



Universidade do Estado do Rio Grande do Norte – UERN

Faculdade de Ciências Exatas e Naturais – FANAT

Departamento de Física

Programa de Pós-Graduação em Física

Lázaro Lima de Sales

Uma Abordagem Não-Extensiva da Equação de Saha  
Via Estatística de Tsallis

Mossoró-RN

2019

**Lázaro Lima de Sales**

**Uma Abordagem Não-Extensiva da Equação de Saha  
Via Estatística de Tsallis**

Dissertação apresentada ao programa de  
Pós-graduação em Física da Universidade  
do Estado do Rio Grande do Norte como  
parte dos requisitos para obtenção do tí-  
tulo de MESTRE EM FÍSICA

**Orientador:** Prof. Dr. Fábio Cabral Carvalho

**Coorientadora:** Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Eliângela Paulino Bento

Mossoró-RN  
2019

© Todos os direitos estão reservados a Universidade do Estado do Rio Grande do Norte. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do(a) autor(a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu(a) respectivo(a) autor(a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

**Catálogo da Publicação na Fonte.**  
**Universidade do Estado do Rio Grande do Norte.**

S163a Sales, Lázaro Lima de  
Uma Abordagem Não-Extensiva da Equação de Saha  
Via Estatística de Tsallis. / Lázaro Lima de Sales. -  
Mossoró, 2019.  
80p.

Orientador(a): Prof. Dr. Fábio Cabral Carvalho.  
Coorientador(a): Profa. Dra. Eliângela Paulino Bento.  
Dissertação (Mestrado em Programa de Pós-  
Graduação em Física). Universidade do Estado do Rio  
Grande do Norte.

1. Recombinação primordial. 2. Equação de Saha não-  
extensiva. 3. Estatística de Tsallis. I. Carvalho, Fábio  
Cabral. II. Universidade do Estado do Rio Grande do  
Norte. III. Título.

Lázaro Lima de Sales

Uma Abordagem Não-Extensiva da Equação de Saha Via  
Estatística de Tsallis

Dissertação apresentada ao Programa de  
Pós-graduação em Física da Universidade  
do Estado do Rio Grande do Norte como  
parte dos requisitos para obtenção do tí-  
tulo de MESTRE EM FÍSICA

Aprovada em 13/03/2019

Banca Examinadora

---

Prof. Dr. Fábio Cabral Carvalho

Orientador

UERN

---

Prof. Dr. Raimundo Silva Júnior

Examinador externo

UFRN

---

Prof. Dr. Edésio Miguel Barboza Júnior

Examinador interno

UERN

---

---

**Para Pessoas Especiais:**

---

---

Dedico este trabalho a Deus e à minha família. Especial à minha mãe **Maria do Carmo (Moça)**, a minha avó **Maria Ribeiro dos Santos Lima** (*in memoriam*) e à minha namorada **Natália Martins**.

# Agradecimentos

A **Deus**, criador de todo o Universo, pela minha vida e por todas as conquistas alcançadas.

Ao meu orientador, Prof. Dr. **Fábio Cabral Carvalho**, pela ajuda necessária para a realização deste trabalho. Pelas discussões pertinentes ao tema e por toda a dedicação e trabalho desempenhado na UERN, que para mim, servirá de exemplo para toda a minha vida.

À minha coorientadora, Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup>. **Eliângela Paulino Bento**, pelas contribuições que foram essenciais para desenvolvimento analítico dos resultados, principalmente por ter dedicado tempo para assumir parte da disciplina de tópicos especiais em mecânica estatística e teoria cinética, onde aprendi muito sobre a estatística de Tsallis.

Ao Prof. Dr. **Hidalyn Theodory Clemente Mattos de Sousa**, que desde a minha graduação tem me ajudado muito, principalmente pela paciência, por ter disponibilizado bastante tempo para as discussões sobre esta pesquisa e pelo auxílio computacional necessário para gerar os resultados desta dissertação. Enfim, agradeço por toda sua ajuda!

A toda minha família. Especialmente à minha mãe, **Maria do Carmo Pereira Lima de Sales**, pela motivação, carinho e amor incondicional de mãe.

À minha namorada, **Natália Martins**, pelas orações, incentivos e principalmente pela compreensão, e por estar sempre comigo em todos os momentos da minha vida.

A todos os professores que fizeram parte da minha graduação, especialmente, ao Prof. Dr. **Antonio de Macedo Filho**.

A todos os professores do Departamento de Física da UERN.

A todos os amigos e colegas que conheci e convivi durante o mestrado. Especial ao meu amigo, **Jonatas Arizilanio (Ari)**, pelas proveitosas discussões sobre física e matemática, pela parceria que me fortaleceu em Cristo e ajudou, sem dúvida, na realização deste trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (**CAPES**) pelo apoio financeiro.

