



Universidade do Estado do Rio Grande do Norte – UERN

Faculdade de Ciências Exatas e Naturais – FANAT

Departamento de Física

Programa de Pós-Graduação em Física

Bruno Wesley Nogueira Ribeiro

Aproximação Slow-Roll no Contexto das Teorias
 κ -Deformadas

Mossoró-RN
2020

Bruno Wesley Nogueira Ribeiro

**Aproximação Slow-Roll no Contexto das Teorias
 κ -Deformadas**

Dissertação apresentada ao programa de
Pós-graduação em Física da Universidade
do Estado do Rio Grande do Norte como
parte dos requisitos para obtenção do tí-
tulo de MESTRE EM FÍSICA

Orientador: Prof. Dr. Fábio Cabral Carvalho

Mossoró-RN
2020

© Todos os direitos estão reservados a Universidade do Estado do Rio Grande do Norte. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do(a) autor(a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu(a) respectivo(a) autor(a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

Catálogo da Publicação na Fonte.
Universidade do Estado do Rio Grande do Norte.

R484a Ribeiro, Bruno Wesley Nogueira
 Aproximação Slow-Roll no Contexto das Teorias k-
 Deformadas. / Bruno Wesley Nogueira Ribeiro. - Mossoró-
 RN, 2020.
 115p.

Orientador(a): Prof. Dr. Fábio Cabral Carvalho.
Dissertação (Mestrado em Programa de Pós-
Graduação em Física). Universidade do Estado do Rio
Grande do Norte.

1. Inflação Cósmica. 2. Inflação k-Exponencial. 3.
Cosmologia Inflacionária. 4. Mecanismo Slow-Roll. 5.
Universo Primordial. I. Carvalho, Fábio Cabral. II.
Universidade do Estado do Rio Grande do Norte. III.
Título.

Bruno Wesley Nogueira Ribeiro

Aproximação Slow-Roll no Contexto das Teorias κ -Deformadas

Dissertação apresentada ao Programa de
Pós-graduação em Física da Universidade
do Estado do Rio Grande do Norte como
parte dos requisitos para obtenção do tí-
tulo de MESTRE EM FÍSICA

Aprovada em 16/03/2020

Banca Examinadora

Prof. Dr. Fábio Cabral Carvalho

Orientador

UERN

Prof. Dr. Hidalyn Theodory Clemente Mattos de Souza

Examinador externo

UFERSA

Prof. Dr. Edésio Miguel Barboza Júnior

Examinador interno

UERN

Para Pessoas Especiais:

Dedico este trabalho aos meus pais, avós, irmãos, padrasto e à minha
futura esposa.

Agradecimentos

Esta dissertação de mestrado não é fruto exclusivo do meu esforço e dedicação. Ela é resultado da colaboração de algumas pessoas que, de uma forma ou de outra, contribuíram direta ou indiretamente nas minhas formações acadêmica e pessoal até aqui. Sem o apoio destas pessoas, os resultados não seriam tão positivos.

Em primeiro lugar, agradeço à toda minha família, em especial, minha mãe querida, minha avó e meu padrasto, pelo inigualável suporte emocional, financeiro e sentimental. Neste mesmo patamar, sou grato ao meu admirável pai, pessoa importantíssima na minha formação pessoal e em quem sempre espelhei minhas atitudes e personalidade, e aos meus queridos irmãos, a quem sempre estive comprometido a amar e ajudar. Gostaria de dizer que vocês são minha base vital e minhas joias preciosas.

De forma única e especial, sou grato à minha fiel e amada companheira, Larissa Gonçalves, que além de uma excelente namorada, foi minha melhor amiga e conselheira. Sempre conduzindo muito bem nossas ideias para o futuro e que tantas vezes abriu mão do seu próprio tempo para cuidar de mim nas horas em que mais precisei, como foi durante minha recuperação de um acidente sofrido recentemente. Na mesma medida, sou grato à toda sua família, em especial, seus pais. Estes que, durante todo esse tempo, me acolheram e cuidaram de mim como se eu fosse parte da sua própria prole.

Agradeço também à todos os meus grandiosos amigos, dentro e fora do contexto acadêmico, pelas inúmeras vezes em que fui feliz e bem-aventurado, pelos inesquecíveis momentos de estudo e de lazer, pela agradável experiência de ter sempre com quem contar e, principalmente, pela base emocional sólida que um laço amistoso é capaz de nos proporcionar.

No âmbito profissional, gostaria de agradecer especialmente à ilustre personalidade que é meu orientador, Fábio Cabral, uma pessoa altamente digna e qualificada pela qual tenho muito respeito e admiração. Sou grato pelas lições, orientações, aprendizados e, principalmente, por ter acreditado que eu seria capaz de realizar um trabalho desta relevância.

Decerto, sou extremamente grato à todos que fazem parte do programa de pós graduação em Física e ao departamento de Física da UERN, incluindo alunos, docentes,

técnicos e demais servidores, pela ótima convivência, pelas aulas maravilhosas daqueles que foram meus professores e pela aprendizagem que tive, em geral. Em particular, agradeço aos professores Thomas Dumelow e Vamberto Dias, pela importantíssima ajuda com a execução correta dos algoritmos que geraram parte dos nossos resultados.

Sobretudo, serei eternamente grato à esta instituição pública de ensino intitulada de Universidade do Estado do Rio Grande do Norte (UERN), por me acolher tão bem durante estes anos de graduação e de mestrado, por me proporcionar pelo menos dois dos bens mais valiosos desta vida, a educação e o conhecimento, por me apresentar à pessoas tão humildes e ao mesmo tempo extraordinárias e por fazer eu me sentir estar em casa.

Enfim, gostaria de agradecer à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

*“Não existe nenhum caminho lógico para a descoberta
das leis do Universo - o único caminho é o da intuição.”*

(Albert Einstein)

Resumo

Apesar de nos últimos anos terem surgido fortes concorrentes, a Cosmologia inflacionária ainda é a nossa melhor teoria para explicar a origem das inomogeneidades da Radiação Cósmica de Fundo, bem como para resolver os “quebra-cabeças” deixados pelo *Big Bang*. Neste trabalho de dissertação, abordamos este maravilhoso paradigma começando pela apresentação do modelo padrão da cosmologia, Λ CDM, ou melhor, modelo do *Big Bang*, suas principais previsões teóricas, os testes observacionais os quais o modelo é submetido regularmente e, ao final do capítulo, falamos sobre seus principais problemas, aqueles que deram origem à Cosmologia inflacionária: problemas da planura, horizonte, monopolos magnéticos e o problema das condições iniciais. Em seguida, como principal pré requisito para o estudo do paradigma inflacionário propriamente dito, exploramos a teoria linear das perturbações cosmológicas, buscando sempre uma descrição independente de calibre, através da inserção de quantidades invariantes de *gauge*. Tanto na cosmologia padrão quanto na teoria de pequenas perturbações, fizemos nossa descrição para um universo com curvatura, K , não nula. No capítulo seguinte, apresentamos a teoria da inflação cósmica e o mecanismo usual pelo qual são geradas as perturbações primordiais, o mecanismo *slow-roll*. Para tanto, dividimos o paradigma em seis etapas principais: resolver os enigmas do modelo padrão, obter as equações dinâmicas válidas durante a inflação, obter os espectros primordiais escalares e tensoriais das flutuações geradas pelo regime *slow-roll*, conhecer os principais modelos da literatura, construir um formalismo capaz de identificar qualquer nível de não gaussianidade primordial e confrontar os modelos com as correntes observações. Feito isso, propomos uma nova forma de energia potencial para o *ínflaton*, baseados nas teorias κ -deformadas, generalizando o modelo exponencial usual. Confrontando nossos resultados com os dados observacionais mais recentes e obtivemos aspectos bastante positivos para o nosso potencial exponencial κ -deformado.

Palavras-chave: Inflação Cósmica. Inflação κ -Exponencial. Cosmologia Inflacionária. Mecanismo Slow-Roll. Universo Primordial.

Abstract

Although strong concurrents have emerged in the last years, the inflationary Cosmology is still our best theory in explaining the origin of inhomogeneities from Cosmic Microwave Background such as well to solve the puzzles left by Big Bang. In this master's thesis we approach these wonderful paradigm by starting by presentation of the standard cosmological model Λ CDM, or better, Big Bang model, your main theoretical predictions, the observational tests in which the model is regularly subjected and, at the end of the chapter we talk about its main problems, those that gave rise to the inflationary Cosmology: flatness, horizon and magnetic monopole problems and initial conditions problem. Next, as the main prerequisite for the study inflationary paradigm itself, we explore the linear theory of cosmological perturbations, always looking for an independent gauge approach, through the insertion of gauge-invariant variables. Both in the standard cosmology and small perturbations theory we did our description to one universe with curvature K non vanishing. In the next chapter, we present the cosmic inflation theory and the slow-roll mechanism. For this purpose, we divide the paradigm into six main steps: solve the standard model puzzles, obtain the dynamic equations valid during the inflation, obtain the primordial scalar and tensor spectra of the fluctuations generated by the slow-roll regime, know the main models from literature, build a formalism able to identify any level of primordial non-Gaussianity and and confront the models with the current observations. That done, we propose a new form of potential energy for inflaton, based on κ -deformed theories, generalizing the usual exponential model. Comparing our results with the most recent observational data, we obtained very positive aspects for our κ -deformed exponential potential.

Keywords: Cosmic Inflation. κ -Exponential Inflation. Inflationary Cosmology. Slow-Roll Mechanism. Primordial Universe.

Lista de Siglas e Abreviaturas

- TRG – Teoria da Relatividade Geral;
- TQC – Teoria Quântica de Campos;
- HBB – Hot Big Bang (Big Bang);
- BBN – Nucleossíntese Primordial;
- RCF – Radiação Cósmica de Fundo;
- COBE – Cosmic Background Explorer;
- WMAP – Wilkinson Microwave Anisotropy Probe;
- FLRW – Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker;
- SDSS – Sloan Digital Sky Survey;
- BAO – Baryon Acoustic Oscillations;
- SNe – Supernovae;
- SNs-Ia – Supernovas do tipo Ia;
- RSD – Redshift-Space Distorcions;
- PPF – Parametrização Pós Friedmann;
- HZ – Harrison-Zel’dovich;
- SR – Slow-Roll.

Lista de Símbolos

- $\mathbb{R}$ – Conjunto dos números reais;
- ϵ – Parâmetro real pequeno;
- n – Número inteiro maior que zero;
- P – Número real arbitrário;
- t – Tempo cósmico (ou cosmológico);
- τ – Tempo conforme;
- T – Temperatura;
- x^μ – Coordenadas gerais do espaço-tempo;
- $a(t)$ – Fator de escala;
- $\vec{r}(t)$ – Distância física;
- $\vec{x}$ – Distância comóvel;
- $\vec{v}$ – Vetor velocidade;
- v^i – Campo de 3-velocidade (ou 3-velocidade mundial);
- $u^\mu, \delta u^\mu$ – Campo de 4-velocidade (ou velocidade mundial) e sua perturbação;
- $H(t)$ – Parâmetro de Hubble;
- H_0 – Constante de Hubble;
- $\mathcal{H}(\tau)$ – Parâmetro de Hubble conforme;
- $\mathcal{H}_0$ – Constante de Hubble conforme;
- $\Gamma(t)$ – Taxa de interação entre as partículas;
- ds^2 – Intervalo (ou elemento de linha);
- K – Curvatura da seção espacial;

- χ – Coordenada radial curva;
- $d_p(t)$ – Horizonte de partículas;
- $\chi_p(\tau)$ – Horizonte comóvel de partículas;
- $H^{-1}(t)$ – Horizonte de Hubble;
- $\mathcal{H}^{-1}(\tau)$ – Horizonte comóvel de Hubble;
- $d_A(t)$ – Lookback horizon;
- t_0 – Idade do universo;
- k – Número de onda;
- ν – Frequência;
- c – Velocidade da luz na ausência de interações;
- Z – Redshift cosmológico;
- $\mathcal{E}$ – Energia total da radiação;
- $g_{\mu\nu}, \delta g_{\mu\nu}$ – Tensor métrico e sua perturbação;
- γ_{ij} – 3-Tensor métrico espacial;
- $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ – Tensor de Riemann-Christoffel;
- $R_{\mu\nu}, \delta R_{\mu\nu}$ – Tensor de Ricci e sua perturbação;
- $R, \delta R$ – Escalar de Ricci e sua perturbação;
- $\delta^{(3)}R$ – Perturbação de curvatura escalar intrínseca de Ricci;
- $G_{\mu\nu}, \delta G_{\mu\nu}$ – Tensor de Einstein e sua perturbação;
- $T_{\mu\nu}, \delta T_{\mu\nu}$ – Tensor energia-momento e sua perturbação;
- δ^μ_ν – Tensor de Kronecker;
- G – Constante universal da gravitação;
- $\rho, \delta\rho$ – Densidade de energia e sua perturbação;

- $p, \delta p$ – Pressão isotrópica e sua perturbação;
- $\rho_{crit.}$ – Densidade crítica;
- Ω – Parâmetro de densidade;
- Ω_0 – Densidade total de matéria hoje ($t = t_0$);
- Ω_K – Densidade total de curvatura;
- w – Parâmetro de estado;
- Λ – Constante cosmológica;
- h – Constante de Planck;
- $\hbar$ – Constante de Planck reduzida;
- m – Massa;
- m_{Pl} – Massa (ou energia) de Planck;
- M_{Pl} – Massa de Planck dividida por $\sqrt{8\pi}$;
- U – Energia mecânica total;
- ϕ – Função lapso (potencial perturbativo);
- ψ – Perturbação escalar da curvatura;
- S_i, F_i – Perturbações métricas vetoriais;
- h_{ij} – Perturbação métrica tensorial;
- B_i – Vetor deslocamento;
- E_{ij} – Tensor cisalhamento;
- $\Pi_{\mu\nu}$ – Tensor de stress anisotrópico;
- δq_i – Densidade de momento;
- Φ, Ψ – Potenciais de Bardeen;
- V_i – Potencial vetorial invariante de calibre;

- $\mathcal{R}, \zeta$ – Perturbações da curvatura comóvel e adiabática da densidade;
- $h(\tau)$ – Amplitude de ondas gravitacionais primordiais;
- e_{ij} – Autos-modos do operador laplaciano;
- $\mathcal{P}_s, \mathcal{P}_T$ – Espectros de potências escalar e tensorial;
- B_s – Bispectro escalar;
- A_s, A_T – Amplitudes espectrais escalar e tensorial;
- n_s, n_T – Índices espectrais escalar e tensorial;
- r – Razão tensor-escalar;
- k_* – Escala pivô;
- α_s, α_T – Variações dos índices espectrais escalar e tensorial;
- $\varphi, \delta\varphi$ – campo escalar inflaton e sua perturbação;
- $V(\varphi)$ – Energia potencial do inflaton;
- $\epsilon_V, \eta_V, \xi_V^2$ – Parâmetros slow-roll;
- $N, \delta N$ – Número de e-folds e sua perturbação;
- $\delta\varphi_\psi$ – Perturbação no campo invariante de calibre;
- v – Variável de Mukhanov-Sasaki;
- $H_{\nu_{\mathcal{R}}}^{(1)}, H_{\nu_{\mathcal{R}}}^{(2)}$ – Funções de Hankel de primeiro e segundo tipo;
- Σ – Cisalhamento escalar comóvel;
- f_{NL}^{local} – Parâmetro de não linearidade (ou não gaussianidade) local;
- λ – Parâmetro do modelo;
- κ – Parâmetro de deformação;
- $V_\kappa(\varphi)$ – Potencial inflacionário generalizado;
- f_i – Distribuição estatística generalizada;

- $\gamma(x)$ – Fator de Lorentz do κ -formalismo;
- $\epsilon_{V_\kappa}, \eta_{V_\kappa}, \xi_{V_\kappa}^2$ – Parâmetros slow-roll generalizados;
- N_κ – Número de e-folds generalizado;
- $n_{s_\kappa}, \alpha_{s_\kappa}$ – Índice espectral escalar generalizado e sua variação;
- r_κ – Razão tensor-escalar generalizada;
- $f_{NL_\kappa}^{local}$ – Parâmetro de não linearidade local generalizado.

Notações e Convenções

- As dimensões do espaço-tempo seguem a linguagem do formalismo $(3 + 1)$, onde 3 são as coordenadas espaciais e 1 é o tempo;
- Índices gregos tais como α, β, μ, ν , etc., variam de 0 à 3;
- Índices latinos tais como i, j, k, l , etc., variam de 1 à 3;
- É empregada a convenção de soma de Einstein, onde os índices repetidos (sendo um contravariante e o outro covariante) indicam um somatório nestes índices;
- A assinatura métrica utilizada é $(- + + +)$;
- O tempo conforme é definido como

$$\tau \equiv \int_0^t \frac{dt}{a(t)};$$

- Derivadas parciais ordinárias, $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$, são indicadas por ∂_μ ou por uma vírgula, i.e.,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu \varphi \equiv \varphi_{,\mu},$$

onde φ é um campo escalar genérico;

- Os coeficientes de conexão, ou símbolos de Christoffel de segunda espécie (símbolos de Christoffel, por simplicidade), são definidos como

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta});$$

- Para a derivada covariante de um tensor genérico, $\tau_{\beta\cdots}^{\alpha\cdots}$, serão utilizadas, conforme a conveniência, as notações

$$\nabla_\mu \tau_{\beta\cdots}^{\alpha\cdots} \quad \text{ou} \quad \tau_{\beta\cdots;\mu}^{\alpha\cdots},$$

onde

$$\nabla_\mu \tau_{\beta\cdots}^{\alpha\cdots} \equiv \tau_{\beta\cdots;\mu}^{\alpha\cdots} = \partial_\mu \tau_{\beta\cdots}^{\alpha\cdots} + \Gamma_{\rho\mu}^\alpha \tau_{\beta\cdots}^{\rho\cdots} + \cdots - \Gamma_{\beta\mu}^\rho \tau_{\rho\cdots}^{\alpha\cdots} - \cdots;$$

- Derivadas ordinárias com respeito ao tempo cósmico são indicadas por um ponto, i.e.,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \equiv \partial_t \varphi \equiv \dot{\varphi};$$

- Derivadas ordinárias com respeito ao tempo conforme são dadas por um primo, i.e.,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \equiv \partial_\tau \varphi \equiv \varphi';$$

- Derivadas covariantes com respeito à métrica espacial γ_{ij} são indicadas por “|i”, i.e.,

$$\nabla_i \tau_{\beta \dots}^{\alpha \dots} \equiv \tau_{\beta \dots | i}^{\alpha \dots};$$

- O tensor de curvatura (ou tensor de Riemann-Christoffel) é definido como

$$R^\alpha_{\beta \mu \nu} \equiv \Gamma^\alpha_{\beta \nu, \mu} - \Gamma^\alpha_{\beta \mu, \nu} + \Gamma^\alpha_{\rho \mu} \Gamma^\rho_{\beta \nu} - \Gamma^\alpha_{\rho \nu} \Gamma^\rho_{\beta \mu};$$

- O tensor de Ricci é a contração do tensor de Riemann-Christoffel, dada por

$$R_{\mu \nu} \equiv R^\alpha_{\mu \alpha \nu};$$

- O escalar de curvatura (ou escalar de Ricci) é dado pela contração do tensor de Ricci,

$$R \equiv R^\mu_{\mu} = g^{\mu \nu} R_{\mu \nu};$$

- O tensor de Einstein é definido como

$$G_{\mu \nu} \equiv R_{\mu \nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu \nu};$$

- A métrica de Robertson-Walker (ou métrica *background*) é definida como

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \gamma_{ij} dx^i dx^j,$$

onde γ_{ij} é o tensor métrico espacialmente puro, tal que

$$\gamma_{ij} dx^i dx^j = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2;$$

- Em termos do tempo conforme, a métrica FLRW é definida como

$$ds^2 = a^2(t) \left[-d\tau^2 + \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \right];$$

- É empregado o sistema de unidades naturais (ou unidades planckianas), onde adota-se $c = \hbar = 1$.

Lista de figuras

2.1	Mapa de temperaturas da RCF criado pelo satélite Planck.	7
2.2	Cone de luz.	11
2.3	Distância comóvel e distância física.	12
2.4	Evolução do fator de escala.	18
2.5	Restrições observacionais do Planck para um universo plano.	20
2.6	Restrições CMB e LSS para um universo dominado por Ω_Λ	20
2.7	Distribuição marginalizada de w_a e w_0	21
2.8	Restrição de w da energia escura.	21
4.1	Potencial inflacionário <i>slow-roll</i>	49
4.2	Potencial inflacionário <i>large field</i>	61
4.3	Potencial inflacionário <i>small field</i>	62
4.4	Potencial inflacionário híbrido.	63
4.5	Espectro de potência das flutuações primordiais.	68
4.6	Plano $n_s - r$ e dados do Planck, BAO e BK15.	69
5.1	Potencial generalizado como função de φ	75
5.2	Índice espectral generalizado como função de κ	76
5.3	Plano $n_{s_\kappa} - r_\kappa$	77

Lista de tabelas

2.1	Principais eventos na história do universo.	28
B.1	Propriedades básicas de $\exp_{\kappa}(x)$ e $\ln_{\kappa}(x)$	92

Sumário

1	Introdução	1
2	Modelo Cosmológico Padrão	6
2.1	Síntese e Fundamentos	6
2.2	Expansão do Universo	8
2.3	Métrica FLRW	9
2.4	Tempo Conforme e Horizontes	10
2.5	<i>Redshift</i> Cosmológico	13
2.6	Dinâmica	14
2.7	Vínculos Observacionais	19
2.8	Enigmas do <i>Big Bang</i>	22
2.8.1	Problema das Condições Iniciais	22
2.8.2	Problema do Horizonte	23
2.8.3	Problema da Planura	24
2.8.4	Problema do Monopolo Magnético	25
2.9	História Térmica do Universo	26
2.9.1	Equilíbrio Térmico Local	26
2.9.2	Desacoplamento e <i>Freeze-Out</i>	27
2.9.3	Principais Eventos no Universo	27

3	Perturbações Cosmológicas	30
3.1	Perturbando as Equações de Einstein	31
3.2	Perturbações da Métrica	32
3.3	Perturbações do Tensor Energia-Momento	34
3.4	Formalismo <i>Gauge</i> -Invariante	36
3.5	Variáveis <i>Gauge</i> -Invariantes	38
3.6	Equações de Einstein	41
3.6.1	Perturbações Escalares	41
3.6.2	Perturbações Vetoriais	41
3.6.3	Perturbações Tensoriais	42
3.7	Caracterização das Perturbações	43
3.7.1	Campos Aleatórios Gaussianos	43
3.7.2	Espectro de Potência Primordial	44
3.7.3	Índice Espectral	45
3.7.4	Variação do Índice Espectral	46
4	Teoria da Inflação	47
4.1	Resolvendo os problemas do HBB	50
4.2	Dinâmica Clássica da Inflação	51
4.3	Espectro de Perturbações Escalares	53
4.4	Ondas Gravitacionais Primordiais	58
4.5	Modelos de Inflação	59
4.5.1	Modelos de <i>Large Field</i>	60
4.5.2	Modelos de <i>Small Field</i>	62
4.5.3	Modelos Híbridos	63
4.6	Não-Gaussianidade Primordial	64

4.7	Formalismo δN	66
4.8	Inflação e Observações	68
5	Modelo de Inflação Generalizado	70
5.1	Elementos da κ -Estatística e κ -Álgebra	72
5.2	Inflação κ -Exponencial	73
5.3	Discussão dos Resultados	75
6	Considerações Finais e Perspectivas	78
	Referências Bibliográficas	80
A	Funções de Hankel	90
B	Funções $\exp_{\kappa}(x)$ e $\ln_{\kappa}(x)$	91
B.1	Definição	91
B.2	Propriedades Básicas	92

Capítulo 1

Introdução

Podemos assegurar que a Cosmologia moderna nasceu no início do século passado, com as contribuições históricas de Albert Einstein (1879–1955), Alexander Friedmann (1888–1925) e Edwin Hubble (1889–1953). Einstein tendo desenvolvido a Teoria da Relatividade Geral [1] (1915), Friedmann por ter obtido, pela primeira vez, soluções dinâmicas para o universo à partir das equações de campo de Einstein [2] (1922) e Hubble pela descoberta da expansão do universo [3] (1929). Antes disso, acreditava-se que o universo era pequeno, estático e eterno. Graças à estes cientistas sabemos hoje que o universo é muito maior, continua à crescer e teve uma origem há cerca de 14 bilhões de anos [4].

Prevista por Friedmann e depois confirmada por Hubble, a expansão do universo acarretou numa elegante hipótese quanto à origem do universo. Nela o universo é um lugar cada vez menor, mais denso e quente conforme mais jovem, de modo que em $t = 0$ o espaço, o tempo e a matéria estavam contidos numa região infinitamente pequena, densa e quente, denominada *singularidade*. Estima-se que no tempo de Planck (10^{-43} s), menor escala observada na natureza, a temperatura do universo era da ordem de 10^{32} K [5, 6].

A origem do universo concebida dessa forma data de 1929 e se deve, principalmente, ao cosmólogo e padre católico belga, Georges Lemaître. Um fato bastante curioso é que em 1927, independentemente de Friedmann e de Hubble, baseado nos trabalhos de Vesto Slipher e em suas soluções das equações de campo de Einstein, Lemaître já afirmava que o universo estava em expansão contínua, com uma velocidade de recessão proporcional à distância ao ponto observado. Isso o levou à hipótese do “*átomo primordial*”, conhecida hoje como teoria do *Big Bang* (HBB) [7].

O termo “*Big Bang*” só surgiu algum tempo depois, à cerca dos anos 50, num episódio curioso da história da Ciência. Liderados por Fred Hoyle, ele e mais dois jovens astrônomos da época propuseram uma teoria que batia de frente com a de Lemaître, a teoria do estado estacionário, que não resistiu por muito tempo perante as observações. Nela Hoyle propunha um universo com criação contínua de matéria contrabalançando a expansão observada [8]. Foi quando em 1949, após ter lido os trabalhos de Lemaître, Hoyle teria dito (durante uma transmissão de rádio e num tom de ironia) que aquilo que Lemaître havia proposto era uma espécie de “grande explosão” como a origem de tudo. Entretanto, a teoria de Lemaître não fala de nenhuma explosão, mas de uma expansão repentina cujas causas e mecanismos físicos ainda são desconhecidos [9].

Em seguida, já no ano de 1964, uma dupla de radioastrônomos norte americanos – Arno Penzias e Robert Wilson – detectaram acidentalmente um sinal eletromagnético que se estendia por toda região observável do céu [10]. Após o físico canadense Phillip Peebles e sua equipe analisarem a descoberta da dupla, viram que esse sinal se tratava da Radiação Cósmica de Fundo (RCF), uma relíquia cósmica na faixa das microondas, prevista por George Gamow e seus dois estudantes de pós doutorado, Ralph Alpher e Robert Herman, em 1948, antes mesmo da sua detecção [11, 12, 13, 14].

Neste ano (1948) Gamow, Alpher e Herman haviam proposto uma descrição física brilhante para a formação dos elementos mais leves (Hidrogênio, Deutério, Hélio e Lítio), conhecida hoje como a Nucleossíntese Primordial (BBN) [12, 13, 14]. Com a observação da RCF foi possível estudar os fótons mais antigos do universo e concluir que a teoria desses cientistas estava totalmente correta, exceto pelo fato de que a quantidade de matéria não relativística prevista por ela era de apenas 5%, enquanto que as medições astronômicas mostravam que deveriam haver cerca de 20–30% [15].

Um pouco antes disso, em 1937, estudando as condições de estabilidade de galáxias, Fritz Zwicky observou um efeito gravitacional muito grande produzido por algum tipo de matéria não bariônica [16]. Esta que definitivamente era diferente de tudo que se conhecia até o momento. Estimou a quantidade desse material e viu que era muito maior que a parcela que ele conseguia observar com o seu telescópio. Assim, a descoberta de Zwicky combinada com as previsões da BBN e as medições da RCF constituíram uma base de evidências muito sólida para o que é chamado hoje de Matéria Escura [15, 17].

Em seguida, o lançamento do satélite COBE (1989) possibilitou que muitas características do universo primordial fossem reveladas. Descobriu-se, à princípio, que a distribuição de temperatura da RCF não é perfeitamente homogênea, mas apresenta minúsculas flutuações ($\sim 0,01\%$) em torno da temperatura média de $2,725 \pm 0,002 \text{ K}$ [18]. Depois, percebeu-se que a formação das estruturas em larga escala (galáxias, aglomerados, filamentos e superaglomerados de galáxias) depende fundamentalmente da presença dessas flutuações, vindo a serem chamadas de as “*sementes primordiais*” [19, 20].

No final do século passado, já em 1998, uma nova descoberta trouxe um novo ingrediente para o cenário cosmológico discutido até aqui. Observando uma classe especial de supernovas, os astrônomos Saul Permuter, Adam Riess e Brian Schmidt descobriram, independentemente, que estes objetos pareciam estar muito mais longe do que os modelos previam, constatando assim a expansão acelerada do universo [21, 22, 23]. Já que nenhum material conhecido até então era capaz de acelerar a expansão de Hubble, postulou-se uma nova forma de energia, hoje conhecida como Energia Escura [4].

O arcabouço da Cosmologia moderna constituído da Expansão do Universo, da Nucleossíntese Primordial, Radiação Cósmica de Fundo, Matéria e Energia Escura ganhou o *status* de modelo padrão da Cosmologia, conhecido hoje como o modelo do *Big Bang*, ou Λ CDM, onde Λ faz alusão à constante cosmológica de Einstein e CDM significa “*Cold Dark Matter*” (matéria escura fria), ou seja, matéria não relativística [4, 5, 11, 15, 17].

Até aqui a Cosmologia caminhava muito bem, exceto pelo fato de algumas coisas no modelo padrão não funcionarem bem. Primeiramente, não se sabia as origens físicas da matéria e da energia escura. Em segundo lugar, as medidas astronômicas mais precisas da época mostravam que o universo observável era extremamente plano¹, homogêneo e isotrópico² em escalas superiores à 300 Mpc . Além disso, não haviam explicações plausíveis para as anisotropias da RCF. Todas essas características peculiares eram totalmente não intuitivas e desfavoreciam a concepção do *Big Bang*.

¹Um universo espacialmente plano significa que dadas três galáxias muito distantes no universo, a soma dos ângulos internos do triângulo formado por elas é igual à $\pi/2 \text{ rads}$, isto é, a seção espacial é euclidiana. Dito de outra maneira, não há lugares “escondidos” no universo observável.

²Homogeneidade significa que todos os pontos são equivalentes e isotropia implica na ausência de direções privilegiadas à partir de um ponto qualquer no espaço-tempo. Uma consequência disto é que não há centro no universo. Em favor disso, costuma-se dizer que o universo parecerá sempre o mesmo não importa quem você seja ou onde esteja.

Pouco antes disso, em 1981, um cosmólogo americano chamado Allan Guth havia proposto uma teoria para explicar duas das características citadas acima: a planura e a isotropia do universo. Além disso, o mecanismo de Guth explicava também outros enigmas indesejados como, por exemplo, o problema das relíquias cósmicas e a inexistência de monopolos magnéticos. Esta teoria é conhecida como Inflação Cósmica [24].

Só algum tempo depois percebeu-se que as inomogeneidades da RCF podiam ser explicadas a partir da teoria de Guth e este foi o triunfo da Cosmologia inflacionária. Introduzindo-se “*ad hoc*”³ uma fase de expansão acelerada nos primeiros instantes do universo (mantendo intactos os sucessos do HBB), é possível explicar de uma só vez todos os problemas do modelo padrão, com exceção da matéria e da energia escura [6]. O ônus disso é ter que lidar com o complicadíssimo formalismo matemático e conceitos da Física de Partículas, conseqüentemente, da Teoria Quântica de Campos (TQC).

