chamamos de Modo-E e Modo-B, por analogia ao eletromagnetismo com os campos elétrico (E) e magnético (B). O que as diferem são suas propriedades espaciais: o Modo-E tem simetria de paridade e Modo-B exibe quiralidade, ou propriedades rotacionais. O Modo-E tem maior intensidade do que o Modo-B, que permanece por observar até hoje, dada a sua fraca intensidade. As ondas gravitacionais, tal como as ondas de luz, têm uma tendência determinada para a polarização à esquerda ou à direita. O padrão de Modo-B é uma assinatura única de ondas gravitacionais devido à tendência determinada da polarização.

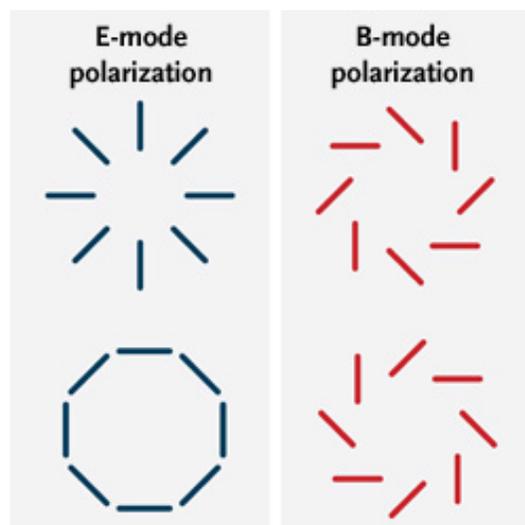


Figura 4.7: Assinatura dos modos de polarização de ondas gravitacionais inflacionárias da Radiação Cósmica de Fundo em Micro-Ondas. (Imagem: <http://www.skyandtelescope.com>)

Em 2014, pesquisadores do grupo BICEP2 (*Background Imaging of Cosmic Extragalactic Polarization*) anunciaram pela primeira vez evidência direta desta inflação cósmica. Os dados obtidos representam as primeiras imagens de ondas gravitacionais, ou ondulações no espaço-tempo do período inflacionário.

O BICEP é um radiotelescópio projetado para detectar a polarização Modo-B da radiação cósmica de fundo em micro-ondas localizada na Estação Polo Sul Amundsen-Scott. Este é projetado para trabalhar em fases, chamadas de BICEP1, BICEP2 e BICEP3. O BICEP1 foi especificamente projetado para detectar a polarização Modo-B da radiação cósmica de fundo em micro-ondas e este é composto 49 pares ortogonais de bolómetros de polarização sensíveis em duas frequências (100 GHz e 150 GHz) e também de um telescópio refrator que fornece resolução angular de $0,93^\circ$ e $0,60^\circ$ em 100 e 150 GHz, respectivamente. BICEP1 operou de janeiro de 2006 a dezembro de 2008. O BICEP2 baseia-se no BICEP1, porém aumenta consideravelmente o número de detectores para aumentar a velocidade de mapeamento. Os detectores do BICEP2 bolómetros de polarização sensíveis feitos a partir de um par de sensores de transição de borda acoplados a um sistemas de antenas ortogonais faseados. Os sensores de transição de borda fornecem sensibilidade limitada de fundo na frequência de 150 GHz. O BICEP2 foi operado de Janeiro de 2010 até Dezembro de 2012. Em março de 2014 foram anunciados os primeiros resultados com fortes evidências de que o modo B tenha sido efetivamente detectado por esse experimento. Por fim BICEP3 consiste de um único telescópio com os mesmos 2560 detectores trabalhando numa frequência de 95 GHz, com 68 cm de abertura, proporcionando o dobro do rendimento óptico. Ele foi implantado em janeiro de 2015 e os primeiros dados da pesquisa será publicado em 2016.

A Fig (4.1) mostra os modos de polarização E e B obtidos pelos BICEP2. A coluna da esquerda tanto para o Modo-E quanto para o Modo-B representam amostras reais do padrão de torção na polarização da radiação cósmica de fundo obtidos pelo grupo de pesquisadores aqui mencionados; na coluna da direita, no entanto, nos mostra uma simulação de ruído fazendo uso do modelo padrão Λ CDM. As linhas mostram a força da polarização e a orientação de diferentes locais no céu. Os tons azul e vermelho mostram o grau de torção a favor e contra o movimento dos ponteiros do relógio.[21]

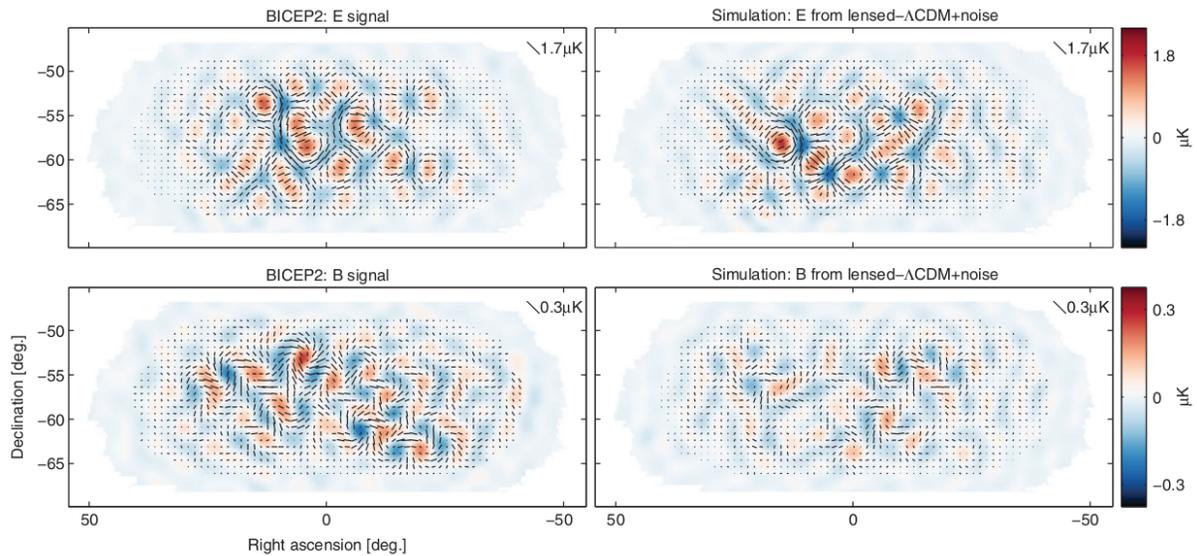


Figura 4.8: BICEP2: OG's da inflação geram padrão de torção na polarização da radiação cósmica de fundo, conhecido como modo-B. Padrão observado com o telescópio BICEP2. [21]

4.2 Sistemas Binários e Pulsares

Vimos neste trabalho que o movimento de dois corpos sujeitos apenas à atração gravitacional, classicamente é facilmente reduzido à solução do problema de um corpo de massa desprezível sob a ação de um campo gravitacional estático causado por uma massa pontual. Se seguirmos com esse contexto, podemos entender um sistema binário com um sistema de dois corpos que orbitam em torno de centro de massa comum onde a interação entre estes é de natureza gravitacional, esses astros geralmente encontrados na literatura são: estrelas de nêutron, buracos negros, galáxias ou asteróides.