*“Pela fé entendemos que os mundos foram criados pela palavra de Deus; de modo que o visível não foi feito daquilo que se vê.”*

**(Hebreus 11.3)**

## Resumo

A recombinação trata-se de uma das mais importantes transições de fase da história térmica do Universo, na qual foram formados os primeiros átomos de hidrogênio neutro. Essa época foi marcada por processos físicos provenientes do forte acoplamento entre matéria e radiação, durando aproximadamente 350 mil anos. Nesta dissertação, estudamos a evolução da ionização residual no período da recombinação via estatística de Tsallis. Para realizar essa investigação, fizemos uma abordagem não extensiva da equação de Saha, buscando observar os efeitos do parâmetro  $q$  no processamento da recombinação. Observamos algumas discrepâncias entre os resultados obtidos e os resultados apresentados na literatura, identificamos uma tensão entre a estatística de Tsallis e a aproximação de Saha. Contudo, evidenciamos os aspectos relevantes observados com a nossa abordagem, como a exibição do comportamento assintótico do grau de ionização próximo de  $10^{-2}$  no final da recombinação, uma característica importante que não é exibida na aproximação de Saha padrão.

**Palavras-chave:** Recombinação primordial, equação de Saha não-extensiva, estatística de Tsallis.

# Abstract

Recombination is one of the most important phase transitions of the thermal history of the Universe, in which the first atoms of neutral hydrogen were formed. This epoch was marked by physical processes advent of strong coupling between matter and radiation, enduring about 350 thousand years. In this dissertation, we studied the evolution of residual ionization in the period of recombination via Tsallis statistic. In order to perform this investigation, we made a nonextensive approach of the Saha equation, seeking to observe the effects of the  $q$ -parameter on the recombination processing. We observe some discrepancies between the results obtained and the results showed in the literature, we identified a tension between the Tsallis statistics and the standard approach. We evidence the relevant aspects observed with our approach such as the asymptotic behavior of the degree of ionization near  $10^{-2}$  at the end of recombination, an important feature that is not displayed by the standard Saha approach.

**Keywords:** Primordial recombination, nonextensive Saha equation, Tsallis statistics.

# Lista de figuras

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 1.1 | História térmica do Universo. A nucleossíntese originou os elementos leves no Universo primordial tais como hidrogênio, hélio e seus isótopos: deutério, trítio e ${}^3H_e$ . . . . .  | 2  |
| 1.2 | O espectro de Planck da radiação cósmica de fundo. . . . .   | 3  |
| 2.1 | Homogeneidade e isotropia do Universo em grandes escalas. Essa seria a visão de um observador situado a uma distância maior que 100 Mpc, abaixo dessa escala, as inhomogeneidades começam a se manifestar. . . . .   | 8  |
| 3.1 | Ilustração para o cálculo da dimensão fractal. . . . .   | 15 |
| 3.2 | Cenário de localização da mecânica estatística não-extensiva. Nas extremidades esquerda e direita da região $q = 1$ , encontram-se, respectivamente, os sistemas não interagentes como o gás ideal e fenômenos críticos associados às transições de fase padrão. Tais sistemas exibem, precisamente no ponto crítico, correlações coletivas que se conectam com os sistemas $q \neq 1$ . Além do extremo direito da região $q \neq 1$ , encontra-se uma região do que podemos considerar como sistemas muito complexos, de modo que a mecânica estatística não-extensiva não consegue descrever. . . . . | 22 |
| 3.3 | Ilustração das propriedades da $q$ -entropia. Para o caso de equiprobabilidades dos microestados (ignorância máxima $p_i = 1/\Omega$ ), $S_q$ corresponde a um máximo (mínimo) para $q > 0$ ( $q < 0$ ). . . . .   | 23 |

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 4.1 | Última superfície de espalhamento. Um observador é envolvido por uma última superfície de espalhamento esférica. Os fótons da RCF viajam em direção a nós a partir da última superfície de espalhamento, sendo continuamente <i>redshifted</i> <sup>1</sup> .  | 31 |
| 4.2 | Ilustração do processo de recombinação. Eras de dominação da radiação e da matéria. Do lado esquerdo, temos o plasma de hidrogênio (matéria altamente carregada) implicando um Universo opaco. Do lado direito, temos o átomo de hidrogênio neutro (matéria neutra) indicando um Universo transparente. . . . .  | 32 |
| 4.3 | Evolução do grau de ionização do Universo. As linhas mostram a ionização residual no início, durante e no fim da recombinação primordial do hidrogênio. . . . .  | 38 |
| 5.1 | Saha <i>versus</i> $q$ -Saha para diferentes valores de $q$ . A curva em vermelho representa a equação de Saha padrão. As curvas em azul, verde e preto representam os resultados para $q$ -Saha. Em (a) e (b) são mostrados os resultados obtidos usando o número de ocupação $\mathcal{N}_i^{\prime(1)}$ . Já em (c) e (d) mostramos os resultados obtidos usando o número de ocupação $\mathcal{N}_i^{\prime(2)}$ . Todas as curvas para $q$ -Saha foram geradas usando a $q$ -densidade de bárions dada pela Eq. (5.41). . . . . | 55 |
| 5.2 | Saha <i>versus</i> $q$ -Saha para diferentes valores de $q$ . Em (e) e (f) são mostrados os resultados obtidos usando o número de ocupação $\mathcal{N}_i^{\prime(1)}$ . Por outro lado, em (g) e (h) mostramos os resultados obtidos usando o número de ocupação $\mathcal{N}_i^{\prime(2)}$ . Todas as curvas para $q$ -Saha mostradas aqui, foram geradas usando a $q$ -densidade de bárions obtida da Subseção 5.4.2. . . . .  | 56 |
| 5.3 | Comparação das curvas de Saha padrão, Peebles (exata) e $q$ -Saha para valores de $q$ que satisfazem $X_e^q \sim X_e = 0,9$ . Em (i) mostramos os resultados para $q > 1$ . Em (j) apresentamos os resultados para $q < 1$ . . . . .   | 58 |
| 5.4 | Evolução do grau de ionização do Universo via $q$ -Saha. A linha azul mostra a ionização residual usando o número de ocupação $\mathcal{N}_i^{\prime(1)}$ (com a $q$ -densidade de bárions dada pela Eq. (5.41)). A linha preta representa a ionização residual usando o número de ocupação $\mathcal{N}_i^{\prime(2)}$ (com a $q$ -densidade de bárions obtida da Subseção 5.4.2). . . . .  | 59 |