Desde 1981 foram feitos muitos esforços no sentido de aprimorar cada vez mais a inflação primordial de Guth. Em 1982, um novo mecanismo, denominado “*slow-roll*”, foi proposto por Andrei Linde [25] e Andreas Albrecht e Paul Steinhardt [26] com o objetivo de substituir a descrição original de Guth, que apresentava algumas inconsistências físicas e observacionais. A partir daí surgiram diversos modelos inflacionários com a missão única de parametrizar o universo primordial através da sua energia potencial dominante.

Muitos desses modelos consideram que a fase de expansão acelerada, conhecida como inflação cósmica, se deve à densidade de energia do vácuo, ou à um termo cosmológico variável no tempo. Investigando uma particular forma de energia potencial, surgida naturalmente de alguns campos escalares da Física de Partículas, Peebles e Bharat Ratra propuseram um modelo de inflação cujo potencial associado tinha a forma de uma exponencial pura [27]. Este modelo, assim como outros poucos, é especial, pois é motivado diretamente pela Física de Partículas moderna, uma das teorias mais bem testadas da Física e nossa melhor descrição das leis físicas no universo primordial.

Junto à virada século, em 2001, veio a vez da sonda espacial WMAP, sucessora do COBE, entrar em atividade. Densos conjuntos de dados extraídos das missões envolvendo o satélite favoreceram os modelos mais simples de inflação, em especial, os exponenciais e os caracterizados por leis de potências [28, 29, 30, 31].

³ “*Ad hoc*” significa para esta finalidade ou para este efeito.

Em 2007, J. Alcaniz e F. Carvalho propuseram (ver [32]) uma generalização dos modelos de inflação *slow-roll* com energias potenciais exponenciais a partir da estatística de Constantino Tsallis [33]. A associação de uma estatística não extensiva generalizada à distribuição do potencial durante a era inflacionária conduziu os pesquisadores à um novo leque de soluções completamente ignoradas pela abordagem exponencial usual e que são fortemente corroboradas pelos dados observacionais.

Neste sentido, como objeto de investigação para este trabalho de dissertação, nos perguntamos quais seriam as consequências de se utilizar as teorias κ -deformadas, no contexto desenvolvido por Giorgio Kaniadakis [34], para generalizar os modelos de inflação exponenciais usuais citados. A estatística de Kaniadakis tem alguns aspectos que a tornam mais interessante que a de Tsallis: é extensiva, reproduz outras estatísticas conhecidas em limites adequados e tem suas raízes na Relatividade Especial de Einstein [35, 36].

Para tanto, uma preparação do palco onde todo o espetáculo irá acontecer deverá ser providenciada. Iniciamos no Capítulo 2, explanando sobre o modelo cosmológico padrão, sua relação com os dados observacionais e seus principais problemas. Seguindo para o Capítulo 3, apresentamos a teoria linear das perturbações cosmológicas no contexto invariante de *gauge*. No Capítulo 4, abordamos a Teoria Inflacionária, propriamente dita, expondo alguns dos modelos mais relevantes e suas principais previsões, bem como os rigorosos testes observacionais os quais a teoria é submetida regularmente. No Capítulo 5 apresentamos o formalismo de Kaniadakis para, em seguida, aplicá-lo ao universo inflacionário. Assim, fazemos a descrição dos nossos resultados e os confrontamos com os dados observacionais obtidos durante a última missão do satélite Planck, sucessor do WMAP, finalizada em julho de 2018. Finalmente, apresentamos nossas conclusões e perspectivas, fornecemos nossas referências bibliográficas e, por último, disponibilizamos um apêndice prático para o tratamento de algumas funções especiais.

Capítulo 2

Modelo Cosmológico Padrão

2.1 Síntese e Fundamentos

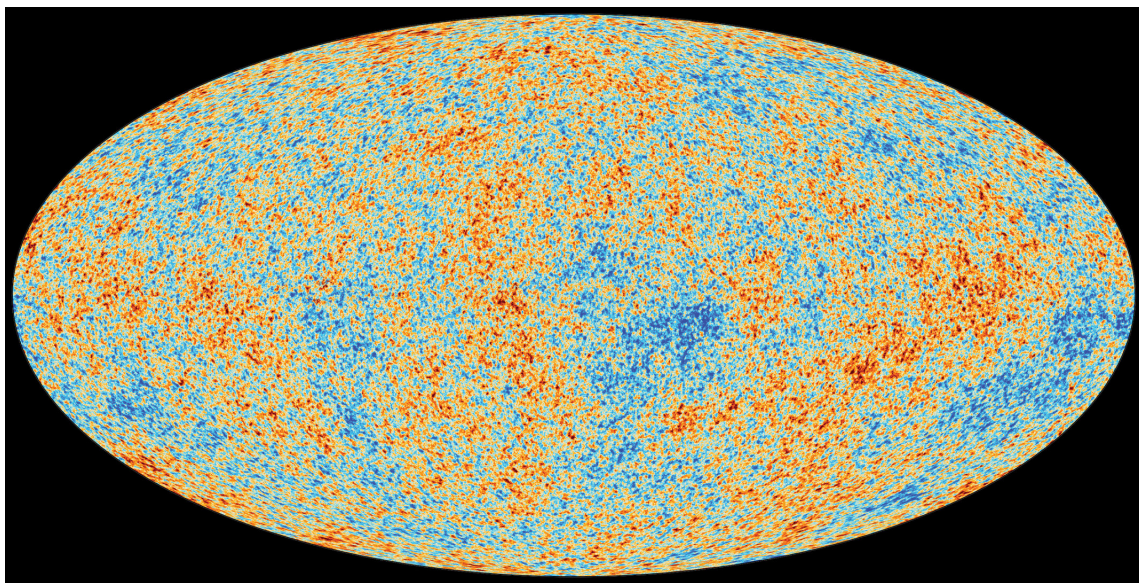
Nossa visão moderna do universo é fundamentada na Cosmologia de *Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker* (FLRW), ou modelo do *Big Bang*, como também é conhecido. Devido ao seu enorme sucesso e poder de predição, tal corpo de conhecimento é tomado como o *Modelo Cosmológico Padrão* (Λ CDM). Com base em sua formulação e consequências, é possível fazer especulações bastante atraentes sobre o universo primordial e conhecer, com clareza, sua evolução a partir dos 10^{-10} primeiros segundos.

A construção deste modelo é baseada no princípio de que em escalas suficientemente grandes o universo é perfeitamente homogêneo e isotrópico, denominado *Princípio Cosmológico* [11], e sustentada por três grandes pilares: a Expansão do Universo [3], que culminou na conjectura do átomo primordial, a Radiação Cósmica de Fundo [10, 12, 13], um fóssil do *Big Bang* que revela características de quando o universo tinha apenas cerca de 300 mil anos de idade, e a Nucleossíntese Primordial [14], que descreve a formação dos elementos mais leves e prevê com excelência suas abundâncias, hoje, no universo [5].

Recentes levantamentos astronômicos envolvendo grandes *redshifts*, tais como o projeto *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS), revelam que o universo é de fato homogêneo e isotrópico em escalas superiores à 300 *Mpc*, porém tomado de grandes inomogeneidades em escalas menores, como galáxias, aglomerados e superaglomerados de galáxias [37]. Por outro lado, medidas das flutuações na RCF (Figura 2.1) mostram que a temperatura

média do universo é da ordem de $2,7\text{ K}$, com pequenos desvios da homogeneidade da ordem de 10^{-5} em sua distribuição [38, 39, 40]. Isso faz com que o princípio cosmológico seja uma imagem muito consistente do universo observável como um todo.

Figura 2.1: O mapa de temperaturas da RCF, criado pelo satélite *Planck*, revela que na última vez em que a radiação foi espalhada pela matéria, evento conhecido como última superfície de espalhamento, o universo era extremamente homogêneo e isotrópico, com pequenas inomogeneidades da ordem de 10^{-5} .



Fonte: ESA/Planck (2018)¹

Além disso, sobre a composição química do universo, essas mesmas observações revelaram estar em total acordo com as previsões feitas a partir da nucleossíntese primordial, isto é, existe matéria bariônica numa proporção de um bárion para cada 10^9 fótons, onde 75% são de hidrogênio, 25% de hélio e alguns vestígios de elementos mais pesados. No entanto, os bárions configuram apenas 5% dos aproximados 30% da densidade total de matéria no universo. Neste caso, a hipótese padrão que se faz é a de que os outros 25% são devidos à uma forma exótica de matéria, denominada *Matéria Escura*, que não interage eletromagneticamente, mas que gravita. Os 70% restantes são devidos à uma componente ainda mais exótica, a qual chamam de *Energia Escura*, que devido à sua pressão negativa acelera a expansão do universo. Isso mostra que aproximadamente 95% do nosso universo observável é ainda um grande e aberto mistério [4, 15].

¹Disponível em <https://www.esa.int>

No contexto da Cosmologia padrão quem desempenha o papel da energia escura é a *Constante Cosmológica* (Λ), frequentemente associada à densidade de energia do vácuo. Mas isso ainda é uma questão em aberto, pois duas áreas extremamente bem desenvolvidas e testadas da Física, a Física das partículas elementares e a Cosmologia, discordam no valor de Λ por uma diferença de até 120 ordens de grandeza, dependendo do modelo cosmológico. Essa grave contradição é conhecida como o problema da constante cosmológica. Uma segunda adversidade envolvendo Λ é o fato de esta componente ter passado a dominar a densidade de energia do universo somente agora. Não está claro o porquê dessa grande coincidência cósmica [4].

2.2 Expansão do Universo

A descoberta de Hubble, em 1929, da expansão do universo via a famosa relação $|\vec{v}| = H_0 |\vec{r}|$, denominada lei de Hubble, onde $|\vec{v}|$ é a magnitude da velocidade de recessão de um objeto distante, $|\vec{r}|$ sua distância até nós e H_0 a constante de Hubble, que mede, sobretudo, a taxa instantânea com a qual o universo se expande, deu início a uma nova era na cosmologia relativística. Seu experimento foi aprimorado e reproduzido inúmeras vezes com o passar do tempo, obtendo-se resultados cada vez mais precisos em virtude do aprimoramento do aparato tecnológico envolvendo as observações, como os telescópios e sondas espaciais.

A taxa de expansão do universo medida pelo próprio Hubble foi de $500 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [3]. Uma medida mais precisa foi realizada apenas em 1958, por Sandage [41], que, em virtude do enorme avanço tecnológico pós Hubble, aferiu o valor $H_0 = 75 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. A mais recente e precisa medida, realizada pela *Planck Collaboration 2018* [40], revela, com uma incerteza de apenas $0,5\sigma$ (meio sigma), que

$$H_0 = 67,4 \pm 0,5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (2.1)$$

Estritamente falando, essa medida significa que, a cada 1 Mpc de distância, os objetos se afastam à uma velocidade de aproximadamente $67,4 \text{ km s}^{-1}$ mais rápidos. Sendo assim, podemos concluir que há uma distância para a qual os objetos excedem a velocidade da luz. Este comprimento é comumente chamado de raio de Hubble. Dedicamos a Seção 2.4 para falar especificamente deste assunto.

Em seguida, muito posteriormente à descoberta de Hubble, estudos envolvendo supernovas-Ia (SN-Ia), realizados em 1998 pelos astrofísicos Saul Permuter [21], Adam Riess [22] e Brian Schmidt [23], mostraram que o universo, na verdade, se expande à uma taxa acelerada, isto é, $H = H(t)$. Essa descoberta teve impacto direto na forma como os cosmólogos viam o universo. Uma de suas principais consequências foi a necessidade de se especular sobre uma possível nova forma de energia capaz de acelerar o universo, pois nenhuma das conhecidas até então era capaz de produzir tal efeito. Como já adiantamos na seção anterior, estamos falando da hipotética energia escura.

2.3 Métrica FLRW

A métrica é o objeto que define as características e propriedades geométricas do ambiente onde ocorrerão os processos físicos de interesse. No caso da Relatividade Geral de Einstein esse ambiente é o espaço-tempo quadridimensional curvo. Genericamente, o intervalo entre dois eventos que acontecem nesta variedade é dado por [42]

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.2)$$

Daqui em diante adotaremos a convenção do somatório de Einstein, onde se omite o símbolo de soma, recorrendo-se ao artifício dos índices repetidos. Tal soma vai de 0 à 3, para letras gregas, e de 1 à 3, para latinas, sendo a quantidade infinitesimal dx^0 reservada para o tempo e as dx^i para as demais coordenadas espaciais.

A métrica que descreve o espaço homogêneo e isotrópico em expansão é a métrica de *Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker* (FLRW), que em unidades planckianas (naturais) é dada por [4, 6, 15]:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (2.3)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala, que mede o “estiramento” do espaço, enquanto que K é o parâmetro que determina a curvatura da seção espacial definida por t constante; quando $K = 0$, o universo é plano, $K = -1$, é hiperbólico e $K = +1$, é esférico.

Do ponto de vista dinâmico, é de suma importância que tenhamos um meio de quantificar a taxa com a qual o espaço se expande, isto é, sua velocidade. Uma quantidade

que surge naturalmente das equações dinâmicas produzidas pela métrica FLRW, e que iremos deduzir em breve, é o parâmetro de Hubble

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (2.4)$$

onde o ponto sobre a variável significa sua derivada em relação ao tempo cósmico, t . Como podemos perceber, H tem dimensão de inverso de tempo. Logo, o seu inverso, H^{-1} , define uma escala de tempo (e também de comprimento) característica do universo. Esta escala é o próprio raio de Hubble, já mencionado anteriormente.

2.4 Tempo Conforme e Horizontes

Em muitas aplicações, como o estudo da propagação da luz, a definição dos horizontes comóveis e a teoria de pequenas perturbações cosmológicas, é mais conveniente reescrevermos a métrica FLRW na forma

$$ds^2 = a^2(\tau) \left(-d\tau^2 + \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (2.5)$$

onde

$$\tau \equiv \int_0^t \frac{dt}{a(t)} \quad (2.6)$$

é denominado tempo Conforme. O tempo conforme pode ser entendido, num universo que tem como origem a singularidade $a(t=0) = 0$, como sendo a distância máxima percorrida pela luz, na ausência de interações, desde $t = 0$ até um tempo t qualquer, por exemplo, hoje [6].

Outra recorrente transformação de coordenadas que se mostra extremamente útil, neste contexto, é tomar $d\chi \equiv dr/\sqrt{1 - Kr^2}$, implicando em

$$r(\chi) = \begin{cases} \sinh \chi, & K = -1; \\ \chi, & K = 0; \\ \sin \chi, & K = +1. \end{cases} \quad (2.7)$$

Em termos de χ , as trajetórias descritas pela luz se tornam bastante simples.

Na relatividade especial, a trajetória de uma partícula sem massa, que se move com velocidade igual à c , é tal que $ds^2 = 0$. Portanto, num espaço-tempo isotrópico, a

propagação radial da luz (i.e., com θ e ϕ fixos) é inteiramente determinada por

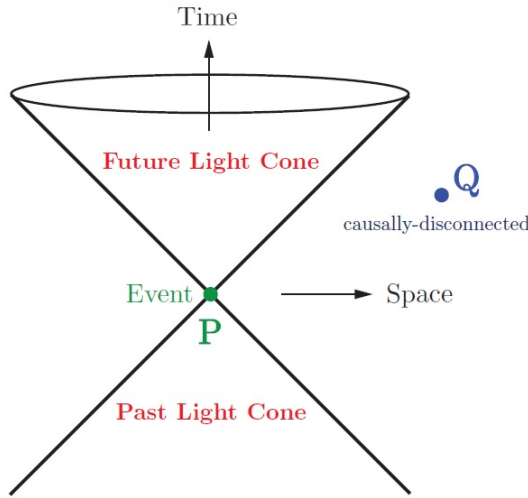
$$d\tau^2 - d\chi^2 = 0, \quad (2.8)$$

cujas soluções são as geodésicas nulas,

$$\chi(\tau) = \pm\tau + \text{const}, \quad (2.9)$$

correspondendo à linhas de mundo em ângulos de $\pm 45^\circ$ no plano τ - χ . Frequentemente, este plano é chamado de cone de luz (Figura 2.2).

Figura 2.2: Cone de luz. A região inferior do interior do cone diz respeito ao passado do evento P, enquanto que a região superior corresponde ao seu futuro. Toda a superfície do cone é restrita à apenas os objetos que caminham com velocidades iguais à c , como a luz na ausência de interações. Isto significa que, assim como o seu próprio passado, um evento Q, fora do cone, está causalmente desconectado e é inacessível à P.



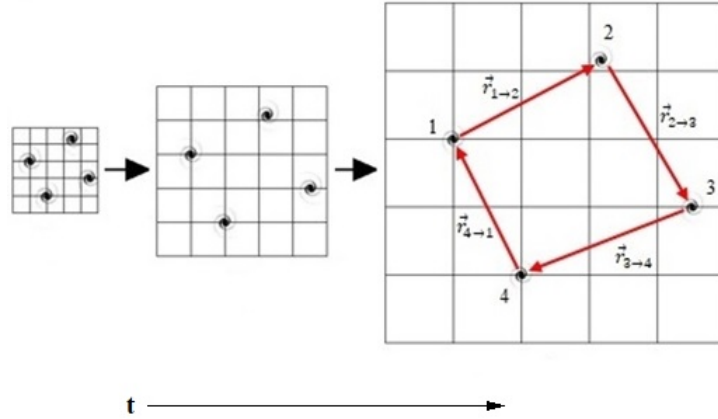
Fonte: Baumann (2012)

Por outro lado, há duas medidas de distância, distintas, num universo FLRW. Uma é a distância comóvel x , fixa, e a outra é a distância física r . Como a expansão é isotrópica, a distância física depende apenas do tempo. Estes dois comprimentos são conectados através da relação [17]

$$\vec{r}(t) = a(t) \vec{x}. \quad (2.10)$$

Para efeitos de visualização, consideremos a Figura 2.3.

Figura 2.3: Distância comóvel e distância física. Representamos a distância comóvel pela grade contendo as galáxias fixadas em suas posições. Conforme o tempo passa, a distância entre as galáxias aumenta (distância física, simbolizada pelos vetores vermelhos), porém elas permanecem em suas posições fixas na grade comóvel. Significa, então, que o espaço entre elas foi que aumentou, enquanto elas permaneciam imóveis.



Fonte: Autor (2020)

Uma distância comóvel muito importante em cosmologia é o comprimento máximo que um fóton pode percorrer, na ausência de interações, durante um intervalo de tempo finito. Como o universo possui idade finita ($t_0 \simeq 13,8 \times 10^9$ anos [38, 39, 40]), um fóton emitido no instante do *Big Bang* só pode ter percorrido uma distância máxima dada por

$$\chi_p(\tau) \equiv \tau - \tau_i = \int_{\tau_i}^{\tau} \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.11)$$

onde τ_i corresponde ao início do universo. Aqui, χ_p é o horizonte de partículas, o qual define um limite de causalidade para a estrutura no universo. Isto significa que, num instante τ , as informações sobre um evento em $\chi > \chi_p(\tau)$ são inacessíveis à um observador localizado em $\chi = 0$. Isto é melhor visualizado a partir do cone de luz (Figura 2.2). Da relação (2.10), deduzimos que o tamanho físico (real) do horizonte de partículas é

$$d_p(t) = a(t) \chi_p. \quad (2.12)$$

O horizonte de partículas não deve ser confundido com o horizonte (ou raio) de Hubble, muito embora, na maior parte da evolução do universo, sejam muito próximos. O horizonte de Hubble, H^{-1} , é a distância máxima percorrida pelas partículas durante aproximadamente o tempo que leva para o universo dobrar de tamanho. Sendo assim, há

uma diferença crucial entre esses dois comprimentos: se num dado instante, t , a distância entre duas ou mais partículas é maior que $\chi_p(t)$, então essas partículas nunca estiveram em contato causal. Por outro lado, se a distância entre elas for maior que $H^{-1}(t)$, significa que não estão se comunicando no exato momento. Mais do que isso, partículas cujas distâncias até nós sejam maiores que o raio de Hubble se movem com velocidades superiores à c . Portanto, a física que conhecemos não se aplica à distâncias maiores que H^{-1} .

Em todo caso, tanto o horizonte de partículas quanto o raio de Hubble crescem com o tempo. No âmbito da Cosmologia padrão, eles possuem tamanhos finitos e diferem por um fator numérico bem pequeno. Consequentemente, as expressões horizonte e raio de Hubble podem ser utilizadas como sinônimas. Além disso, se uma escala de comprimento k^{-1} encontra-se dentro ou fora do raio de Hubble, teremos a seguinte regra:

$$\frac{k}{aH} \begin{cases} \ll 1, & \implies \text{Escala super-Hubble;} \\ \gg 1, & \implies \text{Escala sub-Hubble,} \end{cases} \quad (2.13)$$

onde k é o número de onda associado à escala. Como $d_p \sim t$ e $H \sim t^{-1}$, é verdade o seguinte raciocínio, $2\pi/kd_p \sim H/k$, sustentando a afirmação de que $d_p(t) \sim H^{-1}(t)$, na Cosmologia padrão. Por este motivo, é bastante comum associar ambos os horizontes ao mesmo conceito. Entretanto, como veremos adiante na teoria inflacionária, esses dois comprimentos podem ser radicalmente diferentes.

2.5 *Redshift* Cosmológico

Toda a base da descoberta da expansão do universo, e portanto da lei de Hubble em si, é fundamentada principalmente no efeito *Doppler* sofrido pela luz, cuja fonte de emissão se encontra em movimento relativo à um determinado observador. Sucintamente, é uma medida adimensional do desvio para o vermelho que um determinado espectro luminoso sofre em decorrência da expansão métrica do espaço.

Suponhamos uma fonte situada na posição $\vec{r}_1(t)$ em relação à um observador em $\vec{r}(t) = 0$. Sabemos que fótons descrevem geodésicas nulas, isto é, $ds^2 = 0$. Sendo assim, num universo FLRW, onde a propagação da luz é radial ($d\theta = d\phi = 0$), o tempo que leva para um feixe luminoso emitido em $\vec{r}_1(t_1)$ alcançar o observador em $\vec{r}(t_0) = \vec{0}$ é

$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}, \quad (2.14)$$

onde $\Delta\tau \equiv \tau_0 - \tau_1$ e $r \equiv |\vec{r}|$. Diferenciando esta relação, temos que o lado direito da segunda igualdade desaparece e, conseqüentemente, para sinais luminosos sucessivos dessa fonte, com intervalos de tempo δt entre um e outro, teremos:

$$\frac{\delta t_1}{a(t_1)} = \frac{\delta t_0}{a(t_0)}. \quad (2.15)$$

Em termos da frequência, $\nu \equiv \delta t^{-1}$, isto implica em

$$\frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{a(t_1)}{a(t_0)}, \quad (2.16)$$

onde ν_1 é a frequência de emissão da fonte e ν_0 é a frequência medida pelo observador. Assim, o *redshift* Z é definido de tal maneira que

$$1 + Z \equiv \frac{\nu_1}{\nu_0} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} \quad (2.17)$$

Conclui-se assim que, num universo em expansão, $\nu \propto a^{-1}(t)$. Sabemos da relação de Planck para a radiação que a energia, $\mathcal{E}$, de um fóton é proporcional à sua frequência, ν , de oscilação. Logo, é possível concluir que $\mathcal{E} \propto a^{-1}$. Isto significa que, conforme o universo se expande, o comprimento de onda da radiação é “esticado” e os fótons que o atravessam incessantemente perdem energia. A consequência mais imediata disto é que o espectro eletromagnético observado de luzes emitidas por galáxias distantes apresentarão, todas, um “desvio para o vermelho”, mensurado por Z .

2.6 Dinâmica

Agora mostraremos de que forma todos esses ingredientes físicos são integrados para compor uma única descrição dinâmica, coerente, do universo em larga escala. Para tanto, consideraremos a métrica FLRW, que traduz a isotropia do universo observável para a linguagem formal da TRG, e a hidrodinâmica relativística dos fluidos. A TRG de Einstein nos diz, acima de tudo, de que maneira a geometria do espaço-tempo está ligada ao conteúdo energético do universo, através das equações de campo

$$G^\mu_\nu \equiv R^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu R = 8\pi G T^\mu_\nu, \quad (2.18)$$

onde $G^\mu_\nu \equiv g^{\mu\alpha}G_{\alpha\nu}$ é o tensor de Einstein, $R_{\mu\nu}$ o tensor de Ricci, $R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ o escalar de curvatura e $\delta^\mu_\nu \equiv g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu}$ o tensor de Kronecker. Do lado direito, G é constante universal da gravitação e $T^\mu_\nu \equiv g^{\mu\alpha}T_{\alpha\nu}$ é o tensor energia-momento [42].

Para que as equações de Einstein sejam identicamente satisfeitas, a inspeção da métrica isotrópica (2.5) determina que o conteúdo energético do universo seja descrito por um fluido perfeito², cujo tensor energia-momento é dado por [4, 6, 15]

$$T_{\nu}^{\mu} = (\rho + p)u^{\mu}u_{\nu} + p\delta_{\nu}^{\mu}. \quad (2.19)$$

Aqui, ρ é a distribuição uniforme de densidade, p a pressão isotrópica do fluido e u^{μ} o campo de 4-velocidades. Num referencial comóvel, i.e., em queda livre com relação ao fluido, temos que $u^{\mu} = (a^{-1}, 0, 0, 0)$ e o tensor energia-momento adquire a forma

$$T_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} -\rho(\tau) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p(\tau) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p(\tau) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p(\tau) \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Assim, as equações de movimento (no tempo conforme) resultantes deste procedimento, caracterizando a dinâmica do universo FLRW, são: a equação de Friedmann,

$$\mathcal{H}^2 + K = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2, \quad (2.21)$$

e a equação da aceleração,

$$\mathcal{H}' = -\frac{4\pi G a^2}{3}(\rho + 3p), \quad (2.22)$$

onde $\mathcal{H} \equiv a'/a$ e uma linha sobre a variável significa sua derivada com respeito ao tempo conforme, τ . Aqui, vemos porque a componente responsável pela aceleração do universo deve ter pressão negativa; para que (2.22) resulte em $\mathcal{H}' > 0$, é necessário que $\rho + 3p < 0$. Como ρ é fisicamente uma quantidade positiva, então nos resta que a pressão é quem deve ser negativa. Felizmente, pressões negativas são bem conhecidas da TQC, ou Física moderna de partículas.

Para completar nossa descrição, precisamos determinar a forma de $\rho = \rho(\tau)$ nas equações acima. A aplicação do princípio de conservação da energia em sua forma covariante, $\nabla_{\mu}T^{\mu 0} = 0$, fornece a chamada equação do fluido,

$$\rho' + 3\mathcal{H}(\rho + p) = 0, \quad (2.23)$$

²Um fluido perfeito é aquele que pode ser caracterizado completamente conhecendo-se apenas seu campo de densidades ρ (ou equivalentemente de pressão p) e seu campo de 4-velocidades u^{μ} .

onde o ponto e vírgula significa tomar a derivada covariante com respeito às coordenadas x^μ do espaço-tempo relativístico. Se tivéssemos usado (2.3) em vez de (2.5), teríamos obtido no lugar de (2.23)

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (2.24)$$

onde, mais uma vez, um ponto sobre a variável significa sua derivada com respeito ao tempo cósmico t . É fácil perceber que o parâmetro de Hubble conforme, $\mathcal{H}$, vale $aH = \dot{a}$.

Sabemos que o universo é preenchido por diferentes tipos de materiais, a saber, radiação, matéria não relativística, matéria escura e também alguma forma de energia do vácuo, ou constante cosmológica. Isso faz com que tenhamos

$$\rho \equiv \sum_I \rho_I \quad e \quad p \equiv \sum_I p_I, \quad (2.25)$$

com o subíndice I denotando o tipo de material. Cada uma destas componentes se conserva separadamente tendo, portanto, uma equação do fluido para cada [4]. De posse disto e da equação de estado $p_I = w_I \rho_I$, com o parâmetro de estado $w_I = \frac{1}{3}, 0, -1$ para radiação (r), matéria (m) e energia do vácuo (Λ), respectivamente, a integração de (2.23) nos leva às seguintes leis de evolução para as densidades de energia destes materiais:

$$\begin{aligned} \rho_r &\propto a^{-4}, \\ \rho_m &\propto a^{-3}, \\ \rho_\Lambda &= \Lambda/8\pi G. \end{aligned} \quad (2.26)$$

O fato de ρ_r cair por um fator de a mais rapidamente que ρ_m é facilmente entendido se retornarmos à seção sobre o *redshift* luminoso. Vê-se que além de diminuir com o aumento do volume a^3 (igualmente à matéria), a densidade de energia da radiação cai também devido à uma diminuição efetiva do seu momento, $\hbar k$.

Para deduzirmos a forma final de $a(\tau)$ precisamos considerar, primeiramente, cada um dos casos acima, separadamente, e integrar a equação da aceleração (2.22). Num universo dominado por radiação, isto é, $\rho \propto a^{-4}$, teremos:

$$a(\tau) = a_r \begin{cases} \sinh \tau, & K = -1; \\ \tau, & K = 0; \\ \sin \tau, & K = +1, \end{cases} \quad (2.27)$$

e no caso de um universo dominado por matéria, $\rho \propto a^{-3}$:

$$a(\tau) = a_m \begin{cases} (\cosh \tau - 1), & K = -1; \\ \frac{1}{2}\tau^2, & K = 0; \\ (1 - \cosh \tau), & K = +1. \end{cases} \quad (2.28)$$

Aqui, a_r e a_m são constantes de integração. As outras foram configuradas exigindo-se que $a(\tau = 0) = 0$. Isto significa que, num universo plano ($K = 0$), $a \propto \sqrt{t}$, no domínio da radiação e $a \propto t^{\frac{2}{3}}$, no domínio da matéria.

No caso de termos um universo dominado por Λ , significa que a sua densidade de energia permanece aproximadamente constante no tempo, valendo ρ_Λ , conforme deduzido em (2.26). A evolução do fator de escala é melhor determinada, neste caso, utilizando-se o tempo cósmico t . Desta forma, teremos:

$$a(t) = \begin{cases} \sqrt{3/\Lambda} \sinh(\sqrt{\Lambda/3} t), & K = -1; \\ a_0 \exp(\sqrt{\Lambda/3} t), & K = 0; \\ \sqrt{3/\Lambda} \cosh(\sqrt{\Lambda/3} t), & K = +1. \end{cases} \quad (2.29)$$

Aqui, o mais importante é notar que no caso de $K = 0$, o fator de escala evolui exponencialmente ($a \propto \exp Ht$) e isso será de suma importância para o cenário inflacionário.