Seremos testemunha de uma grande revolução na astronomia num futuro breve, devido as melhorias nas observações em todo o espectro eletromagnético: com grandes telescópios ópticos, antenas de rádio, uma série de satélites para explorar infra-vermelho, raio-X e partes do espectro de raios gama, e o desenvolvimento de novas tecnologias. Cada nova janela de observação trouxe novas surpresas que mudaram drasticamente a nossa compreensão do universo. Estas descobertas vão desde a relíquia da radiação cósmica de fundo, que tem se tornado a nossa principal ferramenta para explorar o Big Bang; o fato de que os objetos quase-estelar estão a distâncias cosmológicas, na qual temos entendimento de que eles

são alimentados por buracos negros supermassivos; pulsares, que abriu o estudo de estrelas de nêutrons e iluminado um ponto final da evolução estelar; sistemas binários de raios-X, que agora nos permitem fazer estudos detalhados de buracos negros e estrelas de nêutrons; explosões de raios gama provenientes de imensas distâncias, que não são explicados até hoje; o fato de que a expansão do universo está acelerando, que nos levou à caça para a natureza da energia escura.[13]

O ponto de partida para estudarmos estes sistemas físicos vem do interesse de sabermos definir o que é uma estrela binária, distinguir os tipos de sistemas binários, matematicamente sabermos inferir a massa das estrelas em sistemas binários, entender sua importância para conhecer as massas das estrelas e também como vimos anterior fazer uso da teoria da relatividade geral para fins de estabilidade e colher informações a cerca destes sistemas. Na literatura física facilmente encontramos quatro tipos de sistemas binários, que são: Binárias visuais, Binárias astrométricas, Binárias espectroscópicas e Binárias eclipsantes. A primeira são pares de estrelas facilmente vistas por telescópios, associadas gravitacionalmente e que distam umas das outras por centenas de unidades astronômicas. Ao serem observadas, são vistas como duas estrelas, como por exemplo, binárias visuais Mizar e Alcor e também Sírius-A e Sírius-B. O segundo grupo de binárias citadas a pouco são assim classificadas por apresentarem dificuldades de serem visualizadas telescopicamente pelo fato dessa ser tênue, mas a sua detecção é feita pelas ondulações no movimento mais brilhante da companheira. Binárias espectroscópicas apresentam um curto período, porém a velocidade orbital é grande. Para estudar/inferir a natureza desse sistema faz-se necessário observar a variação de sua velocidade radial, levando em conta análise das linhas espectrais que variam de comprimento de onda com o passar do tempo (redshift e blueshift). Em média a separação média entre estas é da ordem de uma unidade astronômica. Por fim, Binárias eclipsantes são binárias cuja a disposição do plano orbital em relação a um observador terrestre forma um eclipse, por esta razão tais estrelas passam por eclipses mútuos.

O Prêmio Nobel da Física foi atribuído a Russell Hulse e Joseph Taylor pela descoberta do binário pulsar PSR 1513 + 16 no ano de 1993 durante uma busca de rotina por novos pulsares desde a primeira possibilidade de sondar novos aspectos da teoria gravitacional: os efeitos de fortes campos gravitacionais relativistas internos sobre dinâmica orbital, e efeitos

de reação da radiação gravitacional.

Hulse e Taylor fazendo uso do radiotelescópio fixo no Observatório de Arecibo localizado em Arecibo, Porto Rico detectaram uma pulsação de emissões de rádio e com isso identificaram a fonte como um pulsar de rotação rápida. A estrela de nêutrons gira em seu eixo 17 vezes por segundo; assim o intervalo dos pulsos é de 59 milissegundos. Hulse e Taylor perceberam uma repetição no tempo de chegada dos pulsos. Por vezes os pulsos eram recebidos um pouco mais cedo do que o esperado e outras mais tarde. Estas variações aconteciam com um período de 7,75 horas. Este comportamento era previsível e que o pulsar era membro de um sistema binário [21].

Para fins de justificativa de estudos desses sistemas, temos que a radiação de um sistema de estrelas binarias nos diz muito a cerca de suas características como, por exemplo, inferir a massa do sistema, período de rotação, temperatura, como se deu sua coalescência etc.

Pulsares são objetos com uma enorme densidade, onde sua matéria é submetido a condições extremas. Os pulsares são estrelas de nêutrons em rotação, altamente magnetizadas, que emitem um cone de radiação muito estreito ao longo do seu eixo magnético. Por essa razão detectamos sua radiação em uma fração muito pequena de seu período de rotação, quando o cone de radiação intercepta a direção do observador, este por muitas vezes é assemelhado a um farol. Os períodos típicos de oscilação destes objetos variam de 1,4 milissegundos e 8,5 segundos de tempo e por sua vez vão relaxando com o tempo. Pulsares são remanescentes de explosões de supernovas massivas. Trata-se de objetos extremamente compactos. A estrutura das estrelas de nêutrons é muito complexo, com densidades passando de uma tonelada por centímetro cúbico em sua superfície para as centenas de milhões de toneladas por centímetro quadrado em seu centro. As camadas exteriores constituem um corpo rígido com uma estrutura cristalina formado principalmente de núcleos de ferro. Nas camadas mais interiores são formados a partir de uma mistura de material supercondutor e superfluida, consistindo essencialmente de neutrons, com uma pequena proporção de protons e eletrons.

Como se trata de imãs de intensas rotações, os pulsares emitem radiação electromagnética associado com o seu campo magnético. Isto implica que uma parte da energia de rotação é transformada em radiação electromagnética, o que implica novamente em uma diminuição progressiva da velocidade de rotação e, por conseguinte, um aumento no período de rotação.

Há uma causa adicional de desaceleração: o fluxo de partículas relativísticas proveniente das regiões polares, a qual chamamos de "vento do pulsar", exerce uma frenagem na rotação.

O gráfico a seguir - Figura 8.14 - mostra uma população de pulsares de rádio com períodos entre 1,40 milissegundos (PSR J1748-2446AD) à 8,5 segundos (PSR J2144-3933). Destes, 170 são pulsares pertencentes a sistemas binários com períodos orbitais para o sistema variando de 95 minutos (PSR J0024-7204R) e à algo no entorno de cinco minutos (PSR J1638-4725). As estrelas companheiras são estrelas da sequência principal, anãs brancas, estrelas de nêutrons ou planetas. Mostra-se também um pulsar duplo (PSR J0737-3037A/B).

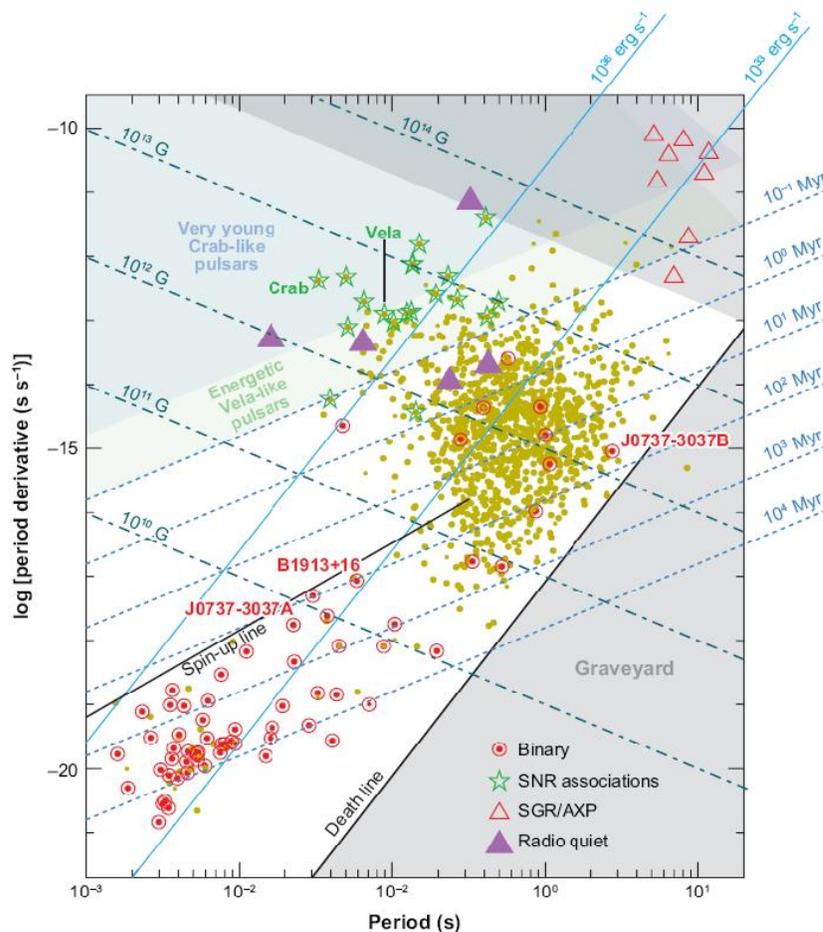


Figura 4.9: Diagrama bidimensional com período em função de sua variação para evolução populacional de pulsares (Imagem: Instituto de Astrofísica de Andalúcia (IAA-CSIC))

Da figura 8.14 temos ainda que, a maioria dos pulsares estão com períodos no entorno de 0,6 segundos e variações de 10^{-15} segundos por segundo, com idades de $1 \sim 10$ milhões de anos

e com campos magnéticos da ordem de 10^{12} ; pulsares mais jovens estão na parte superior da figura: Apresentam idades menores que cem mil anos, com campos magnéticos mais intensos, próximos de 10^{13} Gauss, e variando na ordem de 10^{-12} segundos por segundo, o que significa mais rapidez com seu período; Pulsares mais antigos estão parte inferior esquerda da figura: apresentam idades mais de cem milhões de anos as idades, campos magnéticos inferior a 10^{10} gauss, períodos da ordem de milissegundos e variações abaixo 10^{-18} segundos por segundo, que indica diminuir muito lentamente. Correspondem à mais antiga de toda a população de pulsares conhecidos.

Temos ainda a evolução de pulsares normais de milissegundo, onde na literatura encontramos em categorias de altas e baixas massas. Em binário de raios-X de alta massa, o companheiro é massivo o suficiente para explodir como uma supernova, onde o resultado final dessa explosão é uma segunda estrela de nêutrons. Se o sistema sobreviver a esta explosão, o resultado é um duplo binário de nêutrons. Nove destes sistemas são conhecidos, a exemplo PSR B1913 + 16 - é um pulsar de rádio de 59 milissegundos, que orbita a sua companheira a cada 7,75 hr; Binários de raios-X de baixa massa evoluem e transferem matéria numa estrela de neutrons numa escala de tempo muito mais longo, girando em períodos tão curtos como alguns ms. Sete outros "pulsares de milissegundo de raios-X" são agora conhecidos com taxas de rotação e períodos orbitais que variam entre os 185 - 600 Hz e 40 min - 4,3 horas, respectivamente. Por exemplo o SAX J1808.4-3658.

Grande parte das massa de anãs brancas observadas hoje estão caminhando para uma nova categoria que cresce gradualmente, a razão, no entanto, é que estes sistemas são distintos em relação aos de milissegundo pulsares binários de anãs brancas de várias maneiras, pois, o período de rotação deste pulsar de rádio é geralmente mais longos, cerca de 9 - 200 milissegundos, a massa da anã branca é maior, geralmente $\gtrsim 0,5M_{\odot}$, a órbita, enquanto essencialmente circular, é muitas vezes significativamente mais excêntrico $e \gtrsim 10^{-3}$ e por fim os parâmetros binários não necessariamente acompanham o período de massa ou relações de período-excentricidade. Pulsares são conhecidos por terem velocidades espaciais pelo menos uma ordem de magnitude maior em relação aos seus progenitores de sequências principais, que têm os valores típicos entre 10 e 50 km/s. O movimentos próprios para mais de 250 pulsares já foram medidos em grande parte por técnicas de interferometria. Estes dados implicam

num largo espectro de velocidade que varia de 0 à 1000 km/s, onde o recorde atual é de PSR B1508 + 55, com movimento próprio e medição de paralaxe implicando uma velocidade transversal de 1083_{-90}^{+103} km/s.