Uma solução interessante a ser discutida, nesse contexto, é a obtida para o caso de termos duas componentes importantes, ao mesmo tempo, como é o caso da equipartição matéria-radiação, ocorrida em $Z \sim 3400$ [4, 5, 6, 15, 17]. Considerando-se matéria e radiação, concomitantemente, pode-se deduzir que:

$$\rho = \rho_r + \rho_m = \frac{1}{2}\rho_{eq} \left[\left(\frac{a_{eq}}{a} \right)^3 + \left(\frac{a_{eq}}{a} \right)^4 \right] \quad e \quad p = p_r = \frac{1}{3}\rho_r, \quad (2.30)$$

onde ρ_{eq} e a_{eq} são a densidade e o fator de escala, respectivamente, na equipartição da energia, ou seja, quando $\rho_r = \rho_m$. Agora, integrando novamente (2.22), obtemos a seguinte dependência temporal para o fator de escala:

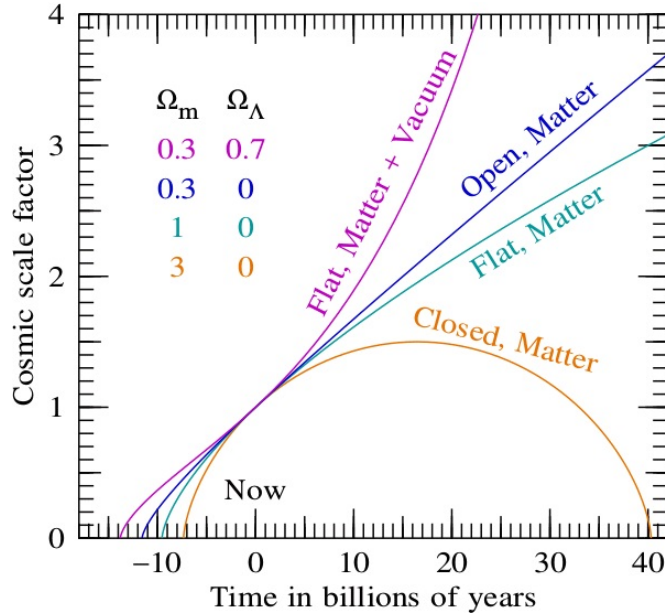
$$a(\tau) = \begin{cases} (2a_{eq}/\tau_{eq}^2) (\tau_{eq} \sinh \tau + \cosh \tau - 1), & K = -1; \\ a_{eq} [2(\tau/\tau_{eq}) + (\tau/\tau_{eq})^2], & K = 0; \\ (2a_{eq}/\tau_{eq}^2) (1 - \cos \tau + \tau_{eq} \sin \tau), & K = +1, \end{cases} \quad (2.31)$$

onde $\tau_{eq} \equiv \sqrt{3a_{eq}^2/2\pi G\rho_r a^4}$ é o tempo conforme na equipartição matéria-radiação [43].

Condizente com o que é esperado, em $\tau \ll \tau_{eq}$ a radiação é dominante e recaímos em (2.27). Conforme o universo se expande, a densidade total de radiação cai mais

rapidamente que a de matéria e em $\tau \gg \tau_{eq}$, a matéria é dominante, recobrando assim (2.28). Na Figura 2.4, apresentamos as evoluções de $a(\tau)$ segundo alguns modelos.

Figura 2.4: Evolução do fator de escala. Em lilás, temos o universo Λ CDM plano.



Fonte: Universidade do Colorado (2018)³

Para K arbitrário, temos uma mistura de matéria, radiação e energia do vácuo, com uma mais importante que as outras em determinados períodos do universo. Nesse sentido, (2.25) pode ser escrita como

$$\rho = \frac{3\mathcal{H}_0^2}{8\pi G a_0^2} \left[\Omega_m \left(\frac{a_0^3}{a} \right) + \Omega_r \left(\frac{a_0^4}{a} \right) + \Omega_\Lambda \right], \quad (2.32)$$

onde $\Omega_i \equiv \rho_i(\tau_0) / \rho_{crit.}(\tau_0)$ são os parâmetros de densidade medidos hoje e definidos em termos da densidade crítica, $\rho_{crit.} \equiv 3\mathcal{H}^2 / 8\pi G a^2$. Desta forma, temos que

$$\Omega + \Omega_K = 1, \quad (2.33)$$

onde $\Omega \equiv \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda$ e $\Omega_K \equiv -K/\mathcal{H}_0^2$ é a densidade total de curvatura. Logo,

$$\Omega(\tau) \begin{cases} > 1, & K = -1; \\ = 1, & K = 0; \\ < 1, & K = +1. \end{cases} \quad (2.34)$$

Veremos ainda neste capítulo que o caso especial $\Omega(\tau) = 1$ configura o que intendemos por ser um enigma do HBB, conhecido como o problema da planura, que diz

³Disponível em <https://jila.colorado.edu>

respeitos às condições iniciais a partir das quais o nosso universo começou a evoluir [6]. Essa foi uma das motivações originais de Guth que o levou à hipótese inflacionária.

Ainda nesse cenário, utilizando-se a densidade total de energia (2.32) e a definição de Ω_K , a equação de Friedmann (2.21) pode ser reescrita na forma

$$d\tau = \frac{dy}{\mathcal{H}_0 \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_K y^{-2} + \Omega_m y^{-3} \Omega_r y^{-4}}}, \quad (2.35)$$

onde $y \equiv a/a_0$. Esta equação pode facilmente ser convertida para o tempo cósmico, uma vez que $d\tau \equiv dt/a$ e, conseqüentemente, $\mathcal{H} = aH$. Sob essas circunstâncias, uma integração de (2.35) fornecerá

$$t = \frac{1}{H_0} \int_0^{a/a_0} \frac{dx}{x \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_K x^{-2} + \Omega_m x^{-3} \Omega_r x^{-4}}}. \quad (2.36)$$

Em particular, para $a = a(t_0) \equiv a_0$, teremos a idade presente do universo, t_0 . No caso do universo ser plano e preenchido por matéria, radiação e constante cosmológica, essa idade é dada por

$$H_0 t_0 = \frac{2}{3\sqrt{1-\Omega_0}} \ln \left[\frac{1 + \sqrt{1-\Omega_0}}{\sqrt{\Omega_0}} \right], \quad (2.37)$$

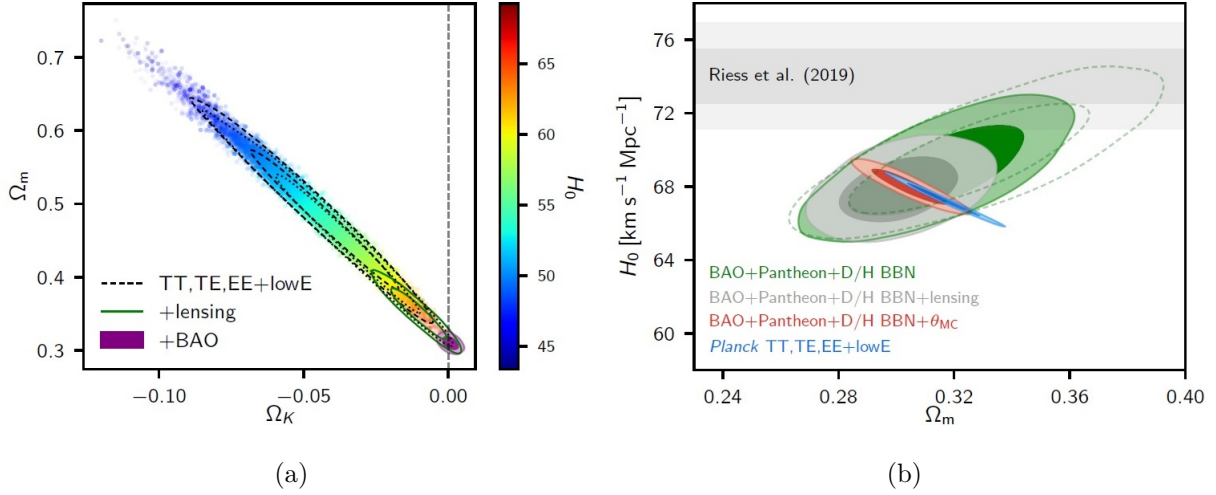
onde $\Omega_0 \equiv \Omega(t_0)$ é a sua densidade total de energia medida hoje. Essa equação sugere que $t_0 = \text{“const”} \times H_0^{-1}$, confirmando que $H^{-1}(t)$ é, de fato, a escala de tempo característica do universo. Por fim, substituindo as nossas melhores medidas de H_0 e Ω_0 , obtemos uma idade de quase 14 bilhões de anos, o que está em total acordo com outras medidas feitas através de outros métodos [4, 5, 17].

2.7 Vínculos Observacionais

Observações da RCF (ou CMB, em inglês) realizadas pelo satélite *Planck*, em 2018, e das oscilações acústicas de bárions (BAO) revelam que o universo é extremamente plano, com cerca de 31,5% de matéria não relativística e taxa de expansão $H_0 = 67,4 \pm 0,5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (Figura 2.5). Além disso, a restrição na densidade de matéria impõe que cerca de 68,5% do universo, hoje, é preenchido pela constante cosmológica.

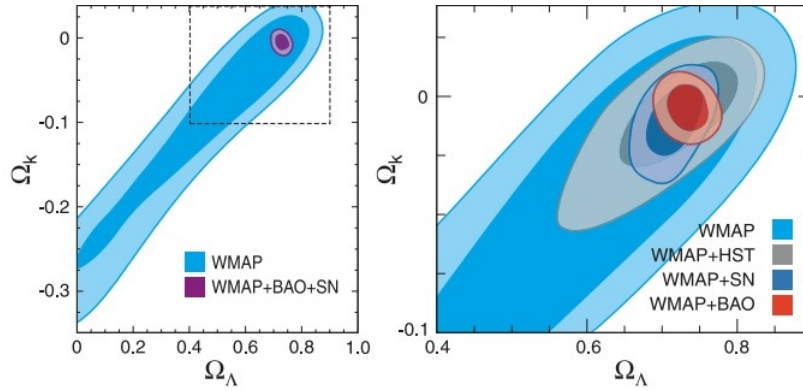
Não é novidade desde o lançamento e tratamento dos dados da sonda espacial WMAP, um pouco antes do advento do satélite *Planck*, que cerca de 70% do universo

Figura 2.5: A combinação dos dados CMB, BAO, *Pantheon* e D/H BBN, em 2.6(a), apontam para um universo plano ($\Omega_K = 0,0007 \pm 0,0019$), com uma precisão de 1σ . Já em 2.6(b), sugerem que $H_0 = 67,4 \pm 0,5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ e $\Omega_m = 0,315 \pm 0,007$. Os contornos contêm 68% e 95% de probabilidade.



Fonte: Aghanim et al. (2018)

Figura 2.6: A combinação das observações da CMB e da estrutura em larga escala (LSS) apontam para um universo plano, dominado pela constante cosmológica.



Fonte: Komatsu et al (2009)

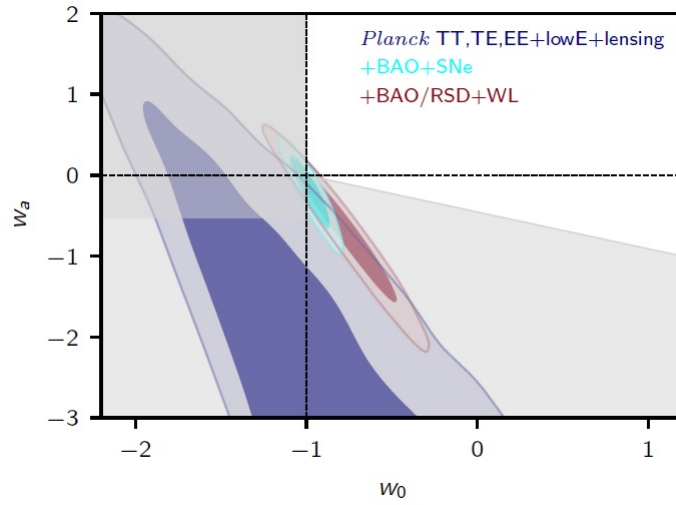
observável é preenchido por Λ . Os dados do WMAP impuseram, em 2008, uma restrição sobre a densidade de energia do vácuo de $\Omega_\Lambda = 0,726 \pm 0,015$ (ver Figura 2.6).

Por outro lado, se a energia escura é um fluido dinâmico genérico, então o seu parâmetro de estado w , em geral, será dependente do tempo. Logo, para testar equações de estado variáveis no tempo, é comum adotar-se a forma funcional

$$w(a) = w_0 + (1 - a)w_a, \quad (2.38)$$

onde w_0 e w_a são constantes. Esta forma de expressar w é chamada de parametrização pós-Friedmann (PPF), com o Λ CDM correspondendo à $w_a = 0$ e $w_0 = -1$. Combinando isto aos dados, constatamos que a energia escura corresponde à constante cosmológica, ou densidade de energia do vácuo, com $w \simeq -1$ (Figura 2.7).

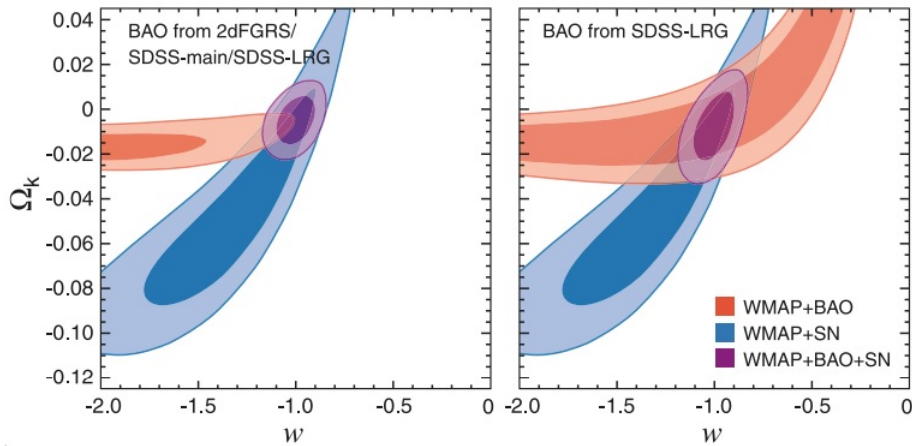
Figura 2.7: A distribuição marginalizada de w_a e w_0 para combinações de dados *Planck*, BAO, SNe, RSD, *lensing* e WL é totalmente compatível para com o modelo Λ CDM.



Fonte: Aghanim et al. (2018)

Novamente, os dados do *Planck* à respeito da natureza da energia escura estão em total acordo com os obtidos anteriormente pelo satélite WMAP (Figura 2.8).

Figura 2.8: Restrição do parâmetro de estado da energia escura ($w \simeq -1$) corroborando com a hipótese da constante cosmológica do modelo padrão Λ CDM.



Fonte: Komatsu et al (2009)

Como é possível constatar, a combinação das mais atuais e refinadas observações, realizadas no âmbito da cosmologia, convergem para as previsões teóricas do modelo padrão Λ CDM. Em suma, podemos dizer que o universo observável é espacialmente plano ($K = 0$), composto de aproximadamente 5% de bárions, donde 3/4 são constituídos de hidrogênio, 1/4 de hélio e quase nada de elementos mais pesados, 26% de matéria escura fria, não-bariônica, e 69% de constante cosmológica. Além disso, tem uma temperatura média atual de aproximadamente $2,73\text{ K}$, com pequenas flutuações de 1 parte em 10^5 , e encontra-se num regime de expansão acelerada à uma taxa presente de aproximadamente $H_0 = 67,4\text{ km s}^{-1}\text{ Mpc}^{-1}$.

2.8 Enigmas do *Big Bang*

2.8.1 Problema das Condições Iniciais

O instrumental proporcionado pela teoria do *Big Bang* é suficiente para explicarmos tudo que observamos hoje no universo? Enquanto legítima teoria científica, a Cosmologia FLRW procura descrever a evolução do universo a partir de um conjunto independente de condições iniciais supostamente conhecidas. No entanto, se essas condições fazem parte ou não da teoria física, é uma questão filosófica. O fato é que a alta homogeneidade e isotropia presentes no universo em larga escala só fazem sentido se considerarmos que o mesmo evoluiu a partir de uma configuração inicial especial e bem ajustada. Não obstante, a premissa de que o universo é um grande e improvável acidente cósmico provoca um certo desconforto na maioria dos cientistas e filósofos do mundo todo.

Para começar, existem dois conjuntos de condições iniciais independentes que caracterizam o material no universo: (i) sua distribuição espacial, expressa através da função densidade de energia $\rho(\vec{x})$, e (ii) o campo inicial de velocidades $u^i(\vec{x})$, onde $\vec{x}$ é a posição em coordenadas arbitrárias.

Há fortes indícios, tanto no campo teórico quanto no observacional, de que as inhomogeneidades observadas hoje na RCF eram muito menores no passado. Entretanto, como veremos mais adiante, regiões do céu com separações angulares superiores à 1° nunca estiveram em contato causal, havendo, portanto, cerca de 10^4 regiões desconectadas

causalmente. Como é possível que todos esses setores do universo, sem nenhuma ligação causal, possuam exatamente as mesmas características físicas? Este enigma do HBB, relacionado à homogeneidade primordial do universo, é conhecido também como problema do horizonte [6].

Por outro lado, para que a distribuição do material no universo permaneça uniforme tardiamente, as velocidades iniciais em cada ponto do fluido devem assumir valores bem específicos. Considerando-se isto em conjunto ao problema do horizonte, em que um número muito grande de regiões do céu nunca estiveram em contato causal, o ajuste das velocidades iniciais torna-se ainda mais dramático. Como a energia cinética das partículas está diretamente relacionada com a curvatura espacial do universo via [17]

$$K = -\frac{2U}{m(\vec{x} \cdot \vec{x})}, \quad (2.39)$$

onde U é a energia total e m a massa do fluido, ambas conservadas, a especificidade de $u^i(\vec{x})$ inicial é refletida na curvatura primordial do universo. Por esse motivo, o enigma das velocidades iniciais é também conhecido como o problema da planura [6].

2.8.2 Problema do Horizonte

O problema do horizonte surge, então, ao calcularmos o tamanho do horizonte de partículas na recombinação do hidrogênio ($a_{rec} = 10^{-3}$) e constataremos que ele corresponde a uma porção muito pequena do céu da RCF.

O tamanho do horizonte de partículas em qualquer época do universo é dado pela expressão (2.12). Próximo desta época, o universo continha uma quantidade considerável de matéria e radiação, porém Ω_Λ desprezível. Num universo euclidiano ($K = 0$), isto equivale a

$$d_p = a(t) \int_0^t \frac{dt}{a(t)} = \frac{2a}{H_0 \Omega_m} \left(\sqrt{\Omega_m a + \Omega_r} - \sqrt{\Omega_r} \right), \quad (2.40)$$

onde consideramos $t_i = 0$, significando que o universo teve origem numa singularidade $a(t=0) = 0$. Por outro lado, o *lookback horizon* $d_A(t)$, tamanho do horizonte calculado a partir de hoje até um tempo t no passado, é dado por

$$d_A = a(t) \int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \frac{2a}{H_0 \Omega_m} \left(\sqrt{\Omega_m + \Omega_r} - \sqrt{\Omega_m a + \Omega_r} \right). \quad (2.41)$$

A razão $d_p(t)/d_A(t)$ fornece o raio angular do horizonte de partículas em t . Na recombinação, então, isso dá

$$\frac{d_p}{d_A}(a = a_{rec}) = 0,018, \quad (2.42)$$

que corresponde à uma separação angular de aproximadamente 1° no céu da RCF. Portanto, regiões do céu com separações angulares superiores a isto não estavam em contato causal na época da recombinação. Sendo assim, há um total de $4\pi/(0,018)^2 \approx 10^4$ regiões causalmente desconectadas no céu.

2.8.3 Problema da Planura

O problema da planura pode ser explorado a partir da equação de Friedmann para o parâmetro de curvatura, deduzida anteriormente (Seção 2.6). Relembrando a definição de Ω_K , a equação (2.33) pode ser reescrita, para um tempo t qualquer, como sendo

$$\Omega(t) - 1 = \frac{K}{a^2 H^2}. \quad (2.43)$$

Ao que as observações indicam (Seção 2.7), a geometria do universo, hoje, está muito próxima da ser plana. Isto implica em $\Omega(t_0) \approx 1$, na equação acima. Por outro lado, com base na cosmologia padrão do HBB, o raio comóvel de Hubble $(aH)^{-1}$ é uma função monotonicamente crescente do tempo, significando que o termo $|\Omega(t) - 1|$ deve divergir com o tempo. Consequentemente, $\Omega(t_0) = 1$ em (2.43) é uma situação instável para o universo. Dessa forma, para que possamos ter um parâmetro de densidade tão próximo da unidade hoje é necessário que o mesmo tenha sido ainda mais próximo de um no passado. Estritamente falando, devemos ter:

$$\begin{aligned} |\Omega(t_{BBN}) - 1| &\leq \mathcal{O}(10^{-16}), \\ |\Omega(t_{GUT}) - 1| &\leq \mathcal{O}(10^{-55}), \\ |\Omega(t_{Pl}) - 1| &\leq \mathcal{O}(10^{-61}). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Isto significa que na época da nucleossíntese primordial, que é uma fase bem conhecida da cosmologia, por exemplo, qualquer valor de $|\Omega(t_{BBN}) - 1|$ fora do intervalo determinado em (2.44), levaria o universo a ser totalmente diferente do que temos hoje. O mesmo se aplica à era das GUT's e ao tempo de *Planck* e suas respectivas escalas de curvatura.

2.8.4 Problema do Monopolo Magnético

Outro enigma à cerca da Cosmologia padrão surge da combinação do modelo do *Big Bang* com as ideias modernas da Física de partículas. As simetrias da natureza desempenham um papel crucial na unificação das interações fundamentais. Neste sentido, um dos conceitos mais importantes da Física moderna de partículas, ou Teoria Quântica de Campos, é o da quebra espontânea de simetria, isto é, a ideia de que à temperaturas extremamente altas, simetrias que encontram-se hoje quebradas são restauradas [5].

Como veremos na próxima seção, o universo primordial passou por diversas transições de fases ao longo de sua evolução térmica e estas quebras espontâneas de simetria foram fundamentais na sua condução até aqui. Entretanto, devido à este fenômeno, o universo presente deveria estar repleto de relíquias cósmicas com densidades grandes o suficiente para serem detectadas. Uma dessas relíquias é o chamado monopolo magnético – equivalente magnético da carga elétrica – e sua ausência, hoje, representa um desafio tanto para a Cosmologia padrão quanto para a Física moderna de partículas [4].

De acordo com muitas teorias físicas sobre o assunto, as quebras espontâneas de simetria geram, através de um processo conhecido como mecanismo de Kibble [44], o que se chama de defeitos topológicos. Tais configurações do vácuo quântico são estáveis, dividindo-se em três categorias: bidimensionais, conhecidas como paredes de domínio; unidimensionais, denominadas cordas cósmicas; e/ou pontuais, chamadas de monopolos. Também podem existir configurações híbridas de duas ou mais categorias citadas acima. Além disso, podem haver configurações clássicas não topológicas – os chamados sólitons não topológicos – e serem estáveis por razões dinâmicas [5].

O cerne da questão é que a produção de tais monopolos magnéticos (além de muitas outras partículas relíquias) no universo primordial é inevitável, do ponto de vista destas teorias – as chamadas GUT's (Grand Unified Theories). Estima-se que a escala de energia por trás da grande unificação esteja em torno de 10^{16} GeV, em comparação ao desprezível 1 GeV da energia de repouso do próton, partícula entre as mais massivas [17]. Se os monopolos magnéticos eram tão massivos e abundantes nos primeiros instantes do universo, por que não é possível observá-los hoje?

2.9 História Térmica do Universo

O modelo padrão da Cosmologia sugere que o universo surgiu à partir de uma singularidade inicial, isto é, uma região infinitamente pequena, densa e quente do espaço-tempo, comportando todos os constituintes fundamentais da matéria, hoje conhecidos como partículas elementares. Entre elas, as mais familiares: fótons, elétrons, três gerações de neutrinos, seis quarks e o popular bóson de Higgs, responsável por atribuir massa à maioria das partículas concebidas pelo modelo padrão. À medida que o volume aumentou, o universo se tornou cada vez menos denso e quente, dando origem aos processos físicos essenciais que nos trouxeram até aqui.

Para um entendimento explícito, detalhado, das características e processos que deram origem ao universo observado é fundamental investigar-se o comportamento de duas quantidades físicas ao longo de sua evolução: a taxa de Hubble, $H(t)$, e a taxa de interação entre as partículas, $\Gamma(t)$. Em suma, se a taxa de interação entre as partículas for maior que a taxa de Hubble ($\Gamma \gg H$), então as interações naquela época ocorreram com muita frequência, podendo serem desprezados os efeitos da expansão. Desta forma, o contato frequente entre as partículas estabelece rapidamente o equilíbrio térmico no universo. Todavia, se a taxa de Hubble for mais importante ($\Gamma \ll H$), as raras interações não são suficientes para estabelecer o equilíbrio térmico entre as partículas e estas desacoplam-se do resto do universo. Em geral, $\Gamma; H \propto T^P$, onde P é um número real.

2.9.1 Equilíbrio Térmico Local

Há diversas razões pelas quais acredita-se que o universo primordial esteve em equilíbrio termodinâmico local quase perfeito, embora tenham sido os desvios desse equilíbrio os principais responsáveis pela abundância de muitas partículas maciças, bem como pela formação da RCF e dos elementos químicos leves da BBN que se observam hoje [5, 45].

No universo primitivo as partículas eram ultra-relativísticas, formando uma espécie de sopa primordial, e suas taxas de interações eram muito maiores que a taxa de expansão de Hubble. Pode-se demonstrar que [45]

$$\frac{\Gamma}{H} \sim \frac{10^{16} \text{ GeV}}{T}. \quad (2.45)$$

Para $10^{16} \text{ GeV} \gtrsim T > 100 \text{ GeV}$, a condição acima é satisfeita e todas as partículas do

modelo padrão encontravam-se em equilíbrio térmico, portanto distribuídas conforme

$$f(\mathcal{E}) \rightarrow \frac{1}{\exp\left(\frac{\mathcal{E}}{T}\right) \pm 1}, \quad (2.46)$$

onde o sinal “+” se refere aos férmions e o “−” aos bósons. Após a temperatura cair abaixo da massa de algumas partículas ($T \ll m$), estas se tornaram não relativísticas e sua distribuição foi suprimida exponencialmente ($f \rightarrow e^{-m/T}$), significando que o plasma primordial foi completamente dominado pela densidade de energia da radiação [45].

2.9.2 Desacoplamento e *Freeze-Out*

Se o equilíbrio térmico tivesse persistido até hoje, o universo seria basicamente composto de fótons. Acontece que a Física moderna de partículas prevê uma quebra espontânea de simetria à uma temperatura da ordem de 100 GeV para a interação eletrofraca. Abaixo dessa escala de energia os bósons mediadores da interação fraca adquirem massa e, conseqüentemente, a taxa de interação das partículas com o plasma cai para [45]

$$\frac{\Gamma}{H} \sim \left(\frac{T}{1 \text{ MeV}}\right)^3. \quad (2.47)$$

Quando a condição $\Gamma \sim T$ é atingida, isto é, em $T \sim 1 \text{ MeV}$, essas partículas param de interagir com o plasma (desacoplam-se) e acontece o *freeze-out*, ou seja, o congelamento da abundância dessas partículas. Esta condição é diferente para os diferentes tipos de partículas, isto é, partículas diferentes desacoplam-se à temperaturas diferentes e, portanto, à épocas diferentes. A matéria escura, por interagir muito fracamente com os bárions, supõe-se que tenha se desacoplado suficientemente cedo na história do universo. Como os neutrinos interagem com o restante do plasma primordial via interação fraca, significa então que eles se desacoplaram em $T \sim 1 \text{ MeV}$ [46].

2.9.3 Principais Eventos no Universo

A partir do desenvolvimento acima, com base na Cosmologia moderna padrão e de um conhecimento mínimo do modelo padrão da Física de partículas, é possível se estabelecer um panorama bastante plausível da evolução térmica do universo. A tabela 2.1 resume os principais eventos na história do universo em ordem cronológica [4, 5, 6, 45, 46].

Tabela 2.1: Principais eventos na história do universo.

Evento	Temperatura	Redshift	Idade
Big Bang	?	∞	0 s
Época de Planck	$\sim 10^{32} K$	$\sim 10^{32}$	$\sim 10^{-43} s$
GUT's/Inflação	$\gtrsim 10^{27} K$	$\sim 10^{26}$	$\gtrsim 10^{-34} s$
Unificação eletro-frac/Bariogênese	$\gtrsim 10^{15} K$	$\sim 10^{14}$	$\gtrsim 10^{-11} s$
Transição Quark-Hádron	$\gtrsim 10^{13} K$	$\sim 10^{12}$	$\gtrsim 10^{-7} s$
<i>Freeze-out</i> da Matéria Escura	?	?	?
Desacop. dos Neutrinos/Aniq. de e^+	$\sim 10^{10} K$	$\sim 10^{10}$	$\sim 1 s$
Nucleossíntese Primordial	$10^{10} - 10^8 K$	$\sim 10^8$	$1 - 500 s$
Equipartição Matéria-Radiação	$\sim 10^4 K$	~ 3400	$\sim 60 kyr$
Recombinação	$3800 - 3000 K$	$1400 - 1100$	$260 - 380 kyr$
Desacoplamento dos Fótons	$\sim 3000 K$	~ 1100	$\sim 380 kyr$
Reionização	$57 - 19 K$	$30 - 10$	$100 - 400 Myr$
Equipartição Matéria-Energia Escura	$\simeq 3,61 K$	$\simeq 0,4$	$\sim 9 Gyr$
Hoje	$\simeq 2,725 K$	0	$\sim 13,8 Gyr$

Em síntese, imediatamente após o *Big Bang*, o universo caiu numa era, chamada era de Planck, sobre a qual não se tem nenhuma informação, pois para isso é necessária uma teoria quântica da gravidade. Em seguida, acredita-se que ele sofreu uma expansão abrupta – a inflação, assunto principal deste trabalho – que diluiu toda sua energia e curvatura, tornando-o praticamente plano, isotrópico e homogêneo. Nesta mesma época, todas as interações fundamentais (exceto a gravidade) encontravam-se unificadas (GUT's).

Após isso, quando a temperatura do universo caiu para $\sim 10^{15} K$, houve uma breve época de aniquilação entre partículas e anti-partículas, a bariogênese, que deu origem à razão fóton-bárion, $\eta_{b\gamma} \sim 10^{-9}$, e também o desacoplamento da interação eletro-frac, onde as partículas adquiriram massa pelo mecanismo de Higgs, levando à uma mudança drástica na força da interação frac, o que resultou na formação de mésons e dos bárions. Em algum momento entre a transição quark-hádron e o desacoplamento dos neutrinos acredita-se que tenha ocorrido o *freeze-out* e desacoplamento das partículas de matéria escura.

Ligeiramente após o desacoplamento dos neutrinos, a aniquilação elétron-pósitron criou um ambiente propício à formação dos elementos químicos leves, período conhecido como nucleossíntese primordial, três minutos (aproximadamente) após o HBB. Entretanto, devido a temperatura ainda ser muito alta nesta época ($\sim 10^8 K$), a energia dos fótons era diversas vezes maior que a energia de ligação do átomo de hidrogênio e isso inviabilizou a formação de parte do hidrogênio primordial. Somente quando o universo atingiu uma temperatura da ordem de $3800 K$, há 380 mil anos, já no domínio da matéria, a energia dos fótons caiu o suficiente para que os átomos de hidrogênio fossem recombinados (recombinação), tornando o universo praticamente neutro. Em seguida, os fótons foram desacoplados do plasma primordial e o universo se tornou transparente.

A principal consequência da dissociação dos fótons do plasma primordial foi a formação do fundo cósmico de radiação, a RCF, com o espectro de um corpo negro quase perfeito, resultante da última superfície de espalhamento (derradeira vez em que os fótons foram espalhados pelos elétrons via espalhamento Compton).