4.3 Buracos Negros Supermassivos Binários

Buracos negros são objetos previstos pela Teoria da Relatividade Geral cuja magnitude do campo gravitacional é suficientemente grande para impedir que os fótons - radiação eletromagnética - gerados além do Raio de Schwarzschild, dado por, $R_{Sch} = 2GM/c^2$, possa escapar. Há uma forte suspeita de que os núcleos de inúmeras galáxias abrigam buracos negros massivos, onde a interação deste é principalmente gravitacional. No caso da Via Láctea observações recentes, de movimentos de estrelas, sugerem a presença de um buraco negro da ordem de milhões de massas solares. É muito possível que os fenômenos de atividade nuclear observados em algumas galáxias, e nos quasares, se relacionem com a acreção de massas nesses buracos negros massivos.

A astrofísica do século XX mostrou, que os buracos negros deixaram o patamar de ser apenas uma bizarra previsão da Teoria da Relatividade Geral. Sua presença tem sido detectada em sistemas estelares duplos e no núcleo de galáxias, através do seu forte campo gravitacional. No caso das galáxias, eles são necessários para explicar as enormes quantidades de energia que emanam dos chamados "núcleos ativos de galáxias".

Um buraco negro geralmente é definido como sendo uma região do espaço na qual o campo gravitacional é tão intenso que nada escapa dele, nem mesmo a luz. Chamamos Horizonte de Eventos a região limite para ocorrer um evento, que é a superfície na qual a velocidade de escape é igual à da luz. O termo buraco negro se deve ao fato de que nada escapa de dentro dele, nem mesmo a radiação eletromagnética. O raio do Horizonte de Eventos é dado pelo Raio de Schwarzschild, em homenagem ao astrofísico alemão que derivou a sua expressão: $R_{Sch} = 2GM/c^2$, onde as quantidades G, M e c são respectivamente a constante da gravitação, a massa do Buraco Negro e a velocidade da luz. Tomemos nota sobre esta expressão ao fato de que a única variável é a massa do buraco negro, ao qual R_{Sch} é proporcional ao seu valor. Implica desta que, para a Terra, R_{Sch} é somente 9 mm, e para o Sol é 3 km, ou seja, para transformarmos a Terra e o Sol em buracos negros, teríamos que comprimir sua massa dentro

de 9 mm e 3 km, respectivamente.

Além das observações indicarem um buraco negro no centro de cada galáxia, estes por sua vez comportam uma massa da ordem de $10^6 M_{\odot} - 10^9 M_{\odot}$. Buracos negros cuja massa é muito maior do que a citada acima é chamado buraco negro supermassivo. Há bastante evidência observacional de que galáxias colidem e se fundem, e há boas razões para acreditar que quando há colapso entre buracos negros supermassivos, estrelas e gás de galáxia resultará em um buraco negro supermassivo espiral com um núcleo comum e - com duração na escala de tempo de 10^8 anos - até chegar perto o suficiente para ser conduzido em decadência orbital completa por reação de radiação gravitacional. O evento citado acima resulta numa explosão de supernova. Esse tipo de supernova é de tipo II. Em uma supernova de tipo I, que evolui num sistema duplo de estrelas bem próximas entre si, uma transfere massa para a outra até provocar, nesta última, a explosão de supernova, que dá assim também origem a um buraco negro. [13]

Estes buracos negros supermassivos além de serem detectados pela interação gravitacional como dito acima, pode ser detectado também pelas enormes quantidades de energia luminosa que emanam dos núcleos de galáxias ativas, como os quasares. Nesses objetos, a potência luminosa, muitas vezes, excede a potência combinada de todas as estrelas da galáxia, o que indica a presença de uma fonte de energia não estelar. Ocorre que os buracos negros são uma eficiente "máquina" de produzir energia, através da transformação da energia potencial gravitacional da matéria que cai dentro dele em luminosidade e energia cinética de jatos e ventos produzidos num disco de acreção

Buracos Negros estelares são tipicamente dez vezes a massa do Sol, os Buracos Negros supermassivos, por sua vez têm massas que variam de 1 milhão a 1 bilhão de vezes a massa do Sol. Observações do movimento coletivo das estrelas no núcleo de galáxias próximas com o telescópio espacial Hubble, astrônomos concluíram que grande parte das galáxias que possuem um bojo estelar - estrutura esferoidal em torno do centro das galáxias -, como galáxias espirais e elípticas, contêm um Buraco Negro Supermassivo no seu centro. Por volta do ano 2000, concluiu-se que a massa do buraco negro central é proporcional à massa do bojo, sendo da ordem de um milésimo do seu valor, o que levou à conclusão que os buracos negros supermassivos evoluem juntamente com as galáxias: à medida que o bojo é proporcional ao

buraco negro.

A atividade de um Buraco Negro Supermassivo no centro de uma galáxia pode ficar sem atividade aparente se não houver matéria próxima para ser capturada. Matéria é capturada se estrelas ou nuvens de gás estiverem próximas o suficiente para serem atraídas gravitacionalmente. Uma vez que isso acontece forma-se um disco de acreção em torno do Buraco Negro, devido a matéria capturada. Uma vez que o material do disco cai em direção ao centro da galáxia, o disco aquece e torna-se luminoso - ultravioleta, raios-X - e observa-se o núcleo da galáxia mais brilhante. Além de emitir radiação, o disco pode também perder matéria via ventos e jatos de partículas relativísticas que saem da parte mais interna do disco e que emitem, principalmente, em ondas de rádio. Galáxias com núcleo mais brilhante do que o usual e com ventos e jatos em ondas de rádio, são chamadas galáxias ativas.

Capítulo 5

Conclusões

Nesta dissertação estudamos a produção de ondas gravitacionais de sistemas binários de objetos compactos, em particular buracos negros e/ou estrelas de neutron. Essas fontes compõem um dos cenários mais esperados para a detecção de ondas gravitacionais que consiste no processo de coalescência de sistemas binários formados por buracos negros e/ou estrelas de neutron. A análise desse processo, ocorre pelo estudo das fases de coalescência, que são marcadas pela inspiralação. Nossos estudos cobrem uma ampla faixa de massa, que se estende desde massas estelares até supermassivos ($10M_{\odot} - 109M_{\odot}$).