Após a recombinação, os fótons da RCF caíram no regime de Wein da radiação de corpo negro (comprimento de onda próximo de $4,6 \mu m$) e como o *redshift* cosmológico vai do infravermelho às micro-ondas, um observador hipotético nesta época observaria apenas um brilho uniforme que ficaria cada vez mais escuro à medida que o tempo fosse passando. Por isso, essa época é denominada de idade das trevas. O universo permaneceu assim até o colapso das primeiras estruturas, em $Z \sim 15$. A partir daí, o gás que se resfriava no interior dessas estruturas se fragmentou e formou as primeiras gerações de estrelas, que começaram a emitir uma imensa quantidade de energia ultra-violeta. Este período é conhecido como reionização, ou fim da idade das trevas.

Finalmente, na história recente do universo, quando o mesmo atingira uma temperatura de aproximadamente $3,61 K$ – cerca de 5 bilhões de anos atrás –, a componente de energia escura passou a dominar o universo, fazendo-o evoluir para um regime de expansão acelerada. Só após essa transição de fase (matéria/energia escura) é que foram formadas as estruturas mais complexas, conhecidas como galáxias, aglomerados e superaglomerados de galáxias, observadas hoje. Sabe-se, atualmente, que o universo tem cerca de 13,8 bilhões de anos de idade e uma temperatura média de $2,725 K$ [15, 45, 46].

Capítulo 3

Perturbações Cosmológicas

Como pudemos constatar, há poderosas evidências de que o universo primordial foi surpreendentemente homogêneo e isotrópico, em todas as escalas, com respeito à estrutura do espaço-tempo e à distribuição do seu material. Embora incrivelmente boa, esta descrição do mundo onde vivemos é, claramente, uma idealização. A presença de grandes estruturas completamente não lineares como galáxias, aglomerados e superaglomerados de galáxias e das inomogeneidades de uma parte em 10^5 , gravadas na RCF desde a era da recombinação, sugerem que devem ter existido pequenas flutuações em torno do fundo isotrópico FLRW, que foram amplificadas devido à instabilidade gravitacional local, também conhecida como instabilidade de Jeans [4, 6].

Uma teoria para pequenas perturbações cosmológicas pode ser desenvolvida no contexto da gravitação newtoniana. Isto foi feito pioneiramente por Bonnor [47], em 1957. No entanto, em tal modelo, há diversas limitações conceituais, principalmente quando nos aproximamos do horizonte de Hubble [48]. Um olhar mais preciso e sofisticado da gravidade, e conseqüentemente das perturbações, é fornecido pela Teoria da Relatividade Geral (TRG), de Albert Einstein [42, 49].

A TRG é muito bem testada por físicos e astrônomos de todos os lugares do planeta, sendo a mais bem aceita pela comunidade científica se tratando de gravitação. Tanto é que toda a Cosmologia padrão FLRW, desenvolvida no capítulo anterior, se baseia em sua explicação da gravidade. Matematicamente, nosso trabalho se resume, então, à perturbar as equações de campo de Einstein e obter as equações de movimento resultantes, conectando as flutuações na métrica, $g_{\mu\nu}$, com as da matéria, $T_{\mu\nu}$.

Entretanto, desse procedimento, surgem dois problemas fundamentais: além das variáveis descrevendo o material no universo, são necessárias dez funções independentes para descrever as perturbações no campo gravitacional. O segundo, um pouco mais sutil, surge devido à uma liberdade residual na escolha do sistema de coordenadas. À isto denominamos um problema de *gauge*. Nomes importantes, que deram início à construção da teoria relativística das perturbações cosmológicas, são: Lifshitz [50], Khalatnikov [51], Hawking [52], Olson [53], Harrison [54], Nariai [55], Sakai [56] e Press e Vishniac [57]. Em seguida, em 1980, o cosmólogo J. Bardeen deu sua enorme contribuição, incorporando à teoria relativística das perturbações o formalismo *gauge*-invariante [58].

No mais, salientamos que só consideraremos as perturbação lineares, pois estamos interessados em pequenos desvios do fundo isotrópico FLRW, o qual chamaremos a partir de agora de *background*. Para tanto, nos basearemos principalmente nos textos clássicos de Mukhanov, Feldman e Brandenberger [43] e Kodama e Sasaki [59]. Outras literaturas também consultadas foram Baumann [60], Riotto [61], Piattella [62], Hämäläinen [63], Peter [64], Kurki-Suono [65] e Malik e Wands [66].

3.1 Perturbando as Equações de Einstein

Como já mencionamos, o universo real em que vivemos inclui pequenas flutuações entorno do *background*. No âmbito da teoria relativística de perturbações lineares, uma estratégia natural de explicitar as flutuações δX de uma quantidade X , qualquer, que depende do tempo e das coordenadas espaciais, é através da diferença entre o seu valor no universo real e a sua parte *background*, homogênea, $\bar{X}$. Ou seja:

$$\delta X(t, x^i) \equiv X(t, x^i) - \bar{X}(t). \quad (3.1)$$

Dessa forma, o valor desta quantidade física no universo real (perturbado) será dado pela soma $X(t, x^i) = \bar{X}(t) + \delta X(t, x^i)$, de tal forma que podemos identificar as perturbações, $\delta X(t, x^i)$, como a série de potências

$$\delta X(t, x^i) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \delta X_n(t, x^i), \quad (3.2)$$

onde o subscrito n denota a ordem da perturbação e ϵ é um parâmetro real pequeno [63, 66]. Assim, podemos reescrever as equações de campo de Einstein como

$$\bar{G}_\nu^\mu + \delta G_\nu^\mu = 8\pi G \left(\bar{T}_\nu^\mu + \delta T_\nu^\mu \right), \quad (3.3)$$

resultando para as perturbações,

$$\delta G_\nu^\mu = 8\pi G \delta T_\nu^\mu. \quad (3.4)$$

No que segue, deveremos computar as perturbações no tensor de Einstein e no tensor energia-momentum, separadamente, e depois juntá-los via (3.4) e assim obter as equações de movimento linearizadas sobre o *background* FLRW.

3.2 Perturbações da Métrica

Conforme estabelecido pela regra (3.1), podemos explicitar a métrica completa (parte homogênea mais parte perturbada) do universo perturbado pela soma

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}, \quad (3.5)$$

onde $\bar{g}_{\mu\nu}$ é a métrica *background* (2.5) e $\delta g_{\mu\nu}$ são pequenas perturbações em torno da métrica FLRW. Como essas perturbações são muito pequenas, tais que $|\delta g_{\mu\nu}| \ll |\bar{g}_{\mu\nu}|$, a consideração somente de termos lineares é uma aproximação extremamente boa. Assim, o elemento de linha no universo perturbado pode ser expresso por:

$$ds^2 = \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \delta g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (3.6)$$

Devido à eminente homogeneidade e isotropia do *background*, as partes escalares, vetoriais e tensoriais das perturbações lineares encontram-se desacopladas e, portanto, evoluem independentemente uma das outras. O procedimento que nos mostra que isso é verdade foi introduzido por Evgeny Lifshitz, em 1943, e é conhecido como a decomposição escalar-vetorial-tensorial (ou, simplesmente, decomposição SVT) [50].

Para compor os modos escalares introduziremos as quatro funções linearmente independentes ϕ , ψ , B e E . Em geral, podemos construir vetores tomando-se o gradiente de escalares e tensores derivando-os covariantemente duas vezes ou multiplicando-os pela

métrica espacial *background*, γ_{ij} . Assim, uma alternativa que surge naturalmente é definir

$$\delta g_{\mu\nu}^{(s)} = a^2(\tau) \begin{bmatrix} -2\phi & B_{|i} \\ B_{|i} & -2(\psi\gamma_{ij} - E_{|ij}) \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

onde a notação “ $|i$ ” no subíndice significa a derivada covariante com relação às coordenadas espaciais x^i [43]. Na linguagem do formalismo $(3+1)$, a perturbação ϕ é conhecida como função lapso e ψ é a perturbação da curvatura, pois nos permite escrever o 3-tensor de Ricci para a métrica (3.7) numa forma extremamente simples [59].

Em seguida, os modos vetoriais são construídos inserindo-se os 3-vetores S_i e F_i , de tal forma que suas divergências sejam nulas, i.e.,

$$S_i^{|i} = F_i^{|i} = 0. \quad (3.8)$$

Estas restrições nos garantem que as perturbações S_i e F_i são, de fato, vetores puros, com nenhuma parte escalar. Definimos, então, as perturbações vetoriais como

$$\delta g_{\mu\nu}^{(v)} = a^2(\tau) \begin{bmatrix} 0 & S_i \\ S_i & (F_{i|j} + F_{j|i}) \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

É importante ressaltar que, sob uma rotação 3-dimensional espacial, a componente δg_{00} se transforma como um escalar. Portanto, é necessário que $\delta g_{00}^{(v)} = 0$.

Por fim, para construirmos as perturbações métricas tensoriais, consideraremos apenas o 3-tensor simétrico, $h_{ij} = h_{ji}$, de tal maneira que seus traço e divergência sejam nulos, ou seja,

$$h_i^i = 0 \quad e \quad h_{ij}^{|i} = 0. \quad (3.10)$$

De forma similar à anterior, essas restrições garantem que a nossa perturbação tensorial não contenha pedaços que se transformem como escalares ou como vetores. Também, para preservar a simetria por rotações 3-dimensionais espaciais, devemos ter $\delta g_{i0} = \delta g_{0i} = 0$, uma vez que essas componentes se comportam como vetores. Assim, definimos os modos tensoriais das perturbações simplesmente como

$$\delta g_{\mu\nu}^{(t)} = a^2(\tau) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_{ij} \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Uma vez estabelecidas as perturbações da métrica, acima, estamos prontos para reescrever o elemento de linha perturbado (3.6) em termos das variáveis perturbativas

introduzidas. Isto equivale à escrever [6]

$$ds^2 = a^2(\tau) \left\{ -(1 + 2\phi) d\tau^2 + 2B_i dx^i d\tau + [(1 - 2\psi) \gamma_{ij} + 2E_{ij}] dx^i dx^j \right\}, \quad (3.12)$$

onde as perturbações definidas por

$$B_i \equiv B_{|i} + S_i \quad e \quad E_{ij} \equiv E_{|ij} + \frac{1}{2} (F_{i|j} + F_{j|i}) + \frac{1}{2} h_{ij} \quad (3.13)$$

são denominadas o vetor deslocamento e o tensor de cisalhamento, respectivamente [60].

Contando o número total de funções utilizadas, temos: quatro para perturbações escalares, quatro para vetoriais (um 3-vetor tem três componentes independentes e há uma restrição para cada) e duas para tensoriais (um 3-tensor simétrico possui seis componentes independentes e há quatro restrições), totalizando dez funções independentes. De fato, esse número coincide com o número de componentes independentes de $\delta g_{\mu\nu}$ [43].

3.3 Perturbações do Tensor Energia-Momento

No universo perturbado, de acordo com (3.1), a densidade (ρ), a pressão (p) e as 4-velocidades (u^μ) também podem ser funções das coordenadas x^i . Consequentemente, podem haver contribuições devidas ao stress anisotrópico, Π_ν^μ , ao longo do fluido. Assim, as perturbações no tensor energia-momento são dadas pela forma geral [66]

$$\delta T_\nu^\mu = (\delta\rho + \delta p) \bar{u}^\mu \bar{u}_\nu + (\bar{\rho} + \bar{p}) (\delta u^\mu \bar{u}_\nu + \bar{u}^\mu \delta u_\nu) + \delta p \delta_\nu^\mu + \Pi_\nu^\mu, \quad (3.14)$$

onde $\delta\rho$, δp , δu^μ e Π_ν^μ são perturbações de primeira ordem na matéria. Sem perda de generalidade, podemos configurar o tensor de stress anisotrópico para que seja ortogonal às 4-velocidade e não contenha traço espacial, i.e.,

$$u^\mu \Pi_{\mu\nu} = \Pi_i^i = 0, \quad (3.15)$$

onde a segunda igualdade é sempre possível desde que Π_i^i possa ser absorvido numa redefinição de δp . Assim, o stress anisotrópico é o 3-tensor simétrico e sem traço Π_j^i .

Na métrica perturbada (3.12), o campo de 4-velocidades perturbado, u^μ , dá

$$u^\mu = a^{-1} (1 - \phi, v^i) \quad e \quad u_\mu = a (-1 - \phi, v_i + B_i), \quad (3.16)$$

onde $v^i \equiv u^i/u^0$. Aqui, escolhemos u_0 de tal maneira que a restrição $u_\mu u^\mu = -1$ é satisfeita, em primeira ordem. Levando (3.16) e (3.15) em (3.14), obtemos a forma final das perturbações no tensor energia-momento [58, 59, 66]

$$\delta T^\mu_\nu = \begin{bmatrix} -\delta\rho & (\bar{\rho} + \bar{p})(v_i + B_i) \\ -(\bar{\rho} + \bar{p})v^i & \delta p \delta_j^i + \Pi_j^i \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Vemos então que as perturbações nas 4-velocidades podem induzir fluxo de energia, T_i^0 , bem como densidade de momento, T_0^i , diferentes de zero em primeira ordem. Usaremos $\delta q^i \equiv (\bar{\rho} + \bar{p})(v^i + B^i)$ para representar a densidade de momento.

Como há diferentes tipos de materiais no universo (por exemplo, fótons, bárions, matéria e energia escura), então temos que:

$$\delta\rho \equiv \sum_I \delta\rho_I, \quad \delta p \equiv \sum_I \delta p_I, \quad \delta q^i \equiv \sum_I \delta q_I^i \quad e \quad \Pi^{ij} \equiv \sum_I \Pi_I^{ij}. \quad (3.18)$$

As perturbações nas velocidades simplesmente não se somam. Entretanto, as densidades de momento, δq^i , sim. Isso foi o que nos motivou à definição de δq^i acima.

Prontamente, a decomposição SVT pode ser aplicada às densidades de momento, ou às velocidades perturbadas, separando-as nas partes escalar e vetorial:

$$\delta q_i = \delta q_{|i} + \delta q_i^{(v)} \quad ou \quad v_i = v_{|i} + v_i^{(v)}, \quad (3.19)$$

e ao tensor de stress anisotrópico, separando-o nas partes escalar, vetorial e tensorial:

$$\Pi_{ij} = \left(\Pi_{|ij} + \frac{1}{3} k^2 \Pi \delta_{ij} \right) + \frac{1}{2} \left(\Pi_{|j}^{(v)} + \Pi_{j|i}^{(v)} \right) + \Pi_{ij}^{(t)}, \quad (3.20)$$

onde o número de onda, k , está intimamente relacionado com os autovalores do operador laplaciano [66]. Assim como no caso das perturbações métricas, exigimos que as flutuações vetoriais e tensoriais na matéria tenham suas divergências nulas, i.e.,

$$\delta q_i^{(v)|i} = v_i^{(v)|i} = \Pi_{ij}^{(t)|i} = 0. \quad (3.21)$$

Por fim, ressaltamos que as flutuações na densidade de energia podem ser de dois tipos. São ditas diabáticas, caso a densidade local total (perturbada) ρ_I de uma dada componente I do fluido tenha o mesmo valor que no *background*, porém num tempo ligeiramente diferente, $\tau + \delta\tau$, implicando em $\delta\tau = \delta\rho_I^{(ad)}/\bar{\rho}'_I = \delta p_I^{(ad)}/\bar{p}'_I$. Perturbações não puramente adiabáticas são ditas possuírem modos entrópicos, ou de isocurvatura. Neste caso, $\delta p_I^{(en)} \equiv \delta p_I - \delta p_I^{(ad)}$ [60]. Em geral, perturbações entrópicas surgem em modelos de inflação impulsionada por mais de um campo escalar.

3.4 Formalismo *Gauge*-Invariante

Embora a Relatividade Geral seja uma teoria covariante por excelência, a identificação de uma variável qualquer (métrica ou não) no universo real como tendo uma parte homogênea e outra de flutuações, via (3.1), não é única. Essa forma de abordar pequenas perturbações leva a uma dependência particular do sistema de coordenadas. Para ser mais claro, da mesma forma que na mecânica newtoniana a escolha de uma determinada classe de referenciais – a dos não inerciais – leva ao surgimento de forças fictícias devidas unicamente à escolha do referencial, em Relatividade Geral, isto introduz graus de liberdade extras, não reais, às perturbações. Portanto, podem ser eliminados através de uma transformação de coordenadas adequada.

Do ponto de vista formal – matemático – o espaço-tempo *background* e o espaço-tempo físico, real, são duas variedades pseudo-riemannianas 4-dimensionais distintas (embora muito parecidas), imersas numa outra de dimensão maior. Portanto, as parcelas que compõem as perturbações na qual estamos tratando “vivem” em domínios matemáticos diferentes, com suas próprias características. A conexão entre estes espaços é feita através da especificação de um mapa. Ocorre que, como podemos intuir, há uma infinidade destes mapas com os quais podemos estabelecer uma conexão axiomática entre as variedades e, assim, muitas formas de conectar o *background* ao universo perturbado.

Neste sentido, o formalismo *gauge*-invariante, estudado inicialmente por Sachs [67] e Stewart e Walker [68], fornece uma solução para o problema, tornando a teoria linear de perturbações cosmológicas invariante sob transformações de coordenadas infinitesimais, chamadas neste contexto de transformações de *gauge*. Assim, um *gauge* nada mais é que um mapa entre pontos na variedade.

Há matematicamente duas maneiras distintas, porém equivalentes, de se abordar o problema de pequenas perturbações sobre o *background*: uma dita passiva e a outra, ativa. Considerando a abordagem passiva, tomemos a variedade física quadridimensional espaço-tempo, $\mathcal{M}$, e novamente a quantidade genérica X (escalar, vetorial ou tensorial) pertencente a $\mathcal{M}$. Num sistema de coordenadas arbitrário $x^\alpha \in \mathcal{M}$, as perturbações de X num ponto $p \in \mathcal{M}$ são dadas por:

$$\delta X(x^\alpha(p)) = X(x^\alpha(p)) - \bar{X}(x^\alpha(p)). \quad (3.22)$$

Por outro lado, do ponto de vista de um outro referencial $\tilde{x}^\alpha$, também pertencente à $\mathcal{M}$ e diferindo apenas infinitesimalmente do primeiro, teremos:

$$\delta\tilde{X}(\tilde{x}^\alpha(p)) = \tilde{X}(\tilde{x}^\alpha(p)) - \tilde{\tilde{X}}(\tilde{x}^\alpha(p)). \quad (3.23)$$

A transformação levando $\delta X \rightarrow \delta\tilde{X}$ é denominada uma transformação de *gauge*, induzida pela mudança de coordenadas infinitesimal $x^\alpha \rightarrow \tilde{x}^\alpha$.

Em seguida, é razoável supor que os referenciais x^α e $\tilde{x}^\alpha$ são conectados pela seguinte lei de transformação:

$$x^\alpha \rightarrow \tilde{x}^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha, \quad (3.24)$$

onde ξ^α é um 4-vetor infinitesimal definido em $\mathcal{M}$. A aplicação dessa transformação de coordenadas induz a mudança em δX dada por

$$\delta X \rightarrow \delta\tilde{X} = \delta X + \mathcal{L}_\xi X, \quad (3.25)$$

onde $\mathcal{L}_\xi X$ é a derivada de Lie da quantidade X na direção do vetor ξ . Vemos então que nossa perturbação só será invariante sob (3.24) se $\mathcal{L}_\xi Q = 0$. De acordo com o lema de Stewart-Walker, só há três possibilidades disso acontecer: ou X é identicamente nulo, ou um campo (escalar, vetorial ou tensorial) constante ou uma combinação linear de produtos de δ_ν^μ com coeficientes constantes [49]. De fato, sob (3.24), teremos:

$$\begin{aligned} \delta X \rightarrow \delta\tilde{X} &= \delta X - \bar{X}'\xi^0, \\ \delta X^\mu \rightarrow \delta\tilde{X}^\mu &= \delta X^\mu + \xi_{|\nu}^\mu \bar{X}^\nu - \bar{X}_{|\nu}^\mu \xi^\nu, \\ \delta X_\nu^\mu \rightarrow \delta\tilde{X}_\nu^\mu &= \delta X_\nu^\mu + \xi_{|\rho}^\mu \bar{X}_\nu^\rho - \xi_{|\nu}^\rho \bar{X}_\rho^\mu - \bar{X}_{\nu|\rho}^\mu \xi^\rho, \end{aligned} \quad (3.26)$$

caso as nossas perturbações sejam escalares, 4-vetoriais ou 4-tensoriais, respectivamente.

Voltando para o 4-vetor $\xi^\alpha = (\xi^0, \xi^i)$, considerado na transformação de *gauge* acima, podemos decompor sua parte espacial, ξ^i , na soma de um 3-vetor transversal $\xi_{(tr)}^i$ e um longitudinal. A componente transversal tem divergência nula e a parte longitudinal rotacional nulo, portanto é gradiente de um escalar ξ . Ou seja,

$$\xi^i = \xi_{(tr)}^i + \gamma^{ij}\xi_{|j}, \quad (3.27)$$

onde ξ e $\xi_{(tr)}^i$ satisfazem, respectivamente,

$$\xi_{|i}^{|i} = \xi_{|i}^i \quad e \quad \xi_{(tr)|i}^i = 0. \quad (3.28)$$

É fácil perceber que apenas as funções ξ^0 e ξ preservam a natureza escalar de (3.7), ao passo que $\xi_{(tr)}^i$ conserva a vetorial de (3.9). Dessa forma, a maneira mais geral de conceber uma mudança de coordenadas que preserve a natureza das perturbações é:

$$\tau \rightarrow \tilde{\tau} = \tau + \xi^0(\tau, x^i) \quad e \quad x^i \rightarrow \tilde{x}^i = x^i + \gamma^{ij} \xi_{|j}(\tau, x^i), \quad (3.29)$$

para os modos escalares, e

$$\tau \rightarrow \tilde{\tau} = \tau \quad e \quad x^i \rightarrow \tilde{x}^i = x^i + \xi_{tr}^i(\tau, x^i), \quad (3.30)$$

para os modos vetoriais. As perturbações tensoriais lineares são, por excelência, invariantes sob as transformações infinitesimais $x^\alpha \rightarrow \tilde{x}^\alpha$, portanto, livres de ambiguidades.

3.5 Variáveis *Gauge*-Invariantes

Aplicando-se (3.29) e (3.26) à (3.7), obtemos as seguintes leis de transformação para as perturbações métricas escalares:

$$\tilde{\phi} = \phi - \xi^{0'} - \mathcal{H}\xi^0, \quad \tilde{\psi} = \psi + \mathcal{H}\xi^0, \quad \tilde{B} = B + \xi^0 - \xi', \quad e \quad \tilde{E} = E - \xi. \quad (3.31)$$

Consequentemente,

$$\Phi \equiv \phi + a^{-1}[(B - E')a]' \quad (3.32)$$

e

$$\Psi \equiv \psi - \mathcal{H}(B - E') \quad (3.33)$$

são *gauge*-invariantes. Estas quantidades são conhecidas como os potenciais de Bardeen devido ao cosmólogo que as propôs pela primeira vez, James M. Bardeen [58].

Em seguida, aplicando-se (3.30) e (3.26) aos modos vetoriais (3.9), obteremos:

$$\tilde{S}_i = S_i + \xi'_{(tr)i} \quad e \quad \tilde{F}_i = F_i + \xi_{(tr)i}. \quad (3.34)$$

Consequentemente,

$$V_i \equiv S_i - F'_i \quad (3.35)$$

é a única combinação invariante para as variáveis descrevendo as perturbações vetoriais da métrica. Como já mencionamos, os modos tensoriais definidos até primeira ordem são invariantes por natureza. Significa então que $\tilde{h}_{ij} = h_{ij}$.

Além disso, de posse do caso tensorial de (3.26) e das transformações escalares (3.29), podemos obter facilmente as seguintes combinações *gauge*-invariantes do tensor de Einstein para este tipo específico de perturbações:

$$\delta G_0^{(gi)0} \equiv \delta G_0^0 + (\bar{G}_0^0)' (B - E'), \quad (3.36)$$

$$\delta G_i^{(gi)0} \equiv \delta G_i^0 + \left(\bar{G}_0^0 - \frac{1}{3} \bar{G}_k^k \right) (B - E')_{|i}, \quad (3.37)$$

$$\delta G_j^{(gi)i} \equiv \delta G_j^i + (\bar{G}_j^i)' (B - E'). \quad (3.38)$$

Por simetria das equações de campo, as perturbações *gauge*-invariantes do tensor energia-momento possuem exatamente a mesma forma das flutuações no tensor de Einstein.

Seguindo um raciocínio idêntico ao anterior, encontramos algumas combinações invariantes de calibre para as variáveis descrevendo as flutuações no conteúdo material. São elas:

$$\delta \rho^{(gi)} \equiv \delta \rho + \bar{\rho}' (B - E'), \quad (3.39)$$

$$\delta p^{(gi)} \equiv \delta p + \bar{p}' (B - E'), \quad (3.40)$$

$$\delta q^{(gi)} \equiv \delta q - (\bar{\rho} + \bar{p}) (B - E'). \quad (3.41)$$

A partir de (3.26), verifica-se que a parte vetorial da densidade de momento, $\delta q_i^{(v)}$, não muda quando passamos de um sistema de coordenadas para outro. Também, pelo mesmo motivo que h_{ij} , o stress anisotrópico (Π_{ij}) é invariante sob uma transformação de *gauge*.

Conforme dito anteriormente, as perturbações escalares *gauge*-invariantes do tensor energia-momento são, por simetria, definidas como:

$$\delta T_0^{(gi)0} \equiv \delta T_0^0 + (\bar{T}_0^0)' (B - E'), \quad (3.42)$$

$$\delta T_i^{(gi)0} \equiv \delta T_i^0 + \left(\bar{T}_0^0 - \frac{1}{3} \bar{T}_k^k \right) (B - E')_{|i}, \quad (3.43)$$

$$\delta T_j^{(gi)i} \equiv \delta T_j^i + (\bar{T}_j^i)' (B - E'), \quad (3.44)$$

onde os super-índices “*gi*” significam “*gauge-invariante*”.

Haja vista a liberdade na escolha do *gauge* alguns calibres, como o longitudinal e o síncrono são frequentemente reportados na literatura. O longitudinal, também chamado de newtoniano conforme, é obtido configurando-se $B = E = 0$ e o síncrono, $\phi = B = 0$. Outros *gauges* conhecidos são o espacialmente plano ($\psi = 0$) e o comóvel ($v^i = B = 0$).

Como podemos imaginar, é possível também construirmos quantidades invariantes de *gauge* a partir da combinação das perturbações métricas com as da matéria. Algumas destas variáveis são a perturbação da curvatura comóvel ($\mathcal{R}$) e a perturbação adiabática da densidade (ζ).

A perturbação da curvatura escalar intrínseca de Ricci em hiper-superfícies de tempo constante é dada, em termos de ψ , por [66]:

$$\delta^{(3)}R = 4a^{-2} \left(\nabla^2 + 3K \right) \psi. \quad (3.45)$$

Acontece que ψ é dependente do *gauge*, portanto $\delta^{(3)}R$ também é. Entretanto, num referencial comóvel, a expansão de Hubble é isotrópica, logo não há fluxo de energia medido por estes observadores. Consequentemente, teremos $\delta q_m = \delta q + (\bar{\rho} + \bar{p}) \xi^0 = 0$, onde δq_m é a densidade de momento comóvel. Substituindo ξ^0 dessa última relação na transformação de ψ , em (3.31), concluímos que

$$\mathcal{R} \equiv \psi - \frac{\mathcal{H}}{(\bar{\rho} + \bar{p})} \delta q \quad (3.46)$$

é *gauge*-invariante. Por construção, $\mathcal{R}$ representa o potencial gravitacional em hiper-superfícies comóveis, ou seja, com densidade de momento $\delta q = 0$ [61].

De forma similar, se considerarmos hiper-superfícies de densidade uniforme, tal que $\delta \rho_{unif} = \delta \rho - \bar{\rho}' \xi^0 = 0$, a substituição imediata de ξ^0 em $\tilde{\psi}$ nos garante que a quantidade

$$-\zeta \equiv \psi + \mathcal{H} \frac{\delta \rho}{\bar{\rho}'} \quad (3.47)$$

é *gauge*-invariante. Comparando-se as expressões (3.47) e (3.46), vemos que a relação entre as perturbações da curvatura comóvel, $\mathcal{R}$, e adiabática da densidade, ζ , é dada por

$$-\zeta = \mathcal{R} + \mathcal{H} \frac{\delta \rho_m}{\bar{\rho}'} \quad (3.48)$$

onde $\delta \rho_m \equiv \delta \rho - 3\mathcal{H}\delta q$ é a perturbação da densidade comóvel, também *gauge*-invariante.

Como veremos a seguir, $\mathcal{R}$ e $-\zeta$ são iguais no limite de grandes comprimentos de onda $k/\mathcal{H} \rightarrow 0$. Além disso, considerando-se apenas perturbações adiabáticas ($\delta p^{(en)} = 0$), ambas são conservadas nestas escalas [69]. Isto é de suma importância, pois, assim como a escala de *Planck*, o horizonte de Hubble é uma fronteira conceitual da Física contemporânea, não sendo possível para nós, hoje, prevermos o que acontece nessas escalas.

3.6 Equações de Einstein

3.6.1 Perturbações Escalares

Considerando a perturbação das equações de campo em sua forma invariante, $\delta G_{\nu}^{(gi)\mu} = 8\pi G \delta T_{\nu}^{(gi)\mu}$, com os tensores de Einstein e energia-momentum calculados em termos das quantidades Φ , Ψ , $\delta\rho^{(gi)}$, $\delta p^{(gi)}$ e $\delta q^{(gi)}$, descobrimos que as perturbações escalares da métrica estão relacionadas com as do conteúdo material no universo via [6, 59]:

$$3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi + \Psi') + k^2\Psi - 3K\Psi = -4\pi G a^2 \delta\rho^{(gi)}, \quad (3.49)$$

$$\mathcal{H}\Phi + \Psi' = -4\pi G a^2 \delta q^{(gi)}, \quad (3.50)$$

$$(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + \mathcal{H}\Phi' + \Psi'' + 2\mathcal{H}\Psi' - K\Psi = 4\pi G a^2 \left(\delta p^{(gi)} - \frac{2}{3}k^2\Pi \right), \quad (3.51)$$

$$\Phi - \Psi = -8\pi G a^2 \Pi. \quad (3.52)$$

As restrições nas densidades de energia (3.49) e de momento (3.50) podem ser combinadas para darem a generalização da equação de Poisson, $k^2\Psi - 3K\Psi = -4\pi G a^2 \delta\rho_m$, nos levando a interpretar $\Psi(\tau, x^i)$ como sendo a generalização relativística do potencial gravitacional newtoniano. Vemos também que, na ausência de stress anisotrópico, a equação $i \neq j$ nos diz que $\Psi = \Phi$, simplificando as demais equações.

3.6.2 Perturbações Vetoriais

Para as perturbações vetoriais, há apenas duas equações de movimento relevantes (não triviais) relacionando as perturbações métricas às do conteúdo material [43, 59, 64], ou seja:

$$(k^2 - 2K)V_i = 16\pi G a^2 \delta q_i^{(v)}, \quad (3.53)$$

$$(V_{i|j} - V_{j|i})' + 2\mathcal{H}(V_{i|j} + V_{j|i}) = 16\pi G a^2 (\Pi_{i|j}^{(v)} + \Pi_{j|i}^{(v)}). \quad (3.54)$$

Na ausência de stress anisotrópico, cenário cosmológico mais relevante, a equação (3.54) nos leva à solução exata $V_i \propto a^{-2}$, indicando que esses modos devem desaparecer muito rapidamente conforme o universo se expande. Observacionalmente, já está bem claro que as perturbações vetoriais são insignificantes desde a época bem conhecida da nucleossíntese primordial, quando $Z_{BBN} \sim 3 \times 10^8$. Destarte, podemos ignorá-las sem nenhuma perda.