Mostramos que a taxa de variação do período de uma onda gravitacional gerada por um sistema binário formado por duas massas estelares supermassivas depende da excentricidade da órbita

$$\dot{T} \propto T^{-5/3} f(e), \quad (5.1)$$

onde

$$f(e) = \frac{1}{(1-e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4 \right) \quad (5.2)$$

Os dados do pulsar binário levam à previsão teórica $dT/dt = (2.40242 \pm 0.00002)1012s/s$, enquanto que o valor observado é $dT/dt = (2.4056 \pm 0.0051)1012s/s$ [14] Por outro lado, a potência irradiada é

$$P \propto a^4 f(e) \quad (5.3)$$

Vemos que quando tomamos o limite de $e \rightarrow 1^-$ com a fixo, a potência irradiada diverge. Isso ocorre pelo fato de que, se enviarmos $e \rightarrow 1^-$ mantendo a fixo, vemos que $R \rightarrow 0$ [$R = a(1 - e^2)$] e $b \rightarrow 0$. No entanto, a elipticidade $e \rightarrow 1^-$ e a fixo, o movimento

relativos das coordenadas aproximam-se mais e mais de $r = 0$, onde a aceleração $\frac{Gm}{r^2}$ diverge e as ondas formalmente divergem também. Contudo, claramente com essa aproximação no momento de massas tipo ponto cessam de ser válidas, e devemos ter conta do tamanho finito dos corpos.

Em investigações futuras pretendemos estudar a propagação de ondas gravitacionais no espaço-tempo de Sitter e como uma constante cosmológica não-nula afeta sua detecção em experimentos que medem o período de emissão dos pulsares (PTAs). Pulsares são relógios extraordinariamente regulares quando medidos em escalas de tempo de alguns anos. Se assumirmos que eles emitem pulsos perfeitamente regulares, podemos usar observações de irregularidades no período de emissão de um único pulsar para colocar limites sobre as OGs. Quando $\Lambda \neq 0$, as ondas são anarmônicas nas coordenadas de Robertson-Walker e, embora seus efeitos sejam muito pequenos, eles são potencialmente mensuráveis. Sabemos da literatura que o atraso residual no período dos pulsares induzidos pelas OGs a partir de fontes em PTAs exibem uma dependência angular peculiar em torno do valor do ângulo subtendido pela fonte e pelos pulsares, dependendo principalmente do valor da constante cosmológica e da distância até as fontes. Neste trabalho consideramos as Equações de Einstein linearizadas com um termo cosmológico e derivamos expressões que corrigem as previsões de ondas gravitacionais planas. Os estados de polarização da OGs não mudam na presença da constante cosmológica. A amplitude e a frequência são modificadas e variam com o tempo. Discutimos a possibilidade desses efeitos serem medidos em PTAs [28, 29].

Apêndice A

O tensor Energia Momento de Onda Gravitacionais

Podemos agora determinar explicitamente o termo $t_{\mu\nu}$, fazendo uso da relação dado por

$$t_{\mu\nu} = -\frac{c^4}{8\pi G} \left\langle R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}R^{(2)} \right\rangle \quad (\text{A.1})$$

com $R_{\mu\nu}^{(2)}$ dado por

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(2)} = & \frac{1}{2}\bar{g}^{\rho\sigma}\bar{g}^{\alpha\beta} \left[\frac{1}{2}\bar{D}_\mu h_{\rho\alpha}\bar{D}_\nu h_{\sigma\beta} + (\bar{D}_\rho h_{\nu\alpha})(\bar{D}_\sigma h_{\mu\beta} - \bar{D}_\beta h_{\mu\sigma}) \right. \\ & + h_{\rho\alpha}(\bar{D}_\nu\bar{D}_\mu h_{\sigma\beta} + \bar{D}_\beta\bar{D}_\sigma h_{\mu\nu} - \bar{D}_\beta\bar{D}_\nu h_{\mu\sigma} - \bar{D}_\beta\bar{D}_\mu h_{\nu\sigma}) \\ & \left. + \left(\frac{1}{2}\bar{D}_\alpha h_{\rho\sigma} - \bar{D}_\rho h_{\alpha\sigma} \right) (\bar{D}_\nu h_{\mu\beta} + \bar{D}_\mu h_{\nu\beta} - \bar{D}_\beta h_{\mu\nu}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Estamos interessados na energia e momento transportada pelas ondas gravitacionais com grandes distancias em relação a fonte - essa distancia é dado pela distancia do detector a fonte - e essa distancia pode ser aproximadamente ao espaço-tempo de fundo plano. Neste caso podemos simplificar o tensor de Ricci acima apenas mudando $\bar{D}^\mu \rightarrow \partial^\mu$ e reescrevendo da seguinte forma

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(2)} = & \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}\partial_\mu h_{\alpha\beta}\partial_\nu h^{\alpha\beta} + h^{\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\nu h_{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}\partial_\nu\partial_\beta h_{\alpha\mu} - h^{\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\beta h_{\alpha\nu} + h^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta h_{\mu\nu} \right. \\ & + \partial^\beta h_\nu^\alpha\partial_\beta h_{\alpha\mu} - \partial^\beta h_\nu^\alpha\partial_\alpha h_{\beta\mu} - \partial_\beta h^{\alpha\beta}\partial_\nu h_{\alpha\mu} + \partial_\beta h^{\alpha\beta}\partial_\alpha h_{\mu\nu} - \partial_\beta h^{\alpha\beta}\partial_\mu h_{\alpha\nu} \\ & \left. - \frac{1}{2}\partial^\alpha h\partial_\alpha h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial^\alpha h\partial_\nu h_{\alpha\mu} + \frac{1}{2}\partial^\alpha h\partial_\mu h_{\alpha\nu} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Sabemos que o tensor simétrico $h_{\mu\nu}$ tem 10 graus de liberdade dos quais 8 são modos de gauge e 2 são modos físicos. Correspondentemente, $t_{\mu\nu}$ pode ter em principio contribuição

de ambos os modos físicos e de gauge. Temos que o lado esquerdo da equação de Einstein dado para uma métrica de background(fundo) tem a unica quantidade que depende de um sistema de coordenadas é $\bar{g}_{\mu\nu}$ que também é um tensor.

$$\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{R} = \frac{8\pi G}{C^4} (\bar{T}_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}). \quad (\text{A.4})$$

Assim, em princípio, não há nada de errado se, o lado direito da mesma tem ambas contribuições físicas e contribuição dependente das coordenadas seguindo das contribuições dos modos de gauge. A questão é como podemos distinguir a contribuição para $t_{\mu\nu}$, em virtude dos modos físicos da contribuição dos modos de gauge. o primeiro vai dar o tensor energia-momento da onda gravitacional e descrevem efeito físico que não pode ser medida de distância, enquanto que o último vai ser associado com ondulações no espaço-tempo que, devido à escolha do sistema de coordenadas, e que pode ser feita desaparecer com uma escolha de calibre(gauge) apropriado.