3.6.3 Perturbações Tensoriais

Para as perturbações tensoriais, as equações de campo de Einstein se reduzem à uma única equação de movimento descrevendo a evolução desses modos perturbativos no espaço-tempo. Em termos de h_{ij} e da parte tensorial de Π_{ij} , esta equação é expressa por

$$h''_{ij} + 2\mathcal{H}h'_{ij} + (k^2 + 2K)h_{ij} = 16\pi G a^2 \Pi_{ij}^{(t)}, \quad (3.55)$$

onde o stress anisotrópico é geralmente definido como zero, em virtude das observações [6, 59, 64, 69]. Além disso, como discutido no capítulo anterior e, posteriormente, no modelo inflacionário, temos razões de sobra, tanto observacionais quanto teóricas, para definir a curvatura da seção espacial do universo como sendo estritamente plana ($K = 0$).

Por outro lado, uma perturbação tensorial arbitrária pode ser decomposta nos auto-modos do laplaciano espacial, $\nabla^2 e_{ij} = -k^2 e_{ij}$, nos conduzindo à seguinte relação: $h_{ij} = h(\tau) e_{ij}^{(+,\times)}(x^i)$. Substituindo esta expressão em (3.55), obtemos a equação

$$h'' + 2\mathcal{H}h' + k^2 h = 0, \quad (3.56)$$

descrevendo a propagação de ondas gravitacionais primordiais no universo primitivo, com amplitudes de oscilação $h(\tau)$ e dois possíveis estados de polarização do gráviton, $+$ ou $\times$.

A solução exata da equação (3.56), no limite de grandes comprimentos de onda ($k \ll \mathcal{H}$), é dada por

$$h = C_1 + C_2 \int \frac{d\tau}{a^2}, \quad (3.57)$$

onde C_1 e C_2 são constantes de integração à se determinar a partir das condições iniciais e o segundo termo da solução pode ser considerado como um modo de decaimento. Isto significa que, em escalas superiores ao raio de Hubble, as perturbações h se tornam constantes, compartilhando das mesmas vantagens de ζ e $\mathcal{R}$ [69].

Diferente dos modos escalares, que podem ser notados através das flutuações de temperatura na RCF, os modos tensoriais ainda não foram observados. Isto é um problema para o modelo inflacionário, pois apesar das ondas gravitacionais primordiais geradas pela inflação se deteriorarem com a expansão do universo, estima-se que suas amplitudes devem ter sido grandes o suficiente, na época da recombinação, para deixarem suas impressões nos modos B de polarização da RCF [62].

3.7 Caracterização das Perturbações

Em um dado instante t , fixo, podemos caracterizar as perturbações no universo especificando-se a distribuição espacial do potencial gravitacional Ψ ou, equivalentemente, das flutuações na densidade $\delta\rho^{(gi)}/\bar{\rho}$. Evidentemente, isto também pode ser feito utilizando-se variáveis que estejam relacionadas à estas duas; por exemplo, ζ ou $\mathcal{R}$ [6].

Por outro lado, de acordo com o nosso entendimento físico atual, o universo teve uma origem quântica, cuja qual não podemos descrever precisamente devido a falta de uma teoria quântica da gravitação. Como efeito, as equações de evolução deduzidas neste capítulo só são válidas bem após as perturbações atingirem a escala de Planck, quando a gravidade se torna formalmente clássica. Isto significa que precisamos arranjar outra maneira igualmente apropriada e eficaz de estabelecer as condições iniciais a partir das quais estas perturbações passaram a evoluir [62].

Ademais, como todo fenômeno de natureza quântica, essas perturbações detêm um caráter probabilístico e, conseqüentemente, podem ser descritas estatisticamente. Como veremos no próximo capítulo, o paradigma inflacionário faz previsões não sobre ζ ou $\mathcal{R}$, mas de suas distribuições de probabilidade. Mais do que isso, se a inflação é conduzida por apenas um único campo escalar, então estas distribuições são gaussianas e tanto ζ quanto $\mathcal{R}$ devem ser tratadas como variáveis aleatórias [43, 62, 63].

3.7.1 Campos Aleatórios Gaussianos

Para introduzirmos a ideia de campos aleatórios em Cosmologia imaginemos que o nosso imensurável universo possa ser subdividido num conjunto de grandes regiões de volume V , finito, onde uma dada configuração $\hat{g}(\vec{x})$, dentro de uma região específica, possa ser considerada uma realização de um processo completamente aleatório. Como consequência disso, o número relativo de regiões onde ocorre $\hat{g}(\vec{x})$ é dado por uma função distribuição de probabilidade.

A expansão em modos de Fourier de $\hat{g}(\vec{x})$, quando o volume da região vai à infinito, é dada pela integração sobre todos os possíveis valores de $\vec{k}$,

$$\hat{g}(\vec{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int g_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3\vec{k}, \quad (3.58)$$

onde $g_{\vec{k}} = a_{\vec{k}} + ib_{\vec{k}}$, com os coeficientes $a_{\vec{k}}$ e $b_{\vec{k}}$ tomando valores diferentes para cada região. Como $g(\vec{x})$ é uma função real, exigimos que $g_{-\vec{k}} = g_{\vec{k}}^*$, ou seja, $a_{-\vec{k}} = a_{\vec{k}}$ e $b_{-\vec{k}} = -b_{\vec{k}}$. Isto significa que a função distribuição de probabilidade (P) é a gaussiana

$$P(a_{\vec{k}}, b_{\vec{k}}) = \frac{1}{\pi\sigma_k^2} \exp \left[- \left(\frac{a_{\vec{k}}}{\sigma_k} \right)^2 \right] \exp \left[- \left(\frac{b_{\vec{k}}}{\sigma_k} \right)^2 \right] \quad (3.59)$$

e o valor esperado do produto dos coeficientes de Fourier vale

$$\langle g_{\vec{k}} g_{\vec{k}'} \rangle = \sigma_k^2 \delta(\vec{k} + \vec{k}'), \quad (3.60)$$

onde $\delta(\vec{k} + \vec{k}')$ é a função delta de Dirac e $\vec{k}' = \vec{k} + d\vec{k}$.

A dependência da variância, σ_k^2 , apenas no módulo de $\vec{k}$ caracteriza um processo aleatório gaussiano, ao mesmo tempo homogêneo e isotrópico. Este é o cenário previsto pela teoria clássica inflacionária. Além disso, no contexto das perturbações ζ ou $\mathcal{R}$, utilizadas para descrever a evolução dos modos escalares durante a inflação, k representa efetivamente o número de onda associado à cada um dos possíveis modos de oscilação. Para uma análise mais detalhada, não só do conceito de campos aleatórios, mas da maior parte da estatística utilizada na Cosmologia, o leitor deverá se dirigir à [70].

3.7.2 Espectro de Potência Primordial

O fato de lidarmos com campos aleatórios significa, sobretudo, que todas as funções de correlação são inteiramente determinadas pela variância, σ_k^2 , da distribuição. Além disso, se esta distribuição é gaussiana, então só precisamos de dois pontos para caracterizá-la completamente. Consideremos então a seguinte função de correlação de dois pontos,

$$\xi_{\hat{g}}(\vec{x} - \vec{y}) \equiv \langle \hat{g}(\vec{x}) \hat{g}(\vec{y}) \rangle, \quad (3.61)$$

nos dizendo o quão grande são as perturbações do campo $\hat{g}$ nas diferentes escalas $\vec{k}$. No caso homogêneo e isotrópico, $\xi_{\hat{g}}$ depende apenas da distância entre os pontos $\vec{x}$ e $\vec{y}$, ou seja, $\xi_{\hat{g}} = \xi_{\hat{g}}(r)$, onde $r \equiv |\vec{x} - \vec{y}|$. Substituindo (3.58) em (3.61) e considerando a isotropia de $\hat{g}$, obtemos

$$\xi_{\hat{g}}(r) = \int d(\ln k) \mathcal{P}_{\hat{g}}(k) e^{ikr}, \quad (3.62)$$

onde a função definida por

$$\mathcal{P}_{\hat{g}}(k) \equiv \frac{4\pi k^3}{(2\pi)^3} \sigma_k^2, \quad (3.63)$$

com $\sigma_k^2 \equiv |\hat{g}_k|^2$, é denominada o espectro de potências de $\hat{g}(\vec{x})$. Frequentemente, se define $\mathcal{P}_{\hat{g}}$ de uma forma diferente, porém totalmente consistente com (3.63), dada por

$$\langle 0 | \hat{g}_{\vec{k}} \hat{g}_{\vec{k}'} | 0 \rangle \equiv (2\pi)^3 \delta(\vec{k} + \vec{k}') |\hat{g}_{\vec{k}}|^2, \quad (3.64)$$

onde $|0\rangle$ é o estado de vácuo quântico do sistema [61]. A partir de qualquer uma destas definições, concluímos que os espectros de potências associados aos modos escalares e tensoriais das perturbações cosmológicas são dados por

$$\mathcal{P}_s = \frac{4\pi k^3}{(2\pi)^3} |\mathcal{R}|^2 \quad e \quad \mathcal{P}_T = 2 \frac{4\pi k^3}{(2\pi)^3} |h|^2, \quad (3.65)$$

respectivamente, onde o fator 2 em $\mathcal{P}_T$ está diretamente relacionado ao fato de existirem dois estados possíveis de polarização (+ ou $\times$) para o gráviton.

Finalmente, uma quantidade observacional extremamente importante, neste contexto, é a chamada razão tensor-escalar, definida como

$$r \equiv \frac{\mathcal{P}_T}{\mathcal{P}_s}. \quad (3.66)$$

Como os modos tensoriais não foram observados, ainda, dispomos apenas de um limite superior ($r_{0,002} < 0,06$), estimado recentemente pela *Planck collaboration 2019* [40].

3.7.3 Índice Espectral

Uma maneira muito útil de avaliar se os espectros de potências em (3.65) são invariantes de escala é através dos parâmetros n_s e n_T , denominados índices espectrais. Genericamente, temos que

$$\ln \left(\frac{\mathcal{P}_s}{A_s} \right) = \left[(n_s - 1) + \frac{1}{2} \frac{dn_s}{d \ln k} \ln \left(\frac{k}{k_*} \right) + \dots \right] \ln \left(\frac{k}{k_*} \right) \quad (3.67)$$

e

$$\ln \left(\frac{\mathcal{P}_T}{A_T} \right) = \left[n_T + \frac{1}{2} \frac{dn_T}{d \ln k} \ln \left(\frac{k}{k_*} \right) + \dots \right] \ln \left(\frac{k}{k_*} \right), \quad (3.68)$$

onde A_s e A_T são as amplitudes espectrais, relacionadas à escala de energia da inflação, e k_* é uma escala pivô, usualmente tomada como sendo $0,002 Mpc^{-1}$ ou $0,05 Mpc^{-1}$ [62].

Inteiramos que apenas A_s é restringido pelas observações, uma vez que nenhuma onda gravitacional primordial fora detectada. Considerando as expressões acima até primeira ordem, constatamos imediatamente que

$$n_s - 1 = \frac{d \ln \mathcal{P}_s}{d \ln k} \quad e \quad n_T = \frac{d \ln \mathcal{P}_T}{d \ln k}. \quad (3.69)$$

Vemos então que a invariância dos espectros com a escala está associada à $n_s = 1$ e $n_T = 0$. Esta aparente assimetria tem raiz histórica e até hoje não há nenhum registro de possíveis adversidades. Ressaltamos que estas quantidades são definidas num instante específico da evolução das perturbações, na “reentrada no horizonte”, com o qual iremos nos familiarizar no próximo capítulo, sobre a inflação [69].

3.7.4 Variação do Índice Espectral

Um espectro invariante de escala é o cenário ideal para se trabalhar. No entanto, como discutido agora à pouco, não é a forma mais geral a se considerar. Isto significa que devemos investigar mais termos nas expressões (3.67) e (3.68). Como as medidas das anisotropias da RCF indicam uma dependência ínfima do espectro de potências escalar ($n_s = 0,965 \pm 0,004$ [40]), o segundo termo da expansão é seguramente suficiente.

Definimos como variação, ou *running*, dos índices espectrais escalar e tensorial as quantidades definidas por

$$\alpha_s \equiv \frac{d(n_s)}{d \ln k} \quad e \quad \alpha_T \equiv \frac{d(n_T)}{d \ln k}, \quad (3.70)$$

avaliados no cruzamento $k = \mathcal{H}$.

Como veremos a partir do próximo capítulo, estas quantidades são de segunda ordem nos parâmetros que definem a inflação. No modelo de campo único (*ínflaton*), por exemplo, espera-se que sejam muito próximas de zero. Contudo, um resultado observacional muito diferente disto não significa (“de cara”) que a inflação esteja incorreta, mas que talvez hajam mais campos lhe conduzindo, ou que a gaussianidade na distribuição das perturbações primordiais não é absoluta, cenário a ser investigado também no capítulo sobre inflação, em *Não Gaussianidade Primordial*.

Capítulo 4

Teoria da Inflação

No Capítulo 2, Seção 2.8, discutimos sobre as condições iniciais do universo e os enigmas do HBB. Os residuais problemas da planura e do horizonte estabelecem que o universo evoluiu a partir de uma configuração inicial bastante específica, o que parece ser um grave problema de ajuste fino, do ponto de vista de muitos cosmólogos. Este cenário incerto e o grande mistério envolvendo os monopolos magnéticos acabaram ocasionando na hipótese inflacionária, tendo como pioneiro o cosmólogo Allan Guth, com o seu trabalho *“Inflationary universe: a possible solutions to the horizon and flatness problems”* [24], de 1981. Pesquisas anteriores à de Guth já sugeriam um modelo inflacionário do universo primitivo. Um resumo bastante esclarecedor destes estudos encontra-se em [71].

Hoje os problemas da planura, horizonte e monopolos magnéticos não são encarados como defeitos irreparáveis do HBB, pois as condições iniciais exigidas para o universo primordial não são impossíveis de serem realizadas e os monopolos podem ter desaparecido (ou nunca existido) à partir de outros mecanismos. Há algum tempo percebeu-se que a inflação cósmica tem um propósito muito mais interessante: explicar a origem física das flutuações na RCF e, conseqüentemente, a formação das estruturas [6, 61].

Sabe-se que as flutuações primordiais descritas no capítulo anterior foram decisivas na formação de estruturas como galáxias, aglomerados e superaglomerados de galáxias, observadas hoje [19, 72]. No entanto, o modelo cosmológico padrão não fornece uma explicação para sua origem física. Convenientemente, foi mostrado (ver [73]) que a inflação de Guth é capaz de produzir tais perturbações, que, ao cruzarem o raio de Hubble, são congeladas e convertidas em *“sementes primordiais”* [6, 43, 60, 61].

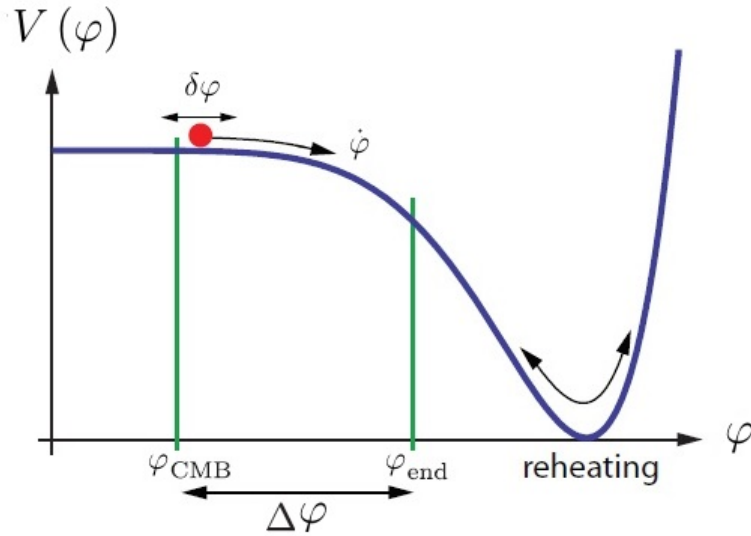
Neste sentido, iremos apresentar um panorama das principais ideias envolvendo o paradigma inflacionário clássico, mostrando como uma fase de evolução quase de Sitter, frações de segundo após o *Big Bang*, gera flutuações métricas no espaço-tempo que, por sua vez, perturbam o conteúdo energético agregado, dando origem às inomogeneidades observadas na RCF. Como um *spin-off*, solucionamos os pseudo-problemas da planura, do horizonte e também do monopolo magnético, permitindo ao universo evoluir a partir de condições iniciais genéricas [60]. Além disso, a inflação também fornece uma previsão testável do espectro de potência gerado pelas flutuações e prevê a geração de ondas gravitacionais primordiais [62].

Mergulhando ainda mais nesta hipótese, a ideia central da inflação consiste em atribuir ao universo primordial uma fase de expansão acelerada, onde a gravidade agiu repulsivamente. Nesta época, a taxa de expansão, $H(t)$, se manteve aproximadamente constante, levando a um crescimento exponencial, abrupto, do fator de escala ($\sim 10^{43}$ vezes para o caso em que o tempo de expansão característico, H^{-1} , é $\sim 10^{-36}$ s) e um espectro de potência primordial quase invariante de escala [4, 6, 15, 17, 24].

Uma gravidade repulsiva pode ser realizada a partir das propriedades do vácuo quântico. Guth percebeu que a expansão exponencial poderia ser produzida por um campo escalar (partículas de spin-0) preso num estado de vácuo falso devido ao super-resfriamento do universo. Assim, a alta densidade de energia do vácuo falso poderia agir como uma constante cosmológica (Λ), com sua pressão negativa e equação de estado constante. No entanto, isto leva a um universo conhecido como “*de Sitter*” [5], com idade infinita, altamente plano e vazio, destruindo todos os sucessos da Cosmologia padrão. Este modelo é conhecido como “velha inflação” [63].

Por outro lado, um campo escalar minimamente acoplado à gravidade e rolando lentamente em direção a um mínimo global do potencial (Figura 4.1), fornece exatamente a inflação que desejamos. Uma opção bastante atraente é, portanto, o campo de Higgs, responsável por conferir massa às partículas elementares do modelo padrão. No entanto, este campo é incapaz de gerar as inomogeneidades presentes na RCF. Nosso melhor palpite é que a inflação foi dirigida por um campo escalar denominado *Ínflaton* [74]. Este regime de inflação é conhecido como “*slow-roll*” (ou “nova inflação”, em contraste à “velha inflação”) e se deve principalmente à Linde [25] e Albrecht e Steinhardt [26].

Figura 4.1: Ilustração gráfica do novo cenário inflacionário de Linde. A inflação inicia quando o potencial $V(\varphi)$ do *ínflaton* domina sobre o termo cinético, no ponto φ_{CMB} , e termina quando esta parcela da energia mecânica total torna-se comparável à da energia potencial, em φ_{end} . Próximo ao final do percurso, as flutuações quânticas $\delta\varphi$ do campo se transformam nas inhomogeneidades da RCF e no *reheating* (reaquecimento), a densidade de energia do *ínflaton* é convertida em radiação.



Fonte: Baumann (2012)

Neste contexto, uma definição decente para a inflação é que trata-se de uma época bem próxima ao *Big Bang*, quando a densidade de energia do vácuo foi, por um breve período, dominante sobre as demais formas de energia, fazendo com que um pequeno *patch* homogêneo esticasse abruptamente e se tornasse o universo observável que conhecemos. Consequentemente, as flutuações quânticas do *ínflaton* são levadas para fora do horizonte de Hubble e congeladas, tornando-se posteriormente as estruturas cósmicas observadas hoje. Conforme o potencial do *ínflaton* rola e atinge seu mínimo global, a inflação termina e o universo segue com sua evolução FLRW padrão [61].

Uma alternativa à inflação é conhecida como as “*Bouncing Cosmologies*”, que sugerem um universo eterno e cujo desdobramento é marcado por três fases de evolução características: uma fase de contração lenta seguida de uma expansão, intercaladas por uma fase de salto. Os detalhes físicos destes modelos são governados pela Cosmologia quântica e os principais estudos envolvendo estes cenários não triviais são decentemente revisados em [75] e [76].

4.1 Resolvendo os problemas do HBB

Conforme dito anteriormente, uma forma muito elegante de resolver os enigmas do HBB é assumindo que, num passado muito distante, o universo foi dominado pela densidade de energia do vácuo quântico. Isto é o mesmo que assumir $\bar{\rho}$ e H aproximadamente constantes durante este período, denominado inflação. Esta situação corresponde à um universo dominado pela constante cosmológica, Λ , com $\bar{p}_\Lambda = -\bar{\rho}_\Lambda$ e solução

$$a(t) = a_e e^{H(t-t_e)}, \quad (4.1)$$

onde t_e é o instante final da inflação e H é avaliado durante o período inflacionário. Evidentemente, $a_e = a(t_e)$. Assim, substituindo (4.1) em (2.40), obtemos

$$d_p(t) \approx H^{-1} (e^{Ht} - 1) \quad (4.2)$$

. Isto significa que, durante a inflação, o horizonte de partículas cresce exponencialmente, enquanto que o de Hubble, H^{-1} , permanece aproximadamente constante. Assim, regiões que hoje não estão em contato causal, poderiam estar durante o período de inflação [61].

O problema da planura também é resolvido com esta solução. Assumindo que no início do período inflacionário $\Omega - 1 \sim \mathcal{O}(1)$, então

$$|\Omega - 1| \simeq \frac{1}{(a_e H)^2} e^{2H(t_e - t)}. \quad (4.3)$$

Assim, temos que $|\Omega - 1| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ (hoje). Isto significa que qualquer curvatura presente no universo primordial é anulada com a expansão exponencial da inflação [63].

A solução acima também resolve os problemas do monopolo magnético e o das perturbações iniciais. De um lado, a expansão drástica do fator de escala produzida pela inflação dilui qualquer partícula relíquia produzida anteriormente, pois suas densidades são reduzidas muito mais rapidamente que a de Λ no universo; convenientemente, é necessário menos inflação para resolver este problema que para os outros [17]. De outro, flutuações quânticas no *ínflaton* são esticadas para escalas galácticas e extragalácticas durante a inflação, mantendo suas amplitudes quase que inalteradas. Assim, a inflação fornece uma origem microfísica para as estruturas nas mais vastas escalas do universo. Além disso, o espectro de perturbações gerado à partir do mecanismo de inflação não é muito sensível à um determinado cenário inflacionário em específico. Por este motivo, podemos fazer previsões bastante robustas para o espectro da RCF [6].

4.2 Dinâmica Clássica da Inflação

Tendo em vista o êxito na seção anterior, nossa missão agora é obter a solução (4.1) por meio dos mecanismos plausíveis da Física. Como já adiantamos, isto pode ser feito tomando-se emprestado o conceito fundamental de campo da Física moderna de partículas. No contexto da inflação, introduzimos o campo escalar *ínflaton*, minimamente acoplado à gravidade e caracterizado pela ação [4, 6, 15]

$$S = \int \left[\frac{1}{2} \varphi^{;\alpha} \varphi_{;\alpha} - V(\varphi) \right] \sqrt{-g} dx^4, \quad (4.4)$$

onde $V(\varphi)$ é a energia potencial associada à φ e $\sqrt{-g} dx^4$ é o elemento de hiper-volume no espaço-tempo curvo quadridimensional relativístico. O correspondente tensor energia-momento é expresso por

$$T^\mu_\nu = \varphi^{;\mu} \varphi_{;\nu} - \left[\frac{1}{2} \varphi^{;\alpha} \varphi_{;\alpha} + V(\varphi) \right] \delta^\mu_\nu, \quad (4.5)$$

lembrando que o símbolo ponto e vírgula indica a derivada covariante com respeito às coordenadas do espaço-tempo quadridimensional relativístico. Esta descrição nos leva às respectivas relações para as densidade e pressão (*backgrounds*) para o *ínflaton*:

$$\bar{\rho} = \frac{1}{2a^2} (\bar{\varphi}')^2 + V, \quad (4.6)$$

$$\bar{p} = \frac{1}{2a^2} (\bar{\varphi}')^2 - V. \quad (4.7)$$

Substituindo as expressões acima na equação (2.21) e tendo em vista o princípio de conservação da energia, $\nabla_\mu T^{\mu 0}$, obtemos as seguintes equações *backgrounds* para a dinâmica do *ínflaton*: a equação de Friedmann,

$$\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi a^2}{3m_{Pl}^2} \left[\frac{1}{2a^2} (\bar{\varphi}')^2 + V(\bar{\varphi}) \right], \quad (4.8)$$

e a equação de Klein-Gordon,

$$\bar{\varphi}'' + 2\mathcal{H}\bar{\varphi}' + a^2 V_{,\varphi} = 0, \quad (4.9)$$

onde a massa de Planck está relacionada com a constante universal da gravitação via $m_{Pl}^2 = \hbar c^5/G$ e $V_{,\varphi} \equiv dV/d\varphi$, com $\hbar$ representando a constante de Dirac (ou de Planck reduzida) e c é a velocidade da luz na ausência de interação. Vale destacar que utilizamos $\hbar = c = 1$ e descartamos o termo de curvatura em virtude das observações.

Em seguida, a condição para expansão acelerada, $\bar{\rho} + 3\bar{p} < 0$, implica em termos uma parcela cinética sempre menor que a potencial, i.e., $(\bar{\varphi}')^2 < V(\varphi)$. Destarte, para que a inflação dure o suficiente, $V(\varphi)$ deve ser suficientemente plano (ver novamente a Figura 4.10) [63]. Matematicamente, isto implica em assumir

$$\frac{1}{2}(\bar{\varphi}')^2 \ll V(\varphi) \quad e \quad |\bar{\varphi}''| \ll 2\mathcal{H}|\bar{\varphi}'|, \quad (4.10)$$

conhecidas como as condições *slow-roll*. A partir de (4.10), obtemos, finalmente, a relação desejada, $\bar{p} \approx -\bar{\rho}$. Portanto, durante a inflação, as respectivas equações de Friedmann e Klein-Gorndon, governando a expansão acelerada, são dadas por [69]:

$$\mathcal{H}^2 \simeq \frac{8\pi a^2 V}{3m_{Pl}^2} \quad e \quad 2\mathcal{H}\bar{\varphi}' \simeq -a^2 V_{,\varphi}. \quad (4.11)$$

Na sequência, um modelo inflacionário específico é parametrizado pela expansão em série de Taylor da energia potencial do *ínflaton* [74]. Os três primeiros termos são conhecidos como parâmetros *slow-roll* [69], dados por

$$\epsilon_V \equiv \frac{m_{Pl}^2}{16\pi} \left(\frac{V_{,\varphi}}{V} \right)^2, \quad (4.12)$$

$$\eta_V \equiv \frac{m_{Pl}^2}{8\pi} \left(\frac{V_{,\varphi\varphi}}{V} \right), \quad (4.13)$$

$$\xi_V^2 \equiv \frac{m_{Pl}^4}{64\pi} \left(\frac{V_{,\varphi\varphi\varphi}}{V^2} \right). \quad (4.14)$$

A partir das definições acima, as condições *slow-roll* podem ser traduzidas simplesmente por $\epsilon_V \ll 1$ e $\eta_V \ll 1$. Em termos destas quantidades, a segunda equação de Friedmann, equação da aceleração, pode ser escrita como

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H}^2 (1 - \epsilon_V), \quad (4.15)$$

ficando claro, então, que o período de inflação desejado só acontece para os valores $\epsilon_V < 1$. Uma vez que a expansão quase de Sitter só ocorre quando $\epsilon_V \ll 1$, a equação da aceleração acima nos diz que $H = \mathcal{H}a^{-1}$ é aproximadamente constante, nos levando, finalmente, à solução inflacionária graciosa (4.1) [63].

Contudo, uma medida muito importante para o sucesso de um modelo inflacionário é a quantidade (ou duração) de inflação. Isto se faz através do que chamamos de número de *e-folds*, representado por N e definido mediante a condição $a/a_e \equiv \exp(-N)$ [60, 63]. Como neste período assumimos que H varia lentamente (não é absolutamente constante),

então o número de *e-folds* antes do final da inflação é dado por

$$N = \int_t^{t_e} H dt. \quad (4.16)$$

Usando as equações de Friedmann e Klein-Gordon (4.11) e depois o primeiro parâmetro *slow-roll*, ϵ_V , obtemos

$$N(\varphi) \simeq \int_{\varphi_e}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{2\epsilon_V(\varphi)}}, \quad (4.17)$$

onde φ_e é o valor do campo avaliado no final da inflação.

É possível obtermos um limite inferior para N sem precisarmos resolver a equação acima. De acordo com (2.44), para que o problema da planura seja resolvido, é necessário que tenhamos $|\Omega_e - 1| \lesssim 10^{-60}$, onde Ω_e é o parâmetro de densidade no final da inflação. Por outro lado, a razão $|\Omega - 1|$ entre os instantes inicial e final da inflação é dado por

$$\frac{|\Omega_e - 1|}{|\Omega_i - 1|} \simeq e^{-2N}. \quad (4.18)$$

Assumindo que $|\Omega_i - 1|$ (isto é, no início da inflação) é da ordem de um, então o número de *e-folds* exigido para que o problema da planura seja solucionado é de $N \gtrsim 60$. Este valor é próximo do necessário para resolvermos o problema do horizonte. Portanto, $N \approx 60$ é tomado como um valor padrão exigido para qualquer novo modelo de inflação [69]. Além disso, as flutuações na RCF são criadas aproximadamente 40 – 60 *e-folds* antes do final da inflação. No entanto, como podemos intuir, o valor preciso destes números depende intrinsecamente da escala de energia da inflação e dos detalhes do reaquecimento pós-inflacionário [60].

4.3 Espectro de Perturbações Escalares

Uma das hipóteses mais fundamentais e promissoras da teoria da inflação é que o campo responsável pela sua execução, o *ínflaton*, é constituído de inúmeras flutuações quânticas, da ordem do comprimento de Planck, que devido à expansão abrupta são esticadas para fora do horizonte de Hubble, permanecendo congeladas até o momento de retornarem para dentro do horizonte, no que é conhecido como segundo cruzamento [43]. Estas flutuações seguem perturbando a métrica do espaço-tempo, que, por sua vez, perturba o conteúdo material agregado, gerando as flutuações presentes na RCF [61].

Sendo assim, deveremos ter

$$\varphi = \bar{\varphi} + \delta\varphi, \quad (4.19)$$

onde $\bar{\varphi}$ (já conhecemos!) corresponde à porção homogênea (*background*) e $\delta\varphi$ são as flutuações propriamente ditas, em torno de $\bar{\varphi}$, do campo *inflaton*. Substituindo (4.19) e (3.7) em (4.5), depois comparando o resultado com (3.17) e, por fim, considerando apenas os termos lineares em $\delta\varphi$, obtemos:

$$\delta\rho = a^{-2} [\bar{\varphi}' (\delta\varphi' - \bar{\varphi}'\phi) + a^2 V_{,\varphi} \delta\varphi], \quad (4.20)$$

$$\delta p = a^{-2} [\bar{\varphi}' (\delta\varphi' - \bar{\varphi}'\phi) - a^2 V_{,\varphi} \delta\varphi], \quad (4.21)$$

$$\delta q_{,i} = -a^{-2} \bar{\varphi}' \delta\varphi_{,i}. \quad (4.22)$$

Não obstante, o princípio de conservação da energia implica nas seguintes restrições para as perturbações escalares lineares durante o período inflacionário [60, 61, 66, 69]:

$$\delta\varphi'' + 2\mathcal{H}\delta\varphi' + k^2 [\delta\varphi - \bar{\varphi}' (B - E')] + a^2 V_{,\varphi\varphi} \delta\varphi - \bar{\varphi}' (3\psi + \phi)' + 2a^2 V_{,\varphi} \phi = 0 \quad (4.23)$$

denominada equação de Klein-Gordon perturbada. As restrições no campo inflacionário, acima, contêm três variáveis desconhecidas: $\delta\varphi$, ϕ e ψ , e devem ser suplementadas pelas equações escalares de Einstein (3.49-3.52).