A maneira mais de termos a contribuição dos modos físicos é fazermos uso da condição do Gauge de Lorentz dado por $\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$. Esta condição ja elimina quatro dos graus de liberdade, nos deixando com os modos ξ_μ onde satisfaz a relação $\square \xi_\mu = 0$ como ja foi visto anteriormente. Fazemos ξ_μ de tal modo que $h = 0$, e assim temos apenas três modos de gauge independentes que permanecem. Então, $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ e a condição do Gauge de Lorentz torna-se $\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0$.

Com o tratamento acima simplificamos significativamente o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}^{(2)}$ dado acima ja definido observando o fato que, entre a média temporal ou espacial, a derivada espaço-tempo ∂_μ pode ser integrada por partes se negligenciamos os termos de fronteiras. Fazendo integração por partes usando a condição de gauge $\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0$ e $h = 0$ e também da equação de movimento $\square h_{\alpha\beta} = 0$ imediatamente vemos que quase todos os termos do tensor de Ricci se anulam exceto os dois primeiros, onde pela integração dos termos restantes temos a relação dada abaixo

$$\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle = -\frac{1}{4} \langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} \rangle \quad (\text{A.5})$$

enquanto $\langle R^{(2)} \rangle$ desaparece após a integração por partes e usando a equação de movimento $\square h_{\alpha\beta} = 0$. Assim podemos reescrever fazendo a devida substituição a quantidade abaixo

$$t_{\mu\nu} = -\frac{c^4}{8\pi G} \left\langle R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}R^{(2)} \right\rangle = \text{frac}c^4 8\pi G \langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} \rangle \quad (\text{A.6})$$

Podemos verificar que os modos do gauge residual ξ_μ não contribuem para esta última expressão. De fato, sob a transformação de Gauge dado por $h_{\mu\nu}(x) \rightarrow h'_{\mu\nu}(x') = h_{\mu\nu}(x) - (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu)$, aplicada a variação de $t_{\mu\nu}$ é

$$\begin{aligned} \delta t_{\mu\nu} &= \frac{c^4}{32\pi G} [\langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu (\delta h^{\alpha\beta}) \rangle + (\mu \leftrightarrow \nu)] \\ &= \frac{c^4}{32\pi G} [\langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu (\partial^\alpha \xi^\beta + \partial^\beta \xi^\alpha) \rangle + (\mu \leftrightarrow \nu)] \\ &= \frac{c^4}{16\pi G} [\langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu \partial^\alpha \xi^\beta \rangle + (\mu \leftrightarrow \nu)] \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

e estes desaparecem uma vez que, os termos médios, dado dentro da simbologia $\langle \dots \rangle$ anulam-se quando integramos por partes ∂^α e assim podemos usar a condição de Lorentz $\partial^\alpha h_{\alpha\beta} = 0$. Portanto, o tensor $t_{\mu\nu}$ depende apenas dos modos físicos do tensor transversal sem traço h_{ij}^{TT} , e podemos ainda simplificar fazendo a troca de $h_{\mu\nu}$ na equação de $t_{\mu\nu}$ acima com a métrica no gauge transversal sem traço (TT). Em particular, a densidade de energia do gauge invariante se dá por determinarmos

$$t^{00} = \frac{c^2}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} \rangle, \quad (\text{A.8})$$

onde o termo pontuado nada mais é do que, uma derivada temporal do fator, $\partial_t = \frac{1}{c} \partial_0$, ou em termos das amplitudes da onda, dado por (h_+, h_\times) que é

$$t^{00} = \frac{c^2}{16\pi G} \langle \dot{h}_+ + \dot{h}_\times \rangle. \quad (\text{A.9})$$

Para uma onda plana viajando na ao longo da direção z do plano, \dot{h}_{ij}^{TT} é uma função de $t - z/c$ e, portanto, $t^{01} = t^{02} = 0$, enquanto que, $\partial_z \dot{h}_{ij}^{TT} = \partial_0 \dot{h}_{ij}^{TT} = +\partial^z \dot{h}_{ij}^{TT}$, e portanto

$$t^{03} = t^{00}. \quad (\text{A.10})$$

Uma outra alternativa de extrair parte da invariância de gauge de $t_{\mu\nu}$ é partirmos da última expressão $R_{\mu\nu}^{(2)}$ acima sem fazer qualquer prioridade de gauge fixo, e considerar sua variação sob a transformação de gauge linearizado como dito acima, onde agora ξ_μ são genéricos, em vez de ser obrigado a satisfazer a condição de que $\square \xi_\mu = 0$. Então, com uma simples álgebra encontramos que

$$t_{\mu\nu} \rightarrow t_{\mu\nu} + \partial_\rho U_{\mu\nu}^\rho \quad (\text{A.11})$$

com $U_{\mu\nu}^\rho$ sendo algum tensor. O termo adicional é uma divergência total, e gostaríamos de jogá-lo dentro da média, como fizemos anteriormente. Aqui, no entanto, devemos ser cuidadosos porque, uma vez que não temos fixado o gauge de Lorentz, a métrica agora não satisfaz uma simples equação de onda tal que $\square h_{\mu\nu} = 0$. Assim, o argumento que nos permitiu integrar por partes *partial rho* dentro de uma média temporal de, ou dentro de uma média espacial, não atravessa. No entanto, podemos integrar por partes ∂_μ entre a média do espaço-tempo que denotamos por $\langle\langle\dots\rangle\rangle$. Assim, o termo $\langle\langle\partial_\rho U_{\mu\nu}^\rho\rangle\rangle$ desaparece e $\langle\langle t_{\mu\nu}\rangle\rangle$ é um gauge invariante. Assim, uma maneira equivalente a destacar a parte invariante do gauge de *t mu nu* é a média sobre o espaço-tempo, e o resultado novamente recorre a $t_{\mu\nu}$ como visto acima.