Podemos definir um invariante para descrever as perturbações escalares geradas pelo *inflaton*. Considerando a perturbação da curvatura escalar no *gauge* espacialmente plano, $\psi_{flat} = \psi + \mathcal{H}\xi^0 = 0$, então a quantidade expressa por

$$\delta\varphi_\psi \equiv \delta\varphi + \frac{\bar{\varphi}'}{\mathcal{H}}\psi, \quad (4.24)$$

é *gauge*-invariante. Em seguida, substituindo as expressões (4.6), (4.7) e (4.20-4.22) em (3.46), e comparando o resultado com (4.24), concluímos que

$$\delta\varphi_\psi = \frac{\bar{\varphi}'}{\mathcal{H}}\mathcal{R}. \quad (4.25)$$

Na perspectiva de um universo plano, utilizando (4.24) e as equações escalares de Einstein (3.49-3.52), a equação de Klein-Gordon perturbada (4.23) pode ser reescrita como [66, 69, 77]

$$\delta\varphi_\psi'' + 2\mathcal{H}\delta\varphi_\psi' + k^2\delta\varphi_\psi + a^2 \left[V_{,\varphi\varphi} - \frac{8\pi G}{a^2} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{a^2 \bar{\varphi}'^2}{\mathcal{H}} \right) \right] \delta\varphi_\psi = 0. \quad (4.26)$$

Introduzindo-se a variável de Mukhanov-Sasaki, $v \equiv a\delta\varphi_\psi$, e também $z \equiv a\bar{\varphi}'/\mathcal{H}$, a equação (4.26) pode ser escrita simplesmente como

$$v'' + \left(k^2 - \frac{z''}{z}\right)v = 0, \quad (4.27)$$

conhecida como a equação de Mukhanov-Sasaki [78, 79]. Expressando a parcela z''/z da massa efetiva em termos das quantidades inflacionárias relevantes, obtemos para primeira ordem nos parâmetros *slow-roll* [80]:

$$\frac{z''}{z} = \mathcal{H}^2 (2 + 5\epsilon_V - 3\eta_V) \simeq \frac{1}{\tau^2} (2 + 9\epsilon_V - 3\eta_V), \quad (4.28)$$

onde a segunda igualdade é obtida considerando-se que $\mathcal{H}^2 \simeq (1/\tau)^2 (1 + 2\epsilon_V)$. Assim, podemos reescrever a equação de Mukhanov-Sasaki, acima, como

$$v'' + \left(k^2 - \frac{v_{\mathcal{R}}^2 - \frac{1}{4}}{\tau^2}\right)v = 0, \quad (4.29)$$

onde $v_{\mathcal{R}} \equiv \frac{3}{2} + 3\epsilon_V - \eta_V$. Esta última relação é conhecida na literatura como a equação de Bessel, cuja a solução geral é uma combinação linear das funções de Hankel de primeiro e segundo tipo (ver Apêndice A), ou seja:

$$v_k(\tau) = \sqrt{|\tau|} \left[C_1 H_{v_{\mathcal{R}}}^{(1)}(k|\tau|) + C_2 H_{v_{\mathcal{R}}}^{(2)}(k|\tau|) \right], \quad (4.30)$$

onde os módulos são adicionados, pois τ é negativo durante a inflação e C_1 e C_2 são constantes a serem determinadas a partir das condições iniciais.

A solução acima só é importante nos limites assintóticos, $k\tau \rightarrow -\infty$ e $k\tau \rightarrow 0$. Impondo a condição inicial do vácuo de Minkowski, $v \rightarrow (1/\sqrt{2k}) \exp(-ik\tau)$, temos que $C_1 = \sqrt{\pi}/2$ e $C_2 = 0$ [60, 61, 63, 69]. Dessa forma, podemos reescrever (4.30) como

$$v_k(\tau) = \frac{\sqrt{\pi|\tau|}}{2} H_{v_{\mathcal{R}}}^{(1)}(k|\tau|). \quad (4.31)$$

Consequentemente, o espectro de potência escalar para $k \gg \mathcal{H}$ dá

$$\mathcal{P}_{\delta\varphi_\psi}(k) \simeq \left(\frac{k}{2\pi a}\right)^2, \quad (4.32)$$

enquanto que no limite de grandes comprimentos de ondas ($k \ll \mathcal{H}$),

$$\mathcal{P}_{\delta\varphi_\psi}(k) \simeq \left[(1 - \epsilon_V) \frac{\Gamma(v_{\mathcal{R}})}{\Gamma(3/2)} \frac{\mathcal{H}}{2\pi a} \right]^2 \left(\frac{k|\tau|}{2} \right)^{3-2v_{\mathcal{R}}}. \quad (4.33)$$

Um espectro de potência dependente do tempo para $k \ll \mathcal{H}$, como o obtido acima, é praticamente inútil, uma vez que as leis da Física são totalmente desconhecidas nesta região. Por este motivo, é conveniente descrever as flutuações escalares geradas pela inflação em termos da perturbação da curvatura comóvel, $\mathcal{R}$, ou da perturbação adiabática da densidade, ζ .

Considerando um universo plano, privilegiado pelas observações, a conservação da energia impõe as seguintes restrições sobre as perturbações $\delta\rho$ e δp :

$$\delta\rho' + 3\mathcal{H}(\delta\rho + \delta p) = k^2\delta q + (\bar{\rho} + \bar{p}) \left[3\psi' - k^2(B - E') \right]. \quad (4.34)$$

Reescrevendo esta equação em termos da perturbação da curvatura em hiper-superfícies de densidade constante, ζ , via (3.47), obtemos:

$$\zeta' = -\mathcal{H} \left(\frac{\delta p^{(en)}}{\bar{\rho} + \bar{p}} + \frac{\Sigma}{\mathcal{H}} \right), \quad (4.35)$$

onde $\delta p^{(en)}$ é a perturbação entrópica da pressão e Σ é o cisalhamento escalar ao longo de linhas de mundo comóveis, definido relativamente à taxa de Hubble conforme por

$$\frac{\Sigma}{\mathcal{H}} \equiv -\frac{k^2}{3\mathcal{H}} \left[\frac{\delta q}{\bar{\rho} + \bar{p}} - (B - E') \right] = -\frac{k^2}{3\mathcal{H}^2} \left\{ \zeta + \Psi \left[1 + \frac{2\bar{\rho}}{9(\bar{\rho} + \bar{p})} \left(\frac{k}{\mathcal{H}} \right)^2 \right] \right\}. \quad (4.36)$$

Portanto, desde que Ψ permaneça finito, a quantidade $\Sigma/\mathcal{H}$ torna-se insignificante quando $k/\mathcal{H} \ll 1$. Consequentemente, para perturbações adiabáticas fora do horizonte de Hubble, ζ é conservada [69]. Em seguida, a partir da relação (3.48), da equação de Poisson generalizada e do *background* (2.21), deduzimos que

$$\mathcal{R} = -\zeta - \frac{2\bar{\rho}}{9(\bar{\rho} + \bar{p})} \left(\frac{k}{\mathcal{H}} \right)^2, \quad (4.37)$$

comprovando que para escalas $k \ll \mathcal{H}$, as perturbações da curvatura comóvel e adiabática da densidade são iguais e conservadas. Agora, utilizando as perturbações nas densidades de momento para o campo escalar (4.22), obtemos

$$\delta\rho_m = a^{-2} [\bar{\varphi}' (\delta\varphi' - \bar{\varphi}'\phi) - (\bar{\varphi}'' - \mathcal{H}\bar{\varphi}') \delta\varphi], \quad (4.38)$$

que para uma equação de estado barotrópica, $p = p(\rho)$, é proporcional à perturbação entrópica (ou não adiabática) da pressão, i.e. [66, 69],

$$\delta p^{(en)} = -\frac{2a^2 V_{,\varphi}}{3\mathcal{H}\bar{\varphi}'} \delta\rho_m. \quad (4.39)$$

Esta equação nos diz que as perturbações no cenário do campo escalar único tornam-se puramente adiabáticas quando $k/\mathcal{H} \rightarrow 0$, uma vez que $\delta\rho_m \propto k^2\Psi$, onde Ψ tem sempre um valor finito. Assim, em escalas super-Hubble, as perturbações $\mathcal{R}$ e ζ , geradas pelo campo inflacionário, são conservadas, iguais e adiabáticas.

Por outro lado, a relação (4.33) é válida por apenas algum tempo após a saída de Hubble, $k \simeq \mathcal{H}$, onde $v_{\mathcal{R}}$ (em termos dos parâmetros *slow-roll*) varia muito lentamente com o tempo de Hubble [69]. Assim, de (4.25) e (4.33), temos que o espectro de potência escalar, primordial, vale

$$\mathcal{P}_s = \left(\frac{\mathcal{H}}{\bar{\varphi}'}\right)^2 \mathcal{P}_{\delta\varphi_\psi} \simeq \left(\frac{\mathcal{H}^2}{2\pi\bar{\varphi}'}\right)_{k=\mathcal{H}}^2, \quad (4.40)$$

para a ordem mais baixa nos parâmetros *slow-roll* [69].

Observe que não existe aproximação na primeira igualdade. A condição $\epsilon_V \ll 1$ é considerada apenas na segunda parte do cálculo. Assim, considerando o espectro de potência de $\mathcal{R}$ (sem aproximação), o índice espectral escalar é dado, em primeira ordem nos parâmetros *slow-roll*, por [63, 69, 77]

$$n_s - 1 = 2\eta_V - 6\epsilon_V, \quad (4.41)$$

cuja variação, α_s , até segunda ordem na aproximação, vale

$$\alpha_s = 16\epsilon_V\eta_V - 24\epsilon_V^2 - 2\xi_V^2. \quad (4.42)$$

Para obter-se a variação do índice espectral, acima, é útil notar que pela regra da cadeia, $(dn_s/d\ln k)_{k=aH} = (\dot{n}_s/H)_{k=aH}$, onde consideramos $(d\ln a/d\ln k)_{k=aH} \simeq 1$, uma vez que a variação de H durante a inflação é muito pequena. Como os parâmetros ϵ_V e η_V são muito menores do que a unidade durante a inflação *slow-roll*, o espectro de perturbações escalares gerado é aproximadamente invariante de escala ($n_s \simeq 1$). Um espectro invariante de escala é denominado um espectro de Harrison-Zel'dovich (HZ) e apresenta variança constante em todas as escalas de comprimento, de modo que pequenos desvios da invariância são considerados assinaturas particulares dos modelos inflacionários. Consequentemente, na aproximação *slow-roll*, $\alpha_s \approx 0$ [60, 61, 62, 63, 69, 77].

4.4 Ondas Gravitacionais Primordiais

As flutuações métricas geradas a partir do mecanismo inflacionário, em discussão, podem ser de dois tipos [77]: as escalares (ou curvaturas), descritas na seção anterior, e as tensoriais, sobre as quais iremos discutir agora. Um segundo aspecto importante decorrente desta abordagem é a produção de ondas gravitacionais primordiais a partir dos modos perturbativos tensoriais. Embora não estejam diretamente relacionados com as flutuações no conteúdo material do universo, as perturbações tensoriais contribuem significativamente para com as inhomogeneidades da RCF [81].

Na Seção 3.6.3 do capítulo anterior obtivemos a equação de onda (3.56) para as duas polarizações do gráviton. Também descobrimos que a variável descrevendo a amplitude das perturbações tensoriais, h , permanece constante fora do horizonte de Hubble. Assim, o espectro de ondas gravitacionais primordiais é bem definido em termos desta quantidade. Reescrevendo (3.56) em termos da variável $u \equiv ah/\sqrt{32\pi G}$, obtemos:

$$u'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right) u = 0. \quad (4.43)$$

Esta equação é idêntica à de Mukhanov-Sasaki, trocando-se apenas z''/z por a''/a . Em seguida, aplicando a aproximação *slow-roll*, vemos que

$$\frac{a''}{a} = \mathcal{H}^2 (2 - \epsilon_V) \simeq \frac{v_T^2 - \frac{1}{4}}{\tau^2}, \quad (4.44)$$

onde $v_T \equiv \frac{3}{2} + \epsilon_V$. Assim, podemos reescrever (4.43) na forma

$$u'' + \left(k^2 - \frac{v_T - \frac{1}{4}}{\tau^2}\right) u = 0, \quad (4.45)$$

que é novamente a equação de Bessel. A solução desta equação nos limites assintóticos importantes, e sujeita às condições iniciais de vácuo de Minkowski, é (4.31) com $v_{\mathcal{R}} \rightarrow v_T$. Assim, o espectro de potência tensorial primordial (3.63), para $k \ll \mathcal{H}$, é dado por

$$\mathcal{P}_T \simeq \frac{64\pi}{m_{Pl}^2} \left[(1 - \epsilon_V) \frac{\Gamma(v_T)}{\Gamma(3/2)} \left(\frac{\mathcal{H}}{2\pi a} \right) \right]^2 \left(\frac{k|\tau|}{2} \right)^{3-2v_T}, \quad (4.46)$$

ou ainda, tomando-se ϵ_V em primeira ordem no expoente da relação acima e desprezível em outros lugares,

$$\mathcal{P}_T \simeq \frac{64\pi}{m_{Pl}^2} \left(\frac{\mathcal{H}}{2\pi a} \right)^2 (k|\tau|)^{-2\epsilon_V} \simeq \frac{64\pi}{m_{Pl}^2} \left(\frac{\mathcal{H}}{2\pi a} \right)_{k=\mathcal{H}}^2. \quad (4.47)$$

O índice espectral das ondas gravitacionais primordiais, calculado diretamente da relação acima via (3.69), dá

$$n_T = -2\epsilon_V, \quad (4.48)$$

caracterizando um espectro vermelho. Consequentemente, sua variação (3.70) vale

$$\alpha_s = -4\epsilon_V (2\epsilon_V - \eta_V). \quad (4.49)$$

Como podemos deduzir, estes parâmetros descrevendo as perturbações durante a inflação não são completamente independentes entre si, mas a razão tensor-escalar, $r \simeq 16\epsilon_V$, calculada substituindo-se (4.47) e (4.40) em (3.66), é proporcional ao índice espectral tensorial, i.e.,

$$r = -8n_T. \quad (4.50)$$

Esta é a primeira relação de consistência para a inflação *slow-roll* de campo único [77]. Sabe-se que esta mesma relação também é encontrada em modelos inflacionários envolvendo “*multo-brana*” [82], “*dílaton*” [83] e teorias de Einstein generalizadas [84]. Já em modelos com multi-campos (por exemplo, [86, 87, 88, 100]), foi preciso modificá-la.

Resumindo o que fizemos até aqui, podemos dizer que um modelo inflacionário *slow-roll*, qualquer, pode ser descrito em termos de quatro parâmetros: a amplitude das perturbações escalares (A_s^2), o índice espectral escalar (n_s), a variação do índice espectral escalar (α_s) e a razão tensor-escalar (r). Em geral, isso significa ter que obter apenas n_s e r . Obviamente, estes parâmetros são restringidos pelas observações, o que implica no descarte de determinadas formas de potenciais $V(\varphi)$ para o *ínflaton*.

4.5 Modelos de Inflação

A origem microfísica da inflação é ainda um mistério. Acredita-se que ela tenha ocorrido numa escala de energia da ordem de 10^{15} GeV , totalmente fora do alcance dos aceleradores de partículas construídos na Terra. Assim, qualquer descrição deste período requer uma apropriada extrapolação das leis físicas conhecidas, nos fazendo recorrer à um ponto de vista essencialmente fenomenológico. Neste contexto, postulamos a forma do potencial $V(\varphi)$ e fazemos previsões observacionais a partir disso. Como vimos anteriormente, os detalhes dos espectros primordiais dependem fundamentalmente da forma da energia potencial postulada para o *ínflaton* [60].

Até agora não discutimos a forma funcional de $V(\varphi)$. Sabemos apenas que do ponto de vista da inflação antiga, Guth supôs que o *inflaton* estivesse preso num vácuo falso metaestável e por meio de uma transição de fase de primeira ordem passou para o estado de vácuo verdadeiro. Porém, este mecanismo não podia ser bem sucedido, como o próprio Guth apontou posteriormente. Em seguida, Linde propôs que o potencial do *inflaton* devesse evoluir lentamente, seguido de uma transição de fase de primeira ordem para finalizar a inflação. Deste novo ponto de vista, surgiu uma grande variedade de modelos inflacionários, entre eles: R^2 , caótico, estendido, lei de potência, híbrido, brana, oscilante, táquion, supersimétrico, superestendido, dýlaton e etc [69, 89].

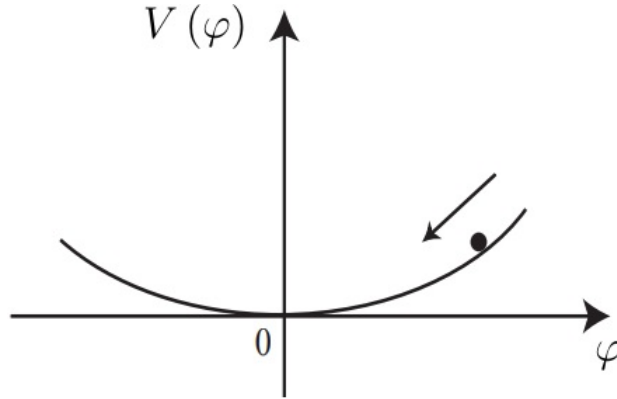
A maioria destes modelos podem ser classificados em duas categorias: o tipo I, onde o *inflaton* é o único campo dirigindo a expansão acelerada, e o tipo II, onde há mais de um campo escalar responsáveis pela inflação. No tipo I, há ainda três subcategorias. Primeiramente temos o tipo Ia, conhecido como modelos de “*large field*”, que começam com um valor grande do campo e diminuem lentamente em direção à um mínimo. A inflação caótica de Linde [90] e a lei de potência [91] se encaixam nesta classe. O tipo Ib é constituído pelos modelos de “*small field*”, pois começam com um valor pequeno do *inflaton* e rolam lentamente em direção à um mínimo. O modelo da inflação nova [25, 26] se encaixa nesta categoria. O tipo Ic é reservado para os modelos híbridos [92], onde a inflação normalmente termina devido a uma transição de fase desencadeada pela presença de um segundo campo escalar e, por fim, alguns modelos não podem ser classificados em nenhum tipo, como a quintessência de Peebles e Vilenkin [93], o Táquion de Fairbairn and Tytgat [94], entre outros [69, 89].

4.5.1 Modelos de *Large Field*

Nos atendo agora à principal característica que define cada modelo inflacionário, ou seja, sua energia potencial de interação, temos que os modelos do tipo Ia são conhecidos por terem sua forma funcional dada, genericamente, por

$$V(\varphi) = V_0 \varphi^n \quad (4.51)$$

(ver a figura 4.2 para uma melhor visualização). Neste sentido, o potencial quadrático na inflação caótica de Linde corresponde à $n = 2$ e $V_0 = m^2/2$, com $\varphi \sim m_{Pl}$. Substituindo

Figura 4.2: Ilustração da energia potencial inflacionária em modelos de *large field*.

Fonte: Bassett et al. (2006)

o potencial resultante neste caso em (4.11), obtém-se:

$$\varphi(t) = \varphi_i - \frac{mm_{Pl}}{\sqrt{12\pi}}t \quad (4.52)$$

e

$$a(t) = a_i \exp \left[\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{m}{m_{Pl}} \left(\varphi_i t - \frac{mm_{Pl}}{\sqrt{48\pi}} t^2 \right) \right], \quad (4.53)$$

onde φ_i e a_i representam as condições iniciais num dado instante $t = t_i$. Assim, teremos

$$\epsilon_V = \eta_V = \frac{m_{Pl}^2}{4\pi} \frac{1}{\varphi^2}. \quad (4.54)$$

Consequentemente, o número de *e-folds* no final da inflação vale

$$N = \frac{2\pi}{m_{Pl}^2} (\varphi_i^2 - \varphi_e^2). \quad (4.55)$$

Estas duas últimas relações nos dizem que o período inflacionário desejado só ocorre enquanto a condição $|\varphi| > m_{Pl}/\sqrt{4\pi}$ for satisfeita e que devemos ter $\varphi_i \gtrsim 3m_{Pl}$ para que a medida total da quantidade de inflação, N , seja superior à 60 *e-folds* [69, 77].

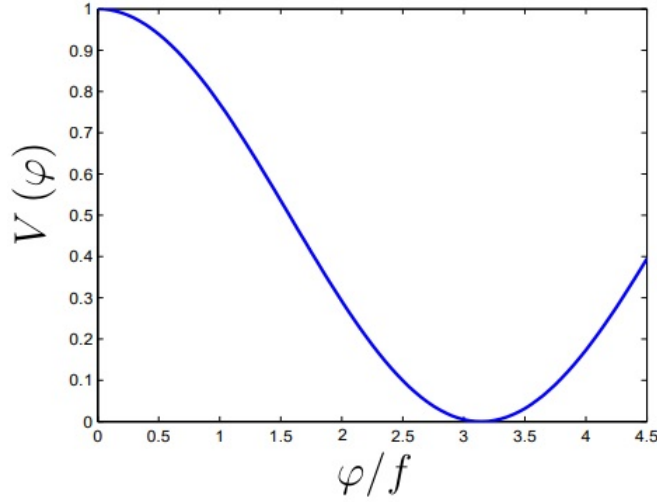
Por outro lado, levando-se em conta os parâmetros *slow-roll* encontrados em (4.54), obtemos [74]:

$$n_s = 1 - \frac{2}{N} \approx 0,97 \quad (4.56)$$

e

$$r = 16\epsilon_V \approx 0,1. \quad (4.57)$$

Isto significa que se o modelo da inflação caótica de Linde, acima, estiver correto, as diferentes observações deverão convergir para os resultados fornecidos em (4.56) e (4.57).

Figura 4.3: Ilustração da energia potencial inflacionária em modelos de *small field*.

Fonte: Bassett et al. (2006)

4.5.2 Modelos de *Small Field*

Os modelos do tipo Ib, que podem surgir a partir de uma quebra espontânea de simetria, são caracterizados pela forma geral da energia potencial, em torno de $\varphi = 0$,

$$V(\varphi) = V_0 \left[1 - \left(\frac{\varphi}{\mu} \right)^n \right]. \quad (4.58)$$

A inflação natural de Freese e colaboradores [95] corresponde à $V(\varphi) = m^4 [1 + \cos(\varphi/f)]$, com $m \sim m_{GUT}$ e $f \sim m_{Pl}$, onde estas duas escalas de massa caracterizam a altura e a largura do potencial do *ínflaton* (Figura 4.3). Neste modelo, desconsiderando-se a criação de partículas pela instabilidade espinodal [96], o número de *e-folds* é expresso por

$$N = \frac{16\pi f^2}{m_{Pl}^2} \ln \left[\frac{\sin(\varphi_e/2f)}{\sin(\varphi_i/2f)} \right]. \quad (4.59)$$

Para que a expressão acima atenda à $N \gtrsim 60$, é necessário que $\varphi_i \lesssim 0,1 m_{Pl}$ para $f \sim m_{Pl}$. Consequentemente, tem-se que

$$n_s \simeq 1 - \frac{m_{Pl}^2}{8\pi f^2} \approx 0,96 \quad (4.60)$$

e

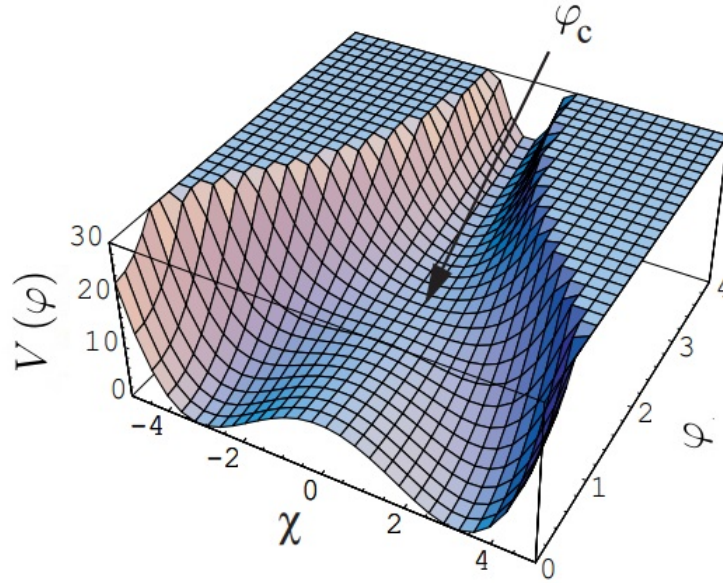
$$r = \frac{\sqrt{32\pi} |\dot{\varphi}|}{3m_{Pl}H} \approx 0,04. \quad (4.61)$$

Portanto, a inflação natural prediz que, em escalas super-Hubble, as ondas gravitacionais inflacionárias são exponencialmente suprimidas pelos modos escalares [97].

4.5.3 Modelos Híbridos

Modelos híbridos pertencem à terceira classe inflacionária (tipo Ic), normalmente correspondentes àqueles que envolvem supersimetria no potencial conduzindo a inflação. Diferentemente dos outros modelos acima, a inflação híbrida normalmente termina ou devido à uma transição de fase de primeira ordem ou devido à presença de um segundo campo escalar [89]. Nos casos em que há outro campo escalar, além do *ínflaton*, dizemos que a energia potencial inflacionária é do tipo “cascata” [69]. Uma visualização simplética disto é apresentada na Figura 4.4, abaixo.

Figura 4.4: Ilustração da energia potencial inflacionária em modelos híbridos com a presença de um segundo campo escalar. Aqui, a inflação inicia com um valor grande do campo, que diminui até atingir um ponto de bifurcação, φ_c , onde torna-se instável, rolando em “cascata” em direção à um mínimo global.



Fonte: Bassett et al. (2006)

Como podemos observar, durante a fase inicial nos modelos híbridos, o potencial efetivo da inflação é descrito pela relação de campo único

$$V(\varphi) = V_0 \left[1 + \left(\frac{\varphi}{\mu} \right)^n \right]. \quad (4.62)$$

À exemplo disto, consideremos a inflação híbrida de Linde, descrita pelo potencial [98]

$$V(\sigma, \varphi) = \frac{\Theta}{4} \left(\sigma^2 - \frac{M^2}{\Theta} \right)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{1}{2} g^2 \varphi^2 \sigma^2. \quad (4.63)$$

No início da inflação, quando φ é relativamente grande, o campo rola em direção ao mínimo em $\sigma = 0$. Neste ponto, temos que $V \simeq (M^4/4\Theta) + (1/2)m^2\varphi^2$. Quando φ torna-se menor que $\varphi_c = M/g$, a massa quadrática efetiva de σ torna-se negativa, causando uma instabilidade taquônica e uma transição de fase com quebra de simetria ocorre. Pode-se verificar que sob as condições $M^2 \gg m^2/(\Theta g^2)$, onde $m^2 \ll H^2$, a região $\varphi > \varphi_c$ corresponde a um estágio de inflação [99].

Sendo assim, o número de *e-folds* medindo a duração da inflação é dado por:

$$N \simeq \frac{2\pi\Theta M^4}{m^2 m_{Pl}^2} \ln \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_c} \right). \quad (4.64)$$

Enquanto isso, o índice espectral inflacionário dá [100]

$$n_s \simeq 1 + \frac{m^2 m_{Pl}^2}{\pi \Theta M^4}, \quad (4.65)$$

onde $H_0^2 = 2\pi\Theta M^4/(3m_{Pl}^2)$. Este modelo tem algo de especial. Deve-se notar que, embora gere um índice espectral sempre maior que a unidade, para os valores numéricos dos parâmetros $g^2 \sim \Theta^{-1} \sim 10^{-1}$, $m \sim 10^2 \text{ GeV}$ (escala eletrofraca) e $M \sim 10^{11} \text{ GeV}$, utilizados no trabalho original [99], obtém-se a excelente aproximação $n_s - 1 = \mathcal{O}(10^{-4})$.

4.6 Não-Gaussianidade Primordial

Conforme vimos até aqui, o fato crucial das inhomogeneidades primordiais na RCF e a presença de estruturas em larga escala levou-nos à concluir que existiram pequenas flutuações em torno do *background* FLRW, que foram amplificadas devido à instabilidade gravitacional no fluido cósmico. A origem destas flutuações está intimamente ligada à existência de uma fase inicial do universo em que o fator de escala evoluiu abruptamente, devido à densidade de energia proveniente de um campo escalar minimamente acoplado à gravidade, denominada Inflação Cósmica. Com o advento do paradigma inflacionário, uma série de enigmas deixados pelo HBB foram, também, solucionados.

Apesar da simplicidade e eficiência da teoria da inflação, o mecanismo pelo qual as perturbações cosmológicas foram geradas ainda não está bem estabelecido. Recentemente, outros mecanismos além do *slow-roll*, padrão, e o *curvaton* foram propostos. Alguns deles são: os cenários de reaquecimento não-homogêneo [101, 102, 103], a inflação fantasma [104] e o mecanismo de oscilação [105], dentre outros que se caracterizam pela ação de mais de

um campo escalar, ou pela quebra de simetria, durante a inflação. O ponto crucial aqui é que a maioria destes cenários alternativos dão origem à perturbações cosmológicas que não são necessariamente gaussianas em sua distribuição espacial. Neste sentido, devemos recorrer à estatísticas não gaussianas afim de incluir estes mecanismos em nossa descrição.

Outra motivação, utilizando, agora, um argumento puramente físico para a inclusão da não-gaussidade é que durante toda sua evolução pós inflacionária as perturbações cosmológicas são alimentadas pela gravidade, que, no contexto das equações de Einstein, é altamente não linear [61].

O grande trunfo da abordagem não gaussiana das perturbações cosmológicas é o fato dela nos permitir descartar uma gama de modelos que da forma convencional são indistinguíveis. Isso tudo a partir da medição de um único parâmetro sinalizando uma possível fonte de não gaussianidade primordial, ou seja, possíveis interações do campo *inflaton*. De fato, assim como acontece no cenário *slow-roll* convencional, os mecanismos alternativos também predizem genericamente um valor do observável n_s muito próximo da unidade. Vale ressaltar que a detecção de grandes não gaussianidades primordiais não excluem totalmente a inflação, apenas seleciona um pequeno número de modelos, isto é, aqueles que são consistentes dentre a gama existente.

A consequência mais imediata em assumir-se que uma certa distribuição não é precisamente gaussiana é que a função de correlação de dois pontos, e portanto o espectro de potência associado, não contém todas as informações relevantes sobre o fenômeno de interesse. O objeto matemático que contempla isto é a função de correlação de três pontos, acompanhado do bispectro da distribuição. Levando em conta a perturbação da curvatura comóvel, $\mathcal{R}$, o bispectro escalar (B_s) é definido mediante a relação [60]

$$\langle \mathcal{R}_{\vec{k}_1} \mathcal{R}_{\vec{k}_2} \mathcal{R}_{\vec{k}_3} \rangle = (2\pi)^3 \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3) B_s(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3). \quad (4.66)$$

O modelo mais simples de não-gaussianidade primordial foi estabelecido via uma correção não linear da perturbação gaussiana, $\mathcal{R}_G$, de tal maneira que

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_G + \frac{3}{5} f_{NL}^{local} (\mathcal{R}_G^2 - \langle \mathcal{R}_G^2 \rangle), \quad (4.67)$$

onde f_{NL}^{local} mede o grau de não-gaussianidade local na perturbação $\mathcal{R}$ [106]. Historicamente, esta parametrização foi estabelecida em termos do potencial newtoniano, Ψ , de modo que $\Psi = \Psi_G + f_{NL}^{local} (\Psi_G^2 - \langle \Psi_G^2 \rangle)$. Desta forma, considerando somente perturbações

adiabáticas em largas escalas, no domínio da matéria, é fácil mostrar que $\Psi = (3/5) \mathcal{R}$, oriundo das condições iniciais exigidas pela inflação, justificando o fator numérico em (4.67) [61]. Relacionando (4.67) com (4.66), é possível deduzirmos que [60]

$$f_{NL}^{local} = \frac{5}{6} \left[\frac{B_s(k_1, k_2, k_3)}{\mathcal{P}_s(k_1) \mathcal{P}_s(k_2) + \mathcal{P}_s(k_2) \mathcal{P}_s(k_3) + \mathcal{P}_s(k_3) \mathcal{P}_s(k_1)} \right]. \quad (4.68)$$

Um aspecto muito importante a respeito do parâmetro de não-gaussianidade é que, no contexto *slow-roll* padrão, como demonstrado por Maldacena [107], f_{NL}^{local} é totalmente suprimido pelos parâmetros *slow-roll*, implicando em $f_{NL}^{SR} = \mathcal{O}(\epsilon_V, \eta_V)$. Mais do que isso, Creminelli and Zaldarriaga [108] demonstraram que, sobre o único pressuposto de que a inflação seja acionada pela ação de um único campo escalar, o limite $k_3 \rightarrow 0$ da correlação de três pontos é suprimida por $1 - n_s$, desaparecendo totalmente para perturbações perfeitamente invariantes de escala. Isto significa que a detecção de uma não-gaussianidade expressiva neste limite implica no descarte total dos modelos de campo único e que devemos considerar interações no *inflaton*.

Por outro lado, como pudemos constatar, o parâmetro de não-gaussianidade, em (4.68), depende exclusivamente dos B_s e $\mathcal{P}_s$. Na prática, obter algebricamente o bispectro de um determinado modelo de inflação pode ser um procedimento muito complicado. Entretanto, existem técnicas muito poderosas para obtenção de f_{NL}^{local} que nos permitem contornar esta situação. Uma delas é o formalismo δN , assunto da próxima seção.

4.7 Formalismo δN

O formalismo δN é uma técnica poderosa que se presta originalmente à calcular a perturbação da curvatura numa variedade de modelos de inflação. Este procedimento consiste em perceber que, em escalas super-Hubble, a perturbação da curvatura comóvel pode ser interpretada como uma perturbação na expansão local. Mais precisamente, $\mathcal{R}$ é igual à perturbação no número de *e-folds*, N , decorrente de perturbações em campos escalares iniciais φ_I , avaliadas no *gauge* espacialmente plano [109]. Ou seja,

$$\mathcal{R} = \delta N \equiv \sum_I \frac{\partial N}{\partial \varphi_I} (\delta \varphi_I)_\psi. \quad (4.69)$$

Do ponto de vista físico, isto acontece pois, em escalas superiores ao raio de Hubble, podemos olhar para o universo como sendo uma coleção muito grande de “pequenos”

universos separados, onde a expansão adquire um caráter local e sua dinâmica é FLRW com muito boa aproximação. Globalmente, as diferentes partes do universo evoluem a partir de valores iniciais distintos, onde para cada “mini-universo” específico há uma solução *background*. Desta forma, podemos entender as perturbações [110].

Definindo-se então $N_I \equiv \partial N / \partial \varphi_I$, podemos reescrever a relação (4.69) como sendo simplesmente $\mathcal{R} = \sum_I N_I (\delta \varphi_I)_\psi$. Levando isto na equação (3.65), vemos que o espectro de potência resultante vale

$$\mathcal{P}_s = \sum_I (N_I)^2 \mathcal{P}_{(\delta \varphi_I)_\psi}. \quad (4.70)$$

Esta abordagem pode ser estendida para incluir os efeitos das perturbações não lineares dos campos nas flutuações métricas. Expandindo-se $\mathcal{R}$ em série de Taylor até o termo não linear de ordem mais baixa, obtemos

$$\mathcal{R} \simeq \sum_I N_I (\delta \varphi_I)_\psi + \frac{1}{2} \sum_{I,J} N_{IJ} (\delta \varphi_I)_\psi (\delta \varphi_J)_\psi + \dots, \quad (4.71)$$

onde $N_{IJ} \equiv \partial^2 N / \partial \varphi_I \partial \varphi_J$. Em seguida, a comparação direta desta equação com (4.68) fornece uma aproximação de segunda ordem para f_{NL} dada por [110]

$$f_{NL}^{local} = \frac{5}{6} \left[\frac{\sum_{I,J} N_I N_J N_{IJ}}{(\sum_I N_I^2)^2} + \ln(kL) \mathcal{P}_s \frac{\sum_{I,J,K} N_{IJ} N_{JK} N_{KI}}{(\sum_I N_I^2)^3} \right], \quad (4.72)$$

onde L é o tamanho da região onde as propriedades estocásticas das perturbações estão sendo investigadas. Isto significa que, se apenas a contribuição de um campo escalar é importante durante a expansão perturbada, haverá então uma contribuição não-gaussiana na perturbação da curvatura comóvel local correspondendo à

$$f_{NL}^{local} = \frac{5}{6} \frac{N_{II}}{N_I^2}, \quad (4.73)$$

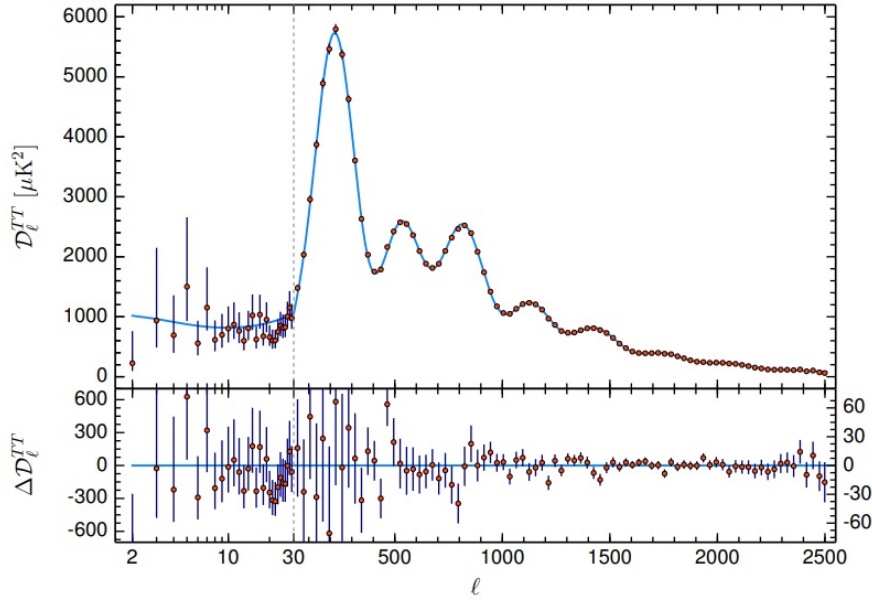
caso as perturbações no campo, propriamente dito, sejam gaussianas [110].

Em particular, no contexto da inflação *slow-roll* de campo único, padrão, onde N é calculado a partir de (4.17), o parâmetro de não linearidade é dado, em termos dos parâmetros *slow-roll*, por [61]

$$f_{NL}^{local} = \frac{5}{6} (\eta_V - 2\epsilon_V). \quad (4.74)$$

Esta expressão nos mostra que se este for o mecanismo correto que gerou as perturbações cosmológicas, então $f_{NL}^{local} \ll 1$ e a não-gaussianidade primordial do universo é algo ínfimo. Em outras palavras, pode-se dizer que as interações no campo *inflaton* foram desprezíveis.

Figura 4.5: Dados *Planck* TT da RCF (pontos vermelhos). A linha sólida azul representa o modelo de concordância cósmica, Λ CDM plano.



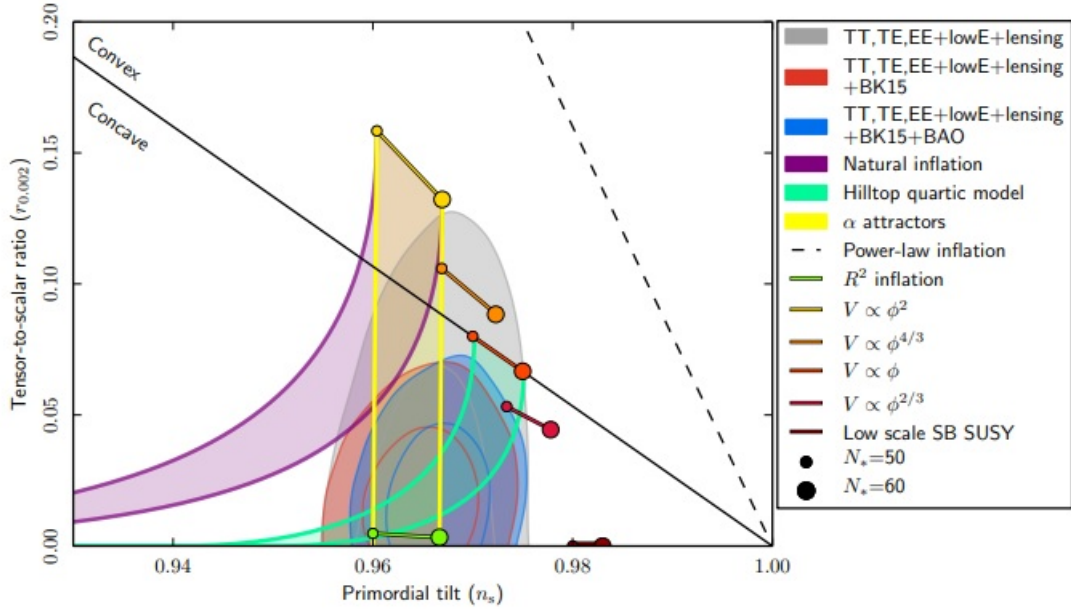
Fonte: Akrame et al. (2018)

4.8 Inflação e Observações

A teoria da inflação não é apenas uma saída elegante para os problemas do HBB. Ela também faz inúmeras previsões que podem ser confrontadas com as observações. Resumindo suas principais previsões, temos: o universo observável deve ser plano; as perturbações produzidas durante a inflação devem ser adiabáticas e aproximadamente gaussianas; perturbações geradas num regime *slow-roll* têm um espectro aproximadamente plano ($n_s \approx 1$); também produzem picos característicos no espectro de potências da RCF, ao passo que têm os modos tensoriais fortemente suprimidos pelos escalares.

Testar todas estas previsões da inflação não é uma tarefa simples, carecendo de um número expressivo de informações e uma excelente ferramenta estatística para refinamento dos dados. Avanços significativos neste campo foram alcançados só recentemente, com o advento da sonda espacial WMAP, seguida do satélite Planck. O levantamento de dados cosmológicos da última missão Planck permitiu, através do espectro de potência da RCF (Figura 4.5), uma caracterização precisa das perturbações primordiais e altamente consistentes com as previsões dos modelos inflacionários mais simples, fornecendo, por exemplo, $n_s = 0,9649 \pm 0,0042$ (em 68% CL) e $r_{0,002} < 0,056$ (em 95% CL) [40, 111].

Figura 4.6: Dados Planck, BAO e BK15 combinados às previsões teóricas de n_s e r , em primeira ordem na aproximação *slow-roll*, de alguns modelos inflacionários. As previsões consideram a escala pivô $k_* = 0,002 \text{ Mpc}^{-1}$ e incluem a incerteza no número de *e-folds*, $50 < N < 60$. As marginalizações usadas são de 68% e 95% CL, assumindo $\alpha_s = 0$.



Fonte: Akrame et al. (2018)

Foram utilizados três métodos distintos para a reconstrução não paramétrica do espectro de potência primordial: a probabilidade penalizada e os *splines* linear e cúbico, todos apontando para uma lei de potência pura, na faixa de escala comóvel $0,005 \text{ Mpc}^{-1} \lesssim k \lesssim 0,2 \text{ Mpc}^{-1}$. Também fora testada a possibilidade de um índice espectral com uma dependência na escala. Para tanto, foram investigadas a variação do índice espectral e a variação da variação disso (ou seja, até a quarta ordem na expansão de Taylor de $\ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}$). Porém, o que os dados mostram é que $\alpha_s = -0,005 \pm 0,013$ e $d^2(n_s) / (d \ln k)^2 = 0$ [111].

Em seguida, utilizando os novos dados de polarização do Planck, a colaboração conseguiu detectar uma contribuição ínfima de não adiabaticidade para as variações de temperatura da RCF de 1,3% para matéria escura fria (CDM), 1,7% para densidade de neutrinos e 1,7% para velocidade de neutrinos, com 95% CL. Para a não-gaussianidade primordial, a análise combinada de temperatura e polarização do Planck produziu um resultado final correspondente à $f_{NL}^{local} = -0,9 \pm 5,1$, à 68% CL [112]. Todos estes resultados são consistentes com as previsões dos modelos inflacionários de campo único, favorecendo o mecanismo *slow-roll* padrão para a geração das perturbações cosmológicas [112].

Capítulo 5

Modelo de Inflação Generalizado

A forma da energia potencial dominante no universo primordial tem sido uma das quantidades físicas mais investigada por físicos de partículas e cosmólogos de uns anos para cá. Esse fenômeno se deve ao sucesso da cosmologia inflacionária, proposta ainda no final do século passado. Nesse contexto, diversos modelos e mecanismos para a inflação foram propostos, sobressaindo-se entre eles o atual cenário padrão *slow-roll*, conduzido por um campo escalar único – nomeado *ínflaton* – e suas minúsculas interações.

No capítulo anterior desenvolvemos todos os princípios da cosmologia inflacionária padrão e discutimos sobre suas principais implicações nos campos teórico e observacional. Confrontamos previsões teóricas dos principais modelos com os resultados de quase duas décadas de observações e chegamos à conclusão de que a realidade parece se adequar àqueles que caracterizam-se por uma forma mais simples, fazendo valer um princípio epistemológico antigo conhecido como a navalha de Occam. Em particular, vimos que os potenciais da forma “lei de potência” se ajustam bem aos dados observacionais do Planck (ver novamente Figura 4.6).

Muitos desses potenciais propostos para o universo inflacionário são motivados pela Física de partículas moderna, ou teoria quântica de campos (TQC), como o potencial de Coleman-Weinberg [113]. Já outros como $m^2\varphi^2$ ou $\lambda\varphi^4$, já abordados neste trabalho, não têm nenhuma relação direta com alguma teoria específica da Física. Em particular, essa última abordagem é bastante razoável, uma vez que não temos ideia de qual teoria da Física de partículas melhor descreve o universo primordial [114].

Nesse sentido, uma forma de energia potencial para o *ínflaton* bastante conhecida na literatura, e que merece atenção particular, é a proposta por Peebles e Ratra [27] e, em seguida, por Wetterich [115] e Ferreira e Joyce [116], entre as décadas de 80 e 90 do século passado. Essa forma de energia potencial trata-se da exponencial simples

$$V(\varphi) \propto \exp(-\lambda\varphi), \quad (5.1)$$

onde λ é um parâmetro real relacionado à escala de energia da inflação.

O fato é que campos escalares com energias potenciais puramente exponenciais são bastante comuns na Física de partículas. Podemos incluir neste rol as teorias de supercordas e supergravidade (modelo de Salam-Sezgin [114]), gravidade com termos de ordem superior (modelo de Shafi-Wetterich [117]) e teorias de Kaluza-Klein com dimensões extras compactadas [119], entre outras.

Baseados na riqueza física presuntiva desses modelos, propomos uma nova forma de energia potencial para o campo *ínflaton*, que generaliza a forma exponencial (5.1), isto é, propomos o potencial deformado

$$V_\kappa(\varphi) \propto \exp_\kappa(-\lambda\varphi) \quad (5.2)$$

dominante durante a era da inflação, onde

$$\exp_\kappa(-\lambda\varphi) \equiv \left(\sqrt{1 + \kappa^2 \lambda^2 \varphi^2} - \kappa \lambda \varphi \right)^{\frac{1}{\kappa}}, \quad (5.3)$$

com κ sendo um parâmetro real de deformação. Pode facilmente ser verificado que, no limite $\kappa \rightarrow 0$, $\exp_\kappa(-\lambda\varphi) \rightarrow \exp(-\lambda\varphi)$. Consequentemente, $V_\kappa(\varphi) \rightarrow V(\varphi)$ e tanto a matemática quanto a física dessas teorias são restauradas. Também, vê-se que $\exp_\kappa(-\lambda\varphi) \exp_\kappa(\lambda\varphi) = 1$, configurando assim uma distribuição estatística generalizada.

Em princípio, para verificarmos a extensão de um simples modelo ou de toda uma teoria física, é sensato inseri-lo dentro de um contexto mais amplo, revelando-se assim novas soluções. Foi assim quando as teorias quântica e relativística generalizaram as ideias clássicas de movimento de Newton e em muitas outras situações emblemáticas da Física. Uma característica excepcional da κ -exponencial (ou exponencial κ -generalizada), acima, é que todos os elementos que vivem no espaço formado por essas funções se somam da mesma forma que os momentos na teoria relativística. Veremos um pouco disso e sobre as demais propriedades matemáticas dessa função na Seção 5.1, à seguir.

5.1 Elementos da κ -Estatística e κ -Álgebra

A κ -estatística (ou estatística κ -deformada) surge no contexto do comportamento cinético não linear observado em muitos sistemas de partículas, visando incrementar uma nova forma de entropia generalizada, fundamentada no princípio de interação cinética (KIP) das partículas e no âmbito da relatividade especial, para descrever a evolução temporal desses sistemas estatísticos. Como o KIP sugere, esta descrição busca apresentar de forma unificada as estatísticas já consagradas, como a estatística padrão de Maxwell-Boltzman [120] e a não extensiva de Tsallis [33]. A forma como tudo isso aparece na Física Estatística pode ser consultada de forma detalhada nas referências originais desenvolvidas por G. Kaniadakis [34, 35, 36].

Embora o espaço das distribuições κ -deformadas seja demasiadamente amplo, nos concentraremos apenas nas principais propriedades da função de interesse (5.3), reescrita de forma genérica como $\exp_{\kappa}(x) \equiv \left(\sqrt{1 + \kappa^2 x^2} + \kappa x\right)^{\frac{1}{\kappa}}$, com $0 \leq \kappa \leq 1$. Assim, defini-se a κ -distribuição

$$f_i = \exp_{\kappa}(-\beta E_i + \beta \mu), \quad (5.4)$$

cujos limites assintóticos reproduzem

$$f_i \sim \begin{cases} \exp(-\beta E_i + \beta \mu), & \beta E_i - \beta \mu \rightarrow 0; \\ \mathcal{N} E_i^{-\frac{1}{\kappa}}, & E_i \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (5.5)$$

Ou seja, recuperamos a distribuição ordinária de Boltzmann no limite de baixas energias, ao passo que ganhamos uma forma de uma lei de potência para sistemas à altas energias.

Por outro lado, a κ -álgebra (ou álgebra κ -deformada), também desenvolvida pelo físico italiano Giorgio Kaniadakis (ver [34]), se ocupa de exprimir o conjunto de relações axiomáticas e as operações ligadas à estatística κ -generalizada, ou seja, ao espaço das funções do tipo (5.3), deformadas pelo parâmetro real κ .

Para expressarmos os principais resultados da κ -álgebra, consideremos $x, y \in \mathbb{R}$ e $-1 < \kappa < 1$. Sendo assim, a κ -soma é definida como

$$x \stackrel{\kappa}{\oplus} y = x \sqrt{1 + \kappa^2 y^2} + y \sqrt{1 + \kappa^2 x^2}, \quad (5.6)$$

e o κ -produto por

$$x \stackrel{\kappa}{\otimes} y = \frac{1}{\kappa} \sinh \left[\frac{1}{\kappa} \sinh^{-1}(\kappa x) \sinh^{-1}(\kappa y) \right]. \quad (5.7)$$

Ambos, κ -soma e κ -produto, obedecem à propriedade distributiva

$$z \otimes_{\kappa} \left(x \oplus_{\kappa} y \right) = \left(z \otimes_{\kappa} x \right) \oplus_{\kappa} \left(z \otimes_{\kappa} y \right) \quad (5.8)$$

e à correspondência

$$x \oplus_{\kappa} x \oplus_{\kappa} \cdots \oplus_{\kappa} x = \frac{1}{\kappa} \sinh(\kappa n) \otimes_{\kappa} x, \quad (5.9)$$

onde n é o número de vezes em que x aparece κ -somado no lado esquerdo da igualdade. Todas estas operações recaem sobre a álgebra ordinária no limite $\kappa \rightarrow 0$ [34].

Por fim, incorporamos à esta seção a forma generalizada dos operadores derivada e integral simples. Já vimos que uma certa quantidade irá se repetir qualquer que seja a operação que executemos neste espaço. Essa quantidade é o fator de Lorentz e a definiremos por $\gamma(x) \equiv \sqrt{1 + \kappa^2 x^2}$. Desta forma, a κ -derivada de uma $f(x)$, com respeito à variável x , é dada por

$$\frac{df(x)}{d_{\kappa}x} \equiv \gamma(x) \frac{df(x)}{dx}, \quad (5.10)$$

enquanto que a k -integral disso, também com respeito à x , é dada por

$$\int d_{\kappa}x f(x) \equiv \int \frac{dx}{\gamma(x)} f(x), \quad (5.11)$$

onde $d_{\kappa}x \equiv dx/\gamma(x)$ é a κ diferencial de x .

Estas são as propriedades mais elementares da κ -matemática a partir das quais é possível estender a teoria para incluir coisas como as κ -transformadas de Mellin e de Laplace, a κ -função gama, a κ -expansão de Taylor, e assim por diante. Para um estudo completo da κ -matemática o leitor deve dirigir-se ao trabalho original de Kaniadakis, na referência [34]. Resumimos algumas propriedades operatórias básicas da κ -exponencial, que podem ser consultadas no Apêndice B.

5.2 Inflação κ -Exponencial

Agora iremos expor as implicações físicas e matemáticas de conceber-se um modelo inflacionário *slow-roll*, caracterizado pelo potencial generalizado (5.3). Calculando-se as derivadas de (5.2) necessárias e substituindo-as imediatamente nas relações (4.12) e (4.13),

obtemos as seguintes expressões para os parâmetros *slow-roll* generalizados:

$$\epsilon_{V_\kappa}(\varphi) = \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda}{\gamma(\varphi)} \right]^2, \quad (5.12)$$

$$\eta_{V_\kappa}(\varphi) = \frac{\lambda^2}{2} \left\{ \frac{1-2\kappa}{\gamma^2(\varphi)} + \frac{2\kappa}{\gamma^3(\varphi) [\exp_\kappa(-\lambda\varphi)]^\kappa} \right\}, \quad (5.13)$$

em unidades de $M_{Pl}^2 \equiv m_{Pl}^2/8\pi = c = 1$. Como esperado, essas expressões se reduzem ao resultado exponencial usual $\epsilon_V \equiv \eta_V = \lambda^2/2$ no limite $\kappa \rightarrow 0$. Diferentemente da abordagem convencional, podemos obter o valor do campo escalar no final da inflação (φ_e), exigindo-se que $\epsilon_{V_\kappa}(\varphi_e) = 1$, ou seja,

$$\varphi_e = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \kappa \neq 0. \quad (5.14)$$

Imediatamente, conclui-se que só há soluções fisicamente aceitáveis para o nosso modelo generalizado quando $|\lambda| > \sqrt{2}$.

Em seguida, utilizando-se as expressões (5.12) e (4.17), obtemos a seguinte relação entre o número de *e-folds* generalizado e o campo:

$$N_\kappa = \frac{\varphi}{2\lambda} [\gamma(\varphi) + 1]. \quad (5.15)$$

Enquanto isso, os índice espectral escalar (n_{s_κ}) e razão tensor-escalar (r_κ) dão:

$$n_{s_\kappa} - 1 = -\lambda^2 \left\{ \frac{1+2\kappa}{\gamma^2(\varphi)} - \frac{2\kappa}{\gamma^3(\varphi) [\exp_\kappa(-\lambda\varphi)]^\kappa} \right\} \quad (5.16)$$

e

$$r_\kappa = \frac{8\lambda^2}{\gamma^2(\varphi)}. \quad (5.17)$$

Essas duas quantidades podem ser relacionadas – eliminando-se o campo – para dar

$$n_{s_\kappa} - 1 = -\frac{r_\kappa}{8} \left[1 - 2\kappa \left(1 - \frac{r_\kappa}{8\lambda^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (5.18)$$

Essa última expressão é extremamente importante, pois nos permite comparar duas quantidades observacionais diretamente, além de ser a generalização da expressão usual, $r = 8(1 - n_s)$, esperada no cenário exponencial usual (equação (5.1)) [69].

O último parâmetro inflacionário relevante, mas que ainda não é bem restringido pelas observações, é o nível de não gaussianidade primordial, determinada por (4.74). Substituindo os parâmetros *slow-roll* (5.12) e (5.13), obtemos:

$$f_{NL_\kappa}^{local} = -\frac{5\lambda^2}{12} \left\{ \frac{1+2\kappa}{\gamma^2(\varphi)} - \frac{2\kappa}{\gamma^3(\varphi) [\exp_\kappa(-\lambda\varphi)]^\kappa} \right\}. \quad (5.19)$$

Combinando esta expressão com a do índice espectral (5.16), encontramos a seguinte relação direta entre esses dois observáveis:

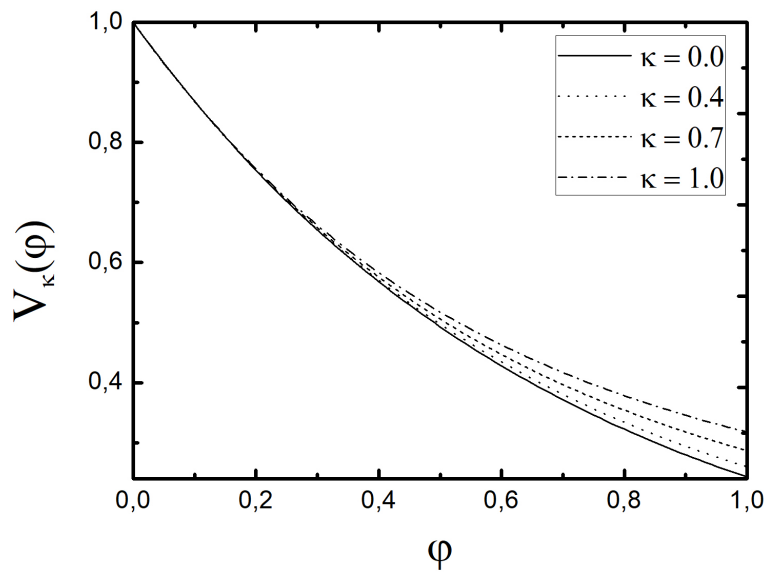
$$f_{NL\kappa}^{local} = \frac{5}{12}(n_{s\kappa} - 1). \quad (5.20)$$

Essa expressão simples nos mostrando haver uma relação linear entre o índice espectral escalar e a não linearidade das perturbações primordiais também é chamada de relação de consistência e é a mesma (a menos de um sinal) obtida em [118]. Em particular, vê-se que $n_{s\kappa} = 1$ implica em $f_{NL\kappa}^{local} = 0$.

5.3 Discussão dos Resultados

Em primeiro lugar, para efeitos de visualização, expomos o comportamento do nosso potencial generalizado, $V_\kappa(\varphi)$, como função de φ , para determinados valores do parâmetro de deformidade, κ . Veja, à seguir, a figura (5.1).

Figura 5.1: Potencial inflacionário generalizado, $V_\kappa(\varphi)$, como função do campo associado, φ (equação (5.2)), para determinados valores do parâmetro κ e valor fixo $\lambda = 1, 5$. Como $\exp_\kappa(-x) = \exp_\kappa(x)$, o potencial generalizado não contempla soluções situadas na área abaixo da solução usual (linha sólida).

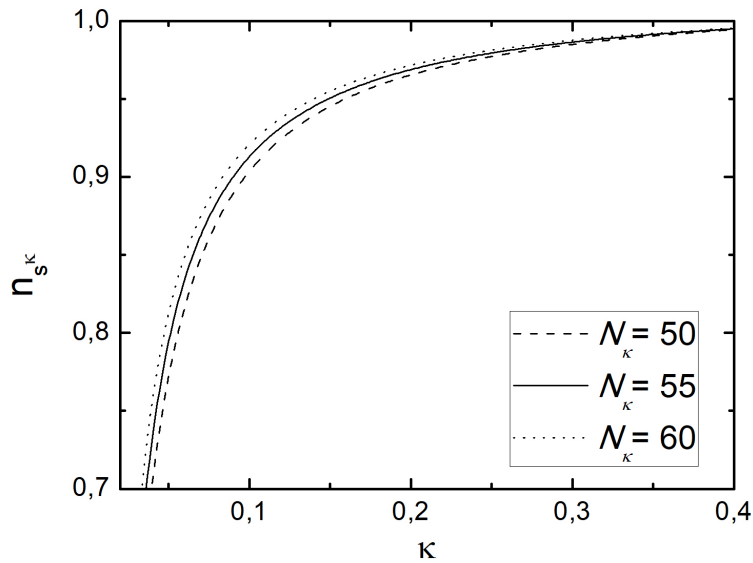


Fonte: Autor (2020)

A partir da figura 5.1 nota-se que, para todo $\kappa \neq 0$, o comportamento lei de potência é evidenciado, enquanto que para $\kappa = 0$ recaímos sobre a curva sólida, onde o potencial exponencial usual é totalmente recuperado. Além disso, é possível notar que conforme consideramos valores maiores de κ , o potencial generalizado torna-se cada vez mais plano. Isso é totalmente consistente com as condições *slow-roll* da inflação.

Apesar das expressões bastante complicadas, o modelo exibe um comportamento altamente condizente com o esperado. Na Figura 5.2 é mostrado o comportamento do índice espectral generalizado, como função do parâmetro κ , para alguns valores de N_κ dentro da incerteza observacional, $50 < N_\kappa < 60$.

Figura 5.2: Índice espectral (n_{s_κ}) como função da deformação (κ) para alguns valores do número de *e-folds* variando no intervalo $N_\kappa = 55 \pm 5$ e $\lambda = 1, 5$.

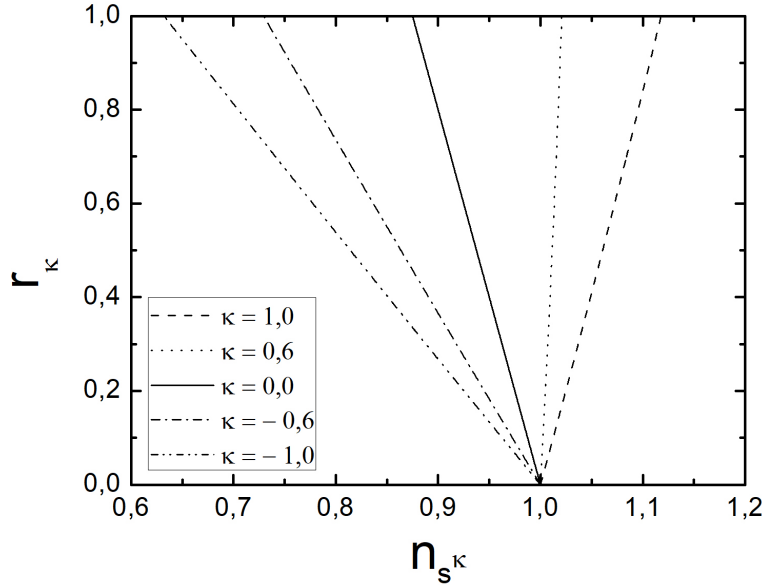


Fonte: Autor (2020)

Podemos observar que, para um determinado intervalo positivo do parâmetro κ , n_s é totalmente consistente com os resultados da colaboração Planck, de que $n_s = 0,9649 \pm 0,0042$, com 68% CL [111].