Finalmente, observamos que o lado esquerdo da

$$\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{R} = \frac{8\pi G}{C^4}(\bar{T}_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}) \quad (\text{A.12})$$

é covariantemente conservado com respeito a \bar{D}^μ , edisto segue que, $\bar{D}^\mu(\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}\bar{R}) = 0$ pela identidade de Bianchi. Logo, temos que

$$\bar{D}^\mu(\bar{T}_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}) = 0. \quad (\text{A.13})$$

O fato que a quantidade é covariantemente conservada é a soma de $\bar{T}_{\mu\nu}$ e $t_{\mu\nu}$, ao invés que cada um separadamente, reflete o fato de que há uma troca geral de energia e momento entre as fontes de matéria e ondas gravitacionais. Em largas distâncias da fonte a métrica aproxima-se de uma métrica espaço-plana, então \bar{D}^μ aproxima-se de ∂^μ , enquanto que, fora da fonte $\bar{T} = 0$. Então, distante da fonte, a última expressão reduz-se a

$$\partial^\mu t_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.14})$$

A.1 O fluxo de Energia

Tendo obtido o tensor energia-momento transportado por ondas gravitacionais, agora é simples determinar o fluxo de energia, na qual segue energia das ondas gravitacionais fluindo por unidade de tempo por unidade de superfície em largas distâncias da fonte. Partiremos da conservação do tensor energia-momento, $\partial_\mu t^{\mu\nu} = 0$ na qual implica que

$$\int_V d^3x (\partial_0 t^{00} + \partial_i t^{i0}) = 0, \quad (\text{A.15})$$

onde V é o volume espacial em uma região distante, delimitada por uma superfície S . A energia da onda gravitacional dentro do volume é

$$E_V = \int_V d^3x t^{00} \quad (\text{A.16})$$

o qual podemos reescrever a conservação do tensor energia-momento como segue

$$\frac{1}{c} \frac{dE_V}{dt} = - \int_V d^3x \partial_i t^{0i} = - \int_S dA n_i t^{0i} \quad (\text{A.17})$$

onde o termo n^i é exterior normal a superfície e dA é um elemento de superfície. Além disso, fora da fonte, podemos impor o gauge transversal sem traço. Seja S uma superfície esférica com uma larga distância r da fonte. Seu elemento de superfície é $dA = r^2 d\Omega$ e seu normal dado por $\hat{n} = \hat{r}$ é o vetor unitário na direção radial. Assim, reescrevemos

$$\frac{dE_V}{dt} = -c \int_V dA t^{0r} \quad (\text{A.18})$$

onde

$$t^{0r} = \frac{c^4}{32\pi G} \left\langle \partial^0 h_{ij}^{TT} \frac{\partial}{\partial r} h_{ij}^{TT} \right\rangle. \quad (\text{A.19})$$

Uma onda gravitacional que se propaga radialmente para fora, em distâncias suficientemente grande r , tem sua forma geral dado por

$$h_{ij}^{TT}(t, r) = \frac{1}{r} f_{ij}(t - r/c) \quad (\text{A.20})$$

onde $f_{ij}(t - r/c)$ é algum tipo de função de tempo retardado $t_{ret} = t - r/c$. No entanto, temos tomando a derivada radial desta última relação temos

$$\frac{\partial}{\partial r} h_{ij}^{TT}(t, r) = \frac{1}{r^2} f_{ij}(t - r/c) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} f_{ij}(t - r/c). \quad (\text{A.21})$$

Numa função de combinação $t - r/c$ temos

$$\frac{1}{r^2} f_{ij}(t - r/c) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} f_{ij}(t - r/c) \quad (\text{A.22})$$

e portanto, temos

$$\frac{\partial}{\partial r} h_{ij}^{TT}(t, r) = -\partial_0 h_{ij}^{TT}(t, r) + O(1/r) = \partial^0 h_{ij}^{TT}(t, r) + O(1/r). \quad (\text{A.23})$$

Então, temos de t^{0r} acima que, para largas distâncias, $t^{0r} = +t^{00}$, que poderia ter sido encontrado mais facilmente se derivássemos $t^{03} = t^{00}$ observando o fato de que o observador

posto em largas distancias da fonte ver um plano de frente de onda, e a energia dentro do volume V satisfaz a relação

$$\frac{dE_V}{dt} = -c \int dA t^{00}. \quad (\text{A.24})$$

O fato que E_V diminua significa que o lado de fora de propagação da onda gravitacional carrega um fluxo de energia

$$\frac{dE}{dAdt} = +ct^{00} = \frac{c^3}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} \rangle, \quad (\text{A.25})$$

ou, escrevendo o elemento de superfície como $dA = r^2 d\Omega$, e temos então

$$\frac{dE}{dt} = \frac{c^3 r^2}{32\pi G} \int d\Omega \langle \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} \rangle. \quad (\text{A.26})$$

Em termos dos modos de polarização das amplitudes de onda, h_+ e h_\times , podemos reescrever o resultado como

$$\frac{dE}{dAdt} = \frac{c^3}{16\pi G} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle. \quad (\text{A.27})$$

A energia total flui por dA entre $t = -\infty$ e $t = +\infty$ é no entanto

$$\frac{dE}{dA} = \frac{c^3}{16\pi G} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle. \quad (\text{A.28})$$

Nesta situação relevante de detectores de ondas gravitacionais a média $\langle \dots \rangle$ na ultima equação é puramente uma média temporal sobre poucos periodos. Assim, podemos realizar a integral sobre dt de $-\infty$ e $+\infty$ eliminando portanto qualquer dependencia temporal, e a média temporal subsequente é apenas a média de uma constante. Portanto, a média na ultima equação pode ser omitida, e assim o fazemos como segue

$$\frac{dE}{dA} = \frac{c^3}{16\pi G} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left(\dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \right). \quad (\text{A.29})$$

Inserindo a expansão de onda plana de em seus modos de polarização $h_{+,\times}(t)$ dado por

$$\tilde{h}_{ab}(f) = \begin{pmatrix} \tilde{h}_+(f) & \tilde{h}_\times(f) \\ \tilde{h}_\times(f) & -\tilde{h}_+(f) \end{pmatrix}_{ab} \quad (\text{A.30})$$

e

$$h_{ab}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} df \tilde{h}_{ab}(f) e^{2\pi i f t} \quad (\text{A.31})$$

temos

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dA} &= \frac{c^3}{16\pi G} \int_{-\infty}^{+\infty} df (2\pi f)^2 \left(\left| \tilde{h}_+(f) \right|^2 + \left| \tilde{h}_\times(f) \right|^2 \right) \\ &= \frac{\pi c^3}{4G} \int_{-\infty}^{+\infty} df f^2 \left(\left| \tilde{h}_+(f) \right|^2 + \left| \tilde{h}_\times(f) \right|^2 \right).\end{aligned}\quad (\text{A.32})$$

Visto que a integral é sob $f \rightarrow -f$, podemos restringi-las para frequências físicas, $f > 0$, escrevemos então a integral da seguinte forma

$$\frac{dE}{dA} = \frac{\pi c^3}{4G} \int_0^{+\infty} df f^2 \left(\left| \tilde{h}_+(f) \right|^2 + \left| \tilde{h}_\times(f) \right|^2 \right).\quad (\text{A.33})$$

Portanto

$$\frac{dE}{dA df} = \frac{\pi c^3}{2G} f^2 \left(\left| \tilde{h}_+(f) \right|^2 + \left| \tilde{h}_\times(f) \right|^2 \right)\quad (\text{A.34})$$

Sempre usaremos a convenção de que o espectro de energia dE/df é a quantidade que nos dá a energia total quando esta é integrada sobre a frequência positiva, em vez de entre $-\infty$ e $+\infty$.

Escrevendo $dA = r^2 d\Omega$, e integrando sobre uma esfera em torno da fonte, encontraremos o espectro de energia dado por

$$\frac{dE}{df} = \frac{\pi c^3}{2G} f^2 r^2 \int d\Omega \left(\left| \tilde{h}_+(f) \right|^2 + \left| \tilde{h}_\times(f) \right|^2 \right).\quad (\text{A.35})$$

Bibliografia

- [1] REINES, A. E.; PLOTKIN, R. M.; RUSSELL, T. D.; MEZCUA, M.; CONDON, J. J.; SIVAKOFF, G. R.; JOHNSON, K. E., *A candidate massive black hole in the low-metallicity dwarf galaxy pair mrk 709* The Astrophysical Journal Letters, v **787**, p **L30**, 2014.
- [2] FILLOUX, C.; PACHECO, J. A. F.; DURIER, F.; ARAUJO, J. C. N. de., *Coalescence rate of supermassive black hole binaries derived from cosmological simulations: Detection rates for lisa* International Journal of Modern Physics D, v **20**, p **2399**, 2011.
- [3] MATSUBAYASHI, T.; SHINKAI, H.; EBISUZAKI, T., *Gravitational waves from merging intermediate-mass black holes.* The Astrophysical Journal, v **614**, p **864**, 2004.
- [4] SOARES, D., *Os fundamentos físico-matemáticos da cosmologia relativística* Revista Brasileira de Ensino de Física, v **35**, p **3302**, 2013.
- [5] MATSUURA, O. T., *História da Astronomia no Brasil.* BRA: Cepe Editora, 2013.
- [6] HOBSON, M. P. and EFSTATHIOU, G. P. and LASENBY, A. N., *General relativity: an introduction for physicists.* USA: Cambridge University Press, 2006.
- [7] MUKHANOV, V., *Physical foundations of cosmology.* USA: Cambridge university press, 2005.
- [8] WILL, C. M., *The confrontation between general relativity and experiment* **arXiv preprint gr-qc/0510072, 2005.**
- [9] DE SOUZA, R. E., *Introdução à cosmologia.* BRA:EdUSP, 2004.
- [10] SCHUTZ, B., *A first course in general relativity.* USA: Cambridge university press, 2009.
- [11] SWEINBERG, S., *Cosmology.* USA: Oxford University Press, 2008.
- [12] COLLODEL, L. G., *Tópicos de Cosmologia.* I Escola de Verão, Universidade Federal do Paraná Departamento de Física, Curitiba - PR 2014.
- [13] SATHYAPRAKASH, B. S. and SCHUTZ, B. F. , *Physics, astrophysics and cosmology with gravitational waves* Living Reviews in Relativity, v **12**, p **18–19**, 2019.
- [14] WEISBERG, J. M. and TAYLOR, J. H., *Relativistic binary pulsar B1913+16: Thirty years of observations and analysis* ASP Conf. Ser., v **328**, p **25**, 2005.

- [15] MAGGIORE, M., *Gravitational waves. Vol 1, Theory and Experiments*. Oxford, 2008.
- [16] ACCADIA, T. et al., *Calibration and sensitivity of the Virgo detector during its second science run* Classical and Quantum Gravity, v **28**, p **025005**, 2010.
- [17] ABBOTT et al., *Observation of gravitational waves from a binary black hole merger* Physical review letters, v **116**, p **061102**, 2016.
- [18] MOORE, C. J., *The sensitivity of pulsar timing arrays* IOP Publishing, v **610**, p **012018**, 2015.
- [19] TSUJIKAWA, S., *Introductory review of cosmic inflation* Citeseer, **arXiv preprint hep-ph/0304257** v **44**, **2003**.
- [20] ADE, P. A. R. et al., *Detection of B-mode polarization at degree angular scales by BICEP2* Physical Review Letters, v **112**, p **241101**, 2014.
- [21] HULSE, R. A.; TAYLOR, J. H., *Discovery of a pulsar in a binary system* Neutron stars, black holes, and binary X-ray sources, v **48**, p **433**, 1975.
- [22] LORIMER, D. R., *Binary and millisecond pulsars* Living Reviews in Relativity, v **11**, p **21**, 2008.
- [23] COLES, P.; LUCCHIN, F., *Cosmology: The origin and evolution of cosmic structure*. USA: John Wiley & Sons, 2003.
- [24] WUENSCHÉ, C. A., *A Radiação Cósmica de Fundo em Microondas e a Formação de Estruturas no Universo: Uma Visão Atual* São José dos Campos, INPE, 1994.
- [25] BERGMANN, T. S., *Buracos negros supermassivos: os monstros que se escondem no centro das galáxias* Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência, v **61**, p **38–42**, 2009.
- [26] MOORE, T. A., *A general relativity workbook*. USA: University Science Books, 2013.
- [27] MISNER, C. W. and THORNE, K. S. and WHEELER, J. A., *Gravitation*. USA: Macmillan, 1973.
- [28] ESPRIU, D. AND PUIGDOMÈNECH, D., *Local Gravitation of Λ Using Pulsar Timing Arrays*. Astrophysical Journal, v **764**, p **163**, 2013.
- [29] JOSHI, B. C., *Pulsar Timing Arrays* Int. J. Mod. Phys. D , v **22**, p **1341008**, 2013.