Por outro lado, um dos aspectos mais importante encontrados em nosso modelo é a família de soluções geradas pela equação (5.18). Esses resultados são melhor interpretados a partir do plano $n_{s_\kappa} - r_\kappa$, plotado na Figura (5.3). Vemos que a solução usual, $\kappa = 0$, prevê um valor para a razão tensor-escalar relativamente grande ($r \simeq 0,28$, em $n_s \simeq 0,965$)

Figura 5.3: Trajetórias para diferentes valores da deformação κ no plano $n_{s\kappa} - r_\kappa$, em primeira ordem na aproximação *slow-roll*. Algo importante a se notar é o fato de que, independentemente do valor atribuído à κ , $n_{s\kappa} = 1$ implica em $r_\kappa = 0$.



Fonte: Autor (2020)

comparado ao limite superior encontrado combinando-se os dados Planck com BICEP2 ($r < 0,056$ com 95% CL [111]). Com a deformação κ , nos aproximamos consideravelmente deste limite. Obtemos, por exemplo, $r_\kappa \simeq 0,08$ (em $n_{s\kappa} \simeq 0,97$), considerando $\kappa = -1$. No entanto, se levarmos em conta somente as medidas do Planck ($r_{0,002} < 0,1$ com 95% CL [111]), a previsão do nosso modelo é consideravelmente melhorada. A previsão torna-se boa, pois não restringe tão drasticamente os valores de κ ao submetermos o modelo ao resultado das observações.

Por fim, vimos que a não gaussianidade primordial, codificada por $f_{NL\kappa}^{local}$, pôde ser relacionada ao índice espectral, $n_{s\kappa}$, através da expressão (5.20). Esta relação é tão simples que dispensa qualquer análise gráfica. Comparando-se a restrição observacional de n_s diretamente com a expressão (5.20), inferimos um nível de não linearidade para as perturbações escalares primordiais correspondente à $f_{NL\kappa}^{local} = -0,014625 \pm 0,00175$. Este resultado está muito abaixo do determinado pela colaboração Planck ($f_{NL}^{local} = -0,9 \pm 5,1$ com 68% CL [112]), porém é totalmente esperado na aproximação *slow-roll* ($f_{NL}^{local} \ll 1$).

Capítulo 6

Considerações Finais e Perspectivas

A inflação cósmica constitui um dos maiores sucessos da Física na interface entre a Física das partículas elementares e a Cosmologia, trazendo inúmeras mudanças na forma com a qual entendíamos o universo primordial. Nos fez compreender, principalmente, de que forma a natureza pôde nos trazer até aqui, ao passo que permanece nos estimulando à investigar novos horizontes.

Apesar de haverem, atualmente, fortes concorrentes, o paradigma inflacionário ainda é o preferido da maioria dos cosmólogos para explicar a origem das perturbações primordiais, que são a base para a explicação das estruturas em largas escalas, bem como a planura, isotropia e homogeneidade do *patch* observável.

O fato é que sem a inflação primordial nossos modelos e equações mais bem sucedidos e confirmados observacionalmente dizem que o universo seria drasticamente diferente do que conhecemos. Em outras palavras, para explicar as características citadas necessitamos de uma breve fase de expansão exponencial do fator de escala nos primeiros instantes do universo. Nossa melhor hipótese é a de que um campo escalar rolando lentamente sobre seu potencial, associado à densidade de energia do vácuo ou à um termo cosmológica variável no tempo, motivou tal fase inflacionária.

As consequências desta suposição foram objeto de estudo em inúmeros trabalhos, vindo à se consolidarem com o advento das principais sondas espaciais, WMAP e Planck. Estes satélites observaram, de forma minuciosa, as flutuações de temperatura da RCFM e fizeram medidas extremamente precisas dos parâmetros adotados na teoria inflacionária

e que são a ponte entre teoria e observação. O resultado disso tem sido, até hoje, a confirmação do paradigma como um todo. Entretanto, devido à uma liberdade de escolha no potencial do *ínflaton* – nome dado ao campo inflacionário destacado – sugerida pelo formalismo, um número considerável de modelos surgiram, todos igualmente bons.

Neste sentido, o que fizemos foi estudar aprofundadamente a teoria da inflação cósmica, passeando pelo modelo padrão da cosmologia – modelo Λ CDM – e pela teoria linear de perturbações cosmológicas. Analisamos alguns dos principais modelos de inflação da literatura disponível e, ao final, propomos um novo, consistindo da generalização do cenário usual $V \propto \exp(-\lambda\varphi)$, proposto entre as décadas de 80 e 90 (mas que é investigado até hoje) no contexto das teorias κ -deformadas. Algo parecido já havia sido feito em [32], no âmbito da estatística não gaussiana de Tsallis. Para tanto, utilizamos o formalismo desenvolvido por Kaniadakis e definimos o potencial inflacionário como (5.2).

Como consequência da nossa κ -generalização, obtivemos as relações (5.12) e (5.13) para os parâmetros inflacionários *slow-roll* e chegamos à uma expressão analítica simples para o campo no final da inflação (expressão (5.14)), restringindo a escala de energia da inflação para $|\lambda| > \sqrt{2}$. Dentro da incerteza $50 < N < 60$ e da medida de n_s da sonda Planck, obtivemos um bom intervalo de flexibilidade para o parâmetro κ (Figura 5.2). Obtivemos também a relação direta entre r e n_s , expressa pela equação (5.18) e plotada na figura (5.3), onde encontramos resultados consistentes para a magnitude dos modos tensoriais primordiais, levando-se em conta apenas os dados do Planck. Vale destacar que, em nossa abordagem, contemplamos também o espectro de Harrison-Zel’dovich, como a solução particular $r = 0$, para todos os valores da deformação variando entre $-1 \leq \kappa \leq 1$. Por último, estudamos a contribuição de não gaussianidade primordial proveniente do modelo e encontramos valores muito inferiores aos estimados pela colaboração Planck, porém compatíveis com um cenário *slow-roll*.

Sendo um trabalho em andamento, visamos, futuramente, restringir ainda mais o parâmetro do modelo (λ), com base numa análise numérica entre os número de *e-folds* (5.15), o parâmetro *slow-roll* (5.12) e o campo φ . Além disso, pretendemos obter o terceiro parâmetro *slow-roll*, $\xi_{V_\kappa}^2(\varphi)$, e assim uma expressão para a variação do índice espectral generalizado, α_{s_κ} . Em seguida, relacioná-lo com o índice espectral escalar para obter o plano $n_{s_\kappa} - \alpha_{s_\kappa}$ e confrontar as soluções com os dados observacionais vigentes.

Referências

- [1] Einstein, A. **Die Feldgleichungen der Gravitation**. Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1915: 844–847.
- [2] Friedman, A. **Über die Krümmung des Raumes**. Zeitschrift Für Physik. 1922; 10: 377–386.
- [3] Hubble, E. **A Relation Between Distance and Radial Velocity Among Extra-Galactic Nebulae**. Proceedings of the National Academy of Sciences. 1929; 15: 168-173.
- [4] Weinberg, S. **Cosmology**. Oxford University Press; 2008. 593.
- [5] Kolb, E. Turner, M. **The Early Universe**. Westview Press; 1994. 596.
- [6] Mukhanov, V. **Physical Foundations of Cosmology**. Cambridge university press; 2005. 421
- [7] Lemaître, G. **A Homogeneous Universe of Constant Mass and Increasing Radius accounting for the Radial Velocity of Extra-galactic Nebulae**. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1931; 91(5): 483–490. Lemaître, G. **Contributions to a British Association Discussion on the Evolution of the Universe**. Nature. 1931; 128(3234): 704–706. Lemaître, G. **The Beginning of the World from the Point of View of Quantum Theory**. Nature. 1931; 127(3210): 706–706.
- [8] Hoyle, F. **A New Model for the Expanding Universe**. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1948; 108(5): 372–382.
- [9] Kragh, H. **Cosmology and Controversy: The Historical Development of Two Theories of the Universe**. Princeton University Press. 1999.

-
- [10] Penzias, A., Wilson, R. **Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s.** ApJ. 1965; 142: 419-421.
- [11] Peebles, J. **Principles of Physical Cosmology.** Princeton university press; 1993.
- [12] Gamow, G. **Expanding Universe and the Origin of Elements.** Phys. Rev. 1946; 70: 572-573. Gamow, G. **The Origin of Elements and the Separation of Galaxies.** Physical Review. 1948; 74.
- [13] Alpher, R., Herman, R. **On the relative Abundance of the Elements.** Phys. Rev. 1948; 74: 1737-1742. Alpher, R., Herman, R., Gamow, G. **Evolution of the Universe.** Nature. 1948; 162: 744-775. Alpher, R., Bethe, H., Gamow, G. **The Origin of Chemical Elements.** Phys. Rev. 1948; 73: 803-804. Alpher, R., Herman, R. **Remarks on the Evolution of the Expanding Universe.** Phys. Rev. 1949; 75: 1089-1095.
- [14] Alpher, R., Follin, J., Herman, R. **Physical Conditions in the Initial Stages of the Expanding Universe.** Physical Review. 1953; 92(6): 1347-1361.
- [15] Dodelson, S. **Modern cosmology.** Elsevier; 2003. 440.
- [16] Zwicky, F. **On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae.** Astrophysical Journal. 1937; 86: 217.
- [17] Liddle, A. **An Introduction to Modern Cosmology.** John Wiley & Sons; 2015. 182.
- [18] Mather, J., Fixsen, D., Shafer, R., Mosier, C., Wilkinson, D. **Calibrator Design for the COBE Far Infrared Absolute Spectrophotometer (FIRAS).** The Astrophysical Journal. 1999; 512(2): 511.
- [19] Peebles, J. **The Large-Scale Structure of the Universe.** Princeton university press. 1980.
- [20] Padmanabhan, T. **Structure Formation in the Universe.** Cambridge university press; 1993.
- [21] Perlmutter, S. et al. **Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae.** The Astrophysical Journal. 1998; 517(2): 565-586.

- [22] Riess, A., et al. **Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant**. The Astronomical Journal. 1998; 116(3): 1009–1038.
- [23] Schmidt, B. et al. **The High Z Supernova Search: Measuring Cosmic Deceleration and Global Curvature of the Universe Using Type Ia Supernovae**. Astrophys. J. 1998; 507: 46-63.
- [24] Guth, A. **Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems**. Physical Review D. 1981; 23(2): 347–356.
- [25] Linde, A. **A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems**. Physics Letters B. 1982; 108(6): 389–393.
- [26] Albrecht, A., Steinhardt, P. **Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking**. Physical Review Letters. 1982; 48(17): 1220–1223.
- [27] Ratra, B., Peebles, J. **Cosmological Consequences of a Rolling Homogeneous Scalar Field**. Physical Review D. 1988; 37(12): 3406–3427. Peebles, J., Ratra, B. **Cosmology with a Time-Variable Cosmological “Constant”**. The Astrophysical Journal. 1988; 325: 17-20.
- [28] David, N., et al. **First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters**. The Astrophysical Journal Supplement Series. 2003; 148.1: 175.
- [29] David, N., et al. **Three-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Implications for Cosmology**. The Astrophysical Journal Supplement Series. 2007; 170(2): 377–408.
- [30] Hinshaw, G., et al. **Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Data Processing, Sky Maps, and Basic Results**. The Astrophysical Journal Supplement Series. 2009; 180(2): 225.

-
- [31] Hinshaw, G., et al. **Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results**. The Astrophysical Journal Supplement Series. 2013; 208(2): 19.
- [32] Alcaniz, J., Carvalho, F. **β -Exponential Inflation**. EPL (Europhysics Letters). 2007; 79(3): 39001.
- [33] Tsallis, C. **Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs Statistics**. J Stat Phys. 1988; 52: 479–487.
- [34] Kaniadakis, G. **Theoretical Foundations and Mathematical Formalism of the Power-Law Tailed Statistical Distributions**. Entropy. 2013; 15(10): 3983-4010.
- [35] Kaniadakis, G. **Non-Linear Kinetics Underlying Generalized Statistics**. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2001; 296(3-4): 405-425.
- [36] Kaniadakis, G. **Statistical Mechanics in the Context of Special Relativity**. Physical Review E. 2002; 66(5).
- [37] Sarkar, S., Pandey, B., Khatri, R. **Testing Isotropy in the Universe Using Photometric and Spectroscopic Data from the SDSS**. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2018; 483(2): 2453–2464.
- [38] Fixsen, D., et al. **The Cosmic Microwave Background Spectrum from the Full COBE FIRAS Data Set**. ApJ. 1996; 473: 576-587.
- [39] Komatsu, E., et al. **Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretations**. The Astrophysical Journal Supplement Series. 2009; 180(2): 330–376.
- [40] Aghanim, N., et al. **Planck 2018 Results. VI. Cosmological Parameters**. 2019; 1807(06209).
- [41] Sandage, A. **Current Problems in the Extragalactic Distance Scale**. ApJ. 1958; 127: 513.
- [42] Schutz, B. **A First Course in General Relativity**. Cambridge university press; 2009.

- [43] Mukhanov, V., Feldman, A., Brandenberger, R. **Theory of Cosmological Perturbations**. Physics reports. 1992; 215(5-6): 203-333.
- [44] Kibble, T. W. B., **Topology of cosmic domains and strings**. Journal of Physics A: Mathematical and General. 1976; 9(8): 1387.
- [45] **Cosmology**. Cosmology.amsterdam. Disponível em: <<http://cosmology.amsterdam/education/cosmology>>.
- [46] **Astronomia Estragaláctica e Cosmologia**. Astro.iag.usp. Disponível em: <<http://astro.iag.usp.br/gastao/estragal/ExtraGal2020.pdf>>.
- [47] Bonnor, W. **Jeans Formula for Gravitational Instability**. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1957; 117(1): 104-117.
- [48] Hwang, J., Noh, H. **Newtonian Limits of the Relativistic Cosmological Perturbations**. ArXiv preprint astro-ph/9701137. 1997.
- [49] Stewart, J. **Advanced General Relativity**. Cambridge: Cambridge University Press; 1991.
- [50] Lifshitz, E. **On the Gravitational Stability of the Expanding Universe**. J. Phys. (USSR). 1946; 10: 116.
- [51] Lifshitz, E., Khalatnikov, I. **Investigations in Relativistic Cosmology**. Advances in Physics. 1963; 12(46): 185-249.
- [52] Hawking, S. **Perturbations of an Expanding Universe**. The Astrophysical Journal. 1966; 145: 544.
- [53] Olson, D. **Density Perturbations in Cosmological Models**. Physical Review D. 1976; 14(2): 327-331.
- [54] Harrison, E. **Normal Modes of Vibrations of the Universe**. Reviews of Modern Physics. 1967; 39(4): 862-882.
- [55] Nariai, H. **The Lagrangian Approach to the Gravitational Instability in an Expanding Universe**. Progress of Theoretical Physics. 1969; 41(3): 686-694.

- [56] Sakai, K. **Density Perturbation and Preferential Coordinate Systems in an Expanding Universe**. Progress of Theoretical Physics. 1969; 41(6): 1461–1469.
- [57] Press, W., Vishniac, E. **Tenacious Myths About Cosmological Perturbations Larger Than the Horizon Size**. Astrophys. J. 1980; 239: 1.
- [58] Bardeen, J. **Gauge-Invariant Cosmological Perturbations**. Physical Review D. 1980; 22(8): 1882.
- [59] Kodama, H., Sasaki, M. **Cosmological Perturbation Theory**. Progress of Theoretical Physics Supplement. 1984; 78: 1-166.
- [60] Baumann, D. **TASI Lectures on Inflation**. ArXiv preprint arXiv:0907(5424). 2009.
- [61] Riotto, A. **Inflation and the Theory of Cosmological Perturbations**. 2018.
- [62] Piattella, O. **Lecture Notes in Cosmology**. UNITEXT for Physics. 2018.
- [63] Hämmäläinen, A. **Cosmic Perturbation Theory and Inflation**. 2015.
- [64] Peter, P. **Cosmological Perturbation Theory**. ArXiv preprint arXiv:1303.2509. 2013.
- [65] Kurki-Suonio, H. **Cosmological Perturbation Theory, Part 1 (Lecture Notes)**. 2015.
- [66] Malik, K., Wands, D. **Cosmological Perturbations**. Physics Reports. 2009; 475(1-4): 1–51. Malik, K., Wands, D. **Gauge-Invariant Variables on Cosmological Hypersurfaces**. ArXiv preprint gr-qc/9804046. 1998.
- [67] Sachs, R. **Gravitational Radiation in Relativity**. Groups and Topology (Les Houches 1963) eds DeWitt C and DeWitt B (New York: Gordon and Breach). 1964.
- [68] Stewart, J., Walker, M. **Perturbations of Space-Times in General Relativity**. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1974; 341(1624): 49–74.
- [69] Bassett, B., Tsujikawa, S., Wands, D. **Inflation Dynamics and Reheating**. Reviews of Modern Physics. 2006; 78(2): 537–589.

-
- [70] Verde, L. **A Practical Guide to Basic Statistical Techniques for Data Analysis in Cosmology**. ArXiv:0712.3028. 2007.
- [71] Olive, K. **Inflation**. Physics Reports. 1990; 190(6): 307-403.
- [72] Mukhanov, V., Chibisov, G. **Quantum Fluctuation and “Nonsingular” Universe**. JETP Letters. 1981; 33: 532-535.
- [73] Porcelli, F., Scibona, G. **Large-Scale Structure Formation via Quantum Fluctuations and Gravitational Instability**. International Journal of Geosciences. 2014; 5: 634-656.
- [74] **Early Universe: Inflation and the Generation of Fluctuations**. Cosmologist.info. Disponível em: <<https://cosmologist.info/teaching/EU/notes-inflation.pdf>>. Acesso em: 18 set. 2019.
- [75] Novello, M., Bergliaffa, S. **Bouncing Cosmologies**. Physics Reports. 2008; 463(4): 127–213.
- [76] Brandenberger, R., Peter, P. **Bouncing Cosmologies: Progress and Problems**. Foundations of Physics. 2017; 47(6): 797–850.
- [77] Vázquez, J., Padilla, L., Matos, T. **Inflationary Cosmology: From Theory to Observations**. ArXiv preprint arXiv:1810.09934. 2018.
- [78] Mukhanov, V. **Quantum Theory of Gauge-Invariant Cosmological Perturbations**. Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1998; 94(1).
- [79] Sasaki, M. **Large Scale Quantum Fluctuations in the Inflationary Universe**. Progress of Theoretical Physics. 1986; 76(5): 1036–1046.
- [80] Stewart, E., Lyth, D. **A more Accurate Analytic Calculation of the Spectrum of Cosmological Perturbations Produced During Inflation**. Physics Letters B. 1993; 302(2-3): 171-175.
- [81] Hu, W., Dodelson, S. **Cosmic Microwave Background Anisotropies**. Annual Review of Astronomy and Astrophysics. 2002; 40(1): 171–216.

-
- [82] Huey, G., Lidsey, J. **Inflation, Braneworlds and Quintessence**. Physics Letters B. 2001; 514(3-4): 217-225.
- [83] Trashorras, M., Nesseris, S., García-Bellido, J. **Cosmological Constraints on Higgs-Dilaton Inflation**. Physical Review D. 2016; 94(6).
- [84] Tsujikawa, S., Gumjudpai, B. **Density Perturbations in Generalized Einstein Scenarios and Constraints on Nonminimal Couplings From the Cosmic Microwave Background**. Physical Review D. 2004; 69(12): 123523.
- [85] García-Bellido, J., Wands, D. **Metric Perturbations in Two-Field Inflation**. Physical Review D. 1996; 53(10): 5437–5445.
- [86] Sasaki, M., Stewart, E. **A General Analytic Formula for the Spectral Index of the Density Perturbations Produced During Inflation**. Progress of Theoretical Physics. 1996; 95(1): 71–78.
- [87] Wands, D., Bartolo, N., Matarrese, S., Riotto, A. **Observational Test of Two-Field Inflation**. Physical Review D. 2002; 66(4).
- [88] Tsujikawa, S., Maartens, R., Brandenberger, R. **Non-Commutative Inflation and the CMB**. Physics Letters B. 2003; 574(3-4): 141–148.
- [89] Kolb, E. **Dynamics of the Inflationary Era**. ArXiv preprint hep-ph/9910311. 1999.
- [90] Linde, A. **Chaotic Inflation**. Physics Letters B. 1983; 129(3-4): 177–181.
- [91] Lucchin, F., Matarrese, S. **Power-Law Inflation**. Physical Review D. 1985; 32(6): 1316–1322.
- [92] Linde, A. **Hybrid Inflation**. Physical Review D. 1994; 49(2): 748–754.
- [93] Peebles, J., Vilenkin, A. **Quintessential Inflation**. Physical Review D. 1999; 59(6).
- [94] Fairbairn, M., Tytgat, M. **Inflation From a Tachyon Fluid?**. Physics Letters B. 2002; 546(1-2): 1–7.
- [95] Freese, K., Frieman, J., Olinto, A. **Natural Inflation with Pseudo Nambu-Goldstone Bosons**. Physical Review Letters. 1990; 65(26): 3233–3236.

-
- [96] Cormier, D., Holman, R. **Spinodal Inflation**. Physical Review D. 1999; 60(4).
- [97] Freese, K. **Natural Inflation**. Annals of the New York Academy of Sciences. 1991; 647: 715-726.
- [98] Linde, A. **Axions in Inflationary Cosmology**. Physics Letters B. 1991; 259(1-2): 38–47.
- [99] Linde, A. **Hybrid Inflation**. Physical Review D. 1994; 49(2): 748–754.
- [100] Garcia-Bellido, J., Linde, A. **Tilted Hybrid Inflation**. ArXiv preprint astro-ph/9612141. 1996.
- [101] Dvali, G., Gruzinov, A., Zaldarriaga, M. **Cosmological Perturbations From Inhomogeneous Reheating, Freeze-out, and Mass Domination**. Physical Review D. 2004; 69(8): 083505.
- [102] Kofman, L. **Probing String Theory with Modulated Cosmological Fluctuations**. ArXiv preprint astro-ph/0303614. 2003.
- [103] Li, S. **Inhomogeneous Reheating Scenario with DBI Fields**. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. 2010; 10(1088/1475-7516).
- [104] Arkani-Hamed, N., et al. **Ghost Inflation**. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. 2004: 001.
- [105] Bartolo, N., Matarrese, S., Riotto, A. **Oscillations During Inflation and the Cosmological Density Perturbations**. Physical Review D. 2001; 64(8).
- [106] Komatsu, E., Spergel, D. **Acoustic Signatures in the Primary Microwave Background Bispectrum**. Physical Review D. 2001; 63(6).
- [107] Maldacena, J. **Non-Gaussian Features of Primordial Fluctuations in Single Field Inflationary Models**. Journal of High Energy Physics. 2003: 013.
- [108] Creminelli, P., Zaldarriaga, M. **Single Field Consistency Relation for the 3-Point Function J. Cosmol. Astropart. Phys.** 2004; 10(6).

-
- [109] Sasaki, M., Stewart, E. **A General Analytic Formula for the Spectral Index of the Density Perturbations Produced During Inflation**. Progress of Theoretical Physics. 1996; 95(1): 71-78.
- [110] Lyth, D., Rodríguez, Y. **Inflationary Prediction for Primordial Non-Gaussianity**. Physical Review Letters. 2005; 95(12).
- [111] Akrami, Y., et al. **Planck 2018 Results. X. Constraints on Inflation**. ArXiv preprint arXiv:1807.06211. 2019.
- [112] Akrami, Y., et al. **Planck 2018 Results. IX. Constraints on Primordial Non-Gaussianity**. ArXiv preprint arXiv:1905.05697. 2019.
- [113] Coleman, S., Weinberg, E. **Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking**. Physical Review D. 1973; 7(6): 1888–1910.
- [114] Halliwell, J. **Scalar Fields in Cosmology with an Exponential Potential**. Physics Letters B. 1987; 185(3-4): 341–344.
- [115] Wetterich, C. **The Cosmon Model for an Asymptotically Vanishing Time-Dependent Cosmological “Constant”**. ArXiv preprint hep-th/9408025. 1994.
- [116] Ferreira, P., Joyce, M. **Cosmology with a Primordial Scaling Field**. Physical Review D. 1998; 58(2).
- [117] Shafi, Q., Wetterich, C. **Inflation with Higher Dimensional Gravity**. Physics Letters B. 1985; 152(1-2): 51-55.
- [118] Celoria, M., Matarrese, S. **Primordial Non-Gaussianity**. ArXiv preprint arXiv:1812.08197. 2018.
- [119] Wetterich, C. **Kaluza-Klein Cosmology and the Inflationary Universe**. Nuclear Physics B. 1985; 252: 309–320.
- [120] Carter, A. **Classical and Statistical Thermodynamics**. Upper Saddle River, Nova Jersey: Prentice Hall; 2001. 432.

Apêndice A

Funções de Hankel

As funções de Hankel, $H_v^{(1,2)}$, são uma classe de soluções da equação de Bessel (4.29), dadas simplesmente como combinações lineares complexas entre as funções de Bessel, J_v , e de Neumann, N_v , e podem ser de primeiro (1) ou de segundo (2) tipo, i.e.:

$$H_v^{(1)}(k|\tau|) \equiv J_v(k|\tau|) + iN_v(k|\tau|) \quad e \quad H_v^{(2)}(k|\tau|) \equiv J_v(k|\tau|) - iN_v(k|\tau|), \quad (\text{A.1})$$

onde

$$J_v(k|\tau|) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+v+1)} \left(\frac{k|\tau|}{2} \right)^{2m+v} \quad (\text{A.2})$$

e

$$N_v(k|\tau|) \equiv \frac{J_v(k|\tau|) \cos(\pi v) - J_{-v}(k|\tau|)}{\sin(\pi v)}, \quad (\text{A.3})$$

para τ definido no intervalo $-\infty \leq \tau \leq 0$.

Para a nossa felicidade, nos interessa saber apenas o comportamento assintótico destas funções. Isto corresponde à

$$\lim_{k|\tau| \rightarrow \infty} H_v^{(1,2)}(k|\tau|) = \sqrt{\frac{2}{\pi k|\tau|}} \exp \left\{ \pm i \left[k|\tau| - \left(v + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right] \right\}, \quad (\text{A.4})$$

no limite indicado, $k|\tau| \rightarrow \infty$, e

$$\lim_{k|\tau| \rightarrow 0} H_v^{(1,2)}(k|\tau|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp \left(\mp i \frac{\pi}{2} \right) \frac{\Gamma(v)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} 2^{v-\frac{3}{2}} (k|\tau|)^{-v}, \quad (\text{A.5})$$

no limite indicado, $k|\tau| \rightarrow 0$.

Na nossa notação (texto principal), utilizamos $v \rightarrow v_{\mathcal{R}}$ para os modos escalares (equação (4.29)), e $v \rightarrow v_T$, para os modos tensoriais (equação (4.45)). Enquanto isso, reservamos v (sem índice) para ser a variável de Mukhanov-Sasaki.

Apêndice B

Funções $\exp_{\kappa}(x)$ e $\ln_{\kappa}(x)$

B.1 Definição

A exponencial generalizada, $\exp_{\kappa}(x)$, segue as mesmas regras de definição que a exponencial usual, $\exp(x)$. Ou seja, procuramos uma $f(x)$ (generalizada) que satisfaz

$$f\left(x \overset{\kappa}{\oplus} y\right) = f(x) f(y), \quad (\text{B.1})$$

ou ainda

$$\frac{df(x)}{d_{\kappa}x} = f(x). \quad (\text{B.2})$$

A função que satisfaz as equações acima, considerando as propriedades operatórias dentro da κ -álgebra, é a exponencial generalizada definida por:

$$\exp_{\kappa}(x) \equiv \left(\sqrt{1 + \kappa^2 x^2} + \kappa x\right)^{\frac{1}{\kappa}}. \quad (\text{B.3})$$

Note que no limite $\kappa \rightarrow 0$, todo este processo se reduz naturalmente à abordagem usual, de modo que a solução torna-se a exponencial ordinária.

Associada à função generalizada $\exp_{\kappa}(x)$, podemos definir uma nova de tal forma que $\ln_{\kappa}[\exp_{\kappa}(x)] = x$. Isto dá

$$\ln_{\kappa}(x) = \frac{x^{\kappa} - x^{-\kappa}}{2\kappa}. \quad (\text{B.4})$$

Note que esta função é a inversa de (B.3).

B.2 Propriedades Básicas

É fácil mostrar que as duas funções definidas acima, $\exp_\kappa(x)$ e $\ln_\kappa(x)$, possuem as seguintes propriedades κ -algébricas:

Tabela B.1: Propriedades básicas de $\exp_\kappa(x)$ e $\ln_\kappa(x)$.

$\exp_\kappa(x)$	$\ln_\kappa(x)$
$\exp_0(x) = \exp(x)$	$\ln_0(x) = \ln(x)$
$\exp_{-\kappa}(x) = \exp_\kappa(x)$	$\ln_{-\kappa}(x) = \ln_\kappa(x)$
$\exp_\kappa(-\infty) = 0^+$	$\ln_\kappa(0^+) = -\infty$
$\exp_\kappa(0) = 1$	$\ln_\kappa(1) = 0$
$\exp_\kappa(+\infty) = +\infty$	$\ln_\kappa(+\infty) = +\infty$
$\exp_\kappa(x) \exp_\kappa(-x) = 1$	$\ln_\kappa(x^{-1}) = -\ln_\kappa(x)$

Também é fácil verificar que algumas destas relações, acima, surgem como casos particulares de outras propriedades mais gerais, i.e.:

$$\exp_\kappa(x) \exp_\kappa(y) = \exp_\kappa\left(x \overset{\kappa}{\oplus} y\right), \quad (\text{B.5})$$

$$[\exp_\kappa(x)]^\epsilon = \exp_{\kappa/\epsilon}(\epsilon x), \quad (\text{B.6})$$

para a exponencial generalizada, e

$$\ln_\kappa(xy) = \ln_\kappa(x) \overset{\kappa}{\oplus} \ln_\kappa(y), \quad (\text{B.7})$$

$$\ln_\kappa(x^\epsilon) = r \ln_{\epsilon\kappa}(x), \quad (\text{B.8})$$

para o logaritmo natural generalizado, qualquer que seja $\epsilon \in \mathbb{R}$.

Um último aspecto importante (se não o mais importante) e que merece menção são os comportamentos assintóticos destas funções. No caso da κ -exponencial, teremos:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \exp_\kappa(x) \sim |2\kappa x|^{\pm 1/|\kappa|}, \quad (\text{B.9})$$

e para o κ -logaritmo,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln_\kappa(x) \sim -\frac{1}{2|\kappa|} x^{-|\kappa|}, \quad (\text{B.10})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln_\kappa(x) \sim +\frac{1}{2|\kappa|} x^{|\kappa|}. \quad (\text{B.11})$$

Note a conformidade com a usual performance do tipo lei de potência. Esta característica é exclusiva da forma generalizada de cada uma das funções.