# Lista de tabelas

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 3.1 | Propriedades de $q$ -entropia. . . . .  | 21 |
| 4.1 | Alguns dados da era da recombinação. Os índices $i$ e $f$ representam o início e o fim da recombinação. $z$ é o <i>redshift</i> , $t$ é a idade do Universo, $T$ a temperatura da radiação, e $\Delta z_{rec}$ e $\Delta t_{rec}$ são, respectivamente, o intervalo de duração da recombinação em <i>redshift</i> e tempo. O <i>redshift</i> do desacoplamento é designado por $z_{dec}$ . . . . .  | 39 |
| 5.1 | Comparação dos dados da recombinação para Saha, Peebles (exata) e $q$ -Saha. Os índices $i$ e $f$ representam o início e o fim da recombinação. $z$ é o <i>redshift</i> , $t$ é a idade do Universo, $T$ a temperatura da radiação e $\Delta z_{rec}$ e $\Delta t_{rec}$ são, respectivamente, o intervalo de duração da recombinação em <i>redshift</i> e tempo. O <i>redshift</i> para o desacoplamento é designado por $z_{dec}$ . . . . . | 60 |

# Sumário

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>  | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Elementos Básicos da Cosmologia</b>                       | <b>5</b>  |
| 2.1      | Relatividade Geral . . . . .                                 | 5         |
| 2.2      | Princípio Cosmológico . . . . .                              | 7         |
| 2.3      | Universo de Friedmann-Robertson-Walker . . . . .             | 9         |
| <b>3</b> | <b>Aspectos Gerais da Mecânica Estatística Não-Extensiva</b> | <b>12</b> |
| 3.1      | Introdução . . . . .   | 12        |
| 3.2      | A Origem do Parâmetro Entrópico $q$ . . . . .                | 14        |
| 3.3      | A Entropia de Tsallis e Suas Propriedades . . . . .          | 18        |
| 3.4      | Conexão com a Termodinâmica . . . . .                        | 22        |
| 3.5      | A $q$ -álgebra . . . . .                                     | 26        |
| 3.5.1    | Operações Generalizadas . . . . .                            | 26        |
| 3.5.1.1  | Definições Preliminares . . . . .                            | 26        |
| 3.5.1.2  | Operações com a $q$ -exponencial . . . . .                   | 27        |
| 3.5.1.3  | Operações com o $q$ -logaritmo . . . . .                     | 28        |
| 3.5.2    | Propriedades dos $q$ -operadores . . . . .                   | 29        |
| 3.5.2.1  | Aditividade . . . . .  | 29        |
| 3.5.2.2  | Multiplicação . . . . .                                      | 29        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>4</b> | <b>A Recombinação Primordial do Hidrogênio</b>                   | <b>30</b> |
| 4.1      | Introdução . . . . .   | 30        |
| 4.2      | A Equação de Boltzmann e a Condição de Equilíbrio . . . . .      | 32        |
| 4.3      | Recombinação . . . . .   | 35        |
| 4.3.1    | A Equação de Saha: Uma Aproximação . . . . .                     | 35        |
| 4.3.2    | A Solução Exata . . . . .  | 37        |
| <b>5</b> | <b>Abordagem Não-Extensiva da Recombinação</b>                   | <b>40</b> |
| 5.1      | Preliminares . . . . .   | 40        |
| 5.2      | Determinação da $q$ -Densidade de Número de Partículas . . . . . | 42        |
| 5.2.1    | $q$ -Densidade de Número para $\mathcal{N}'_i^{(1)}$ . . . . .   | 42        |
| 5.2.2    | $q$ -Densidade de Número para $\mathcal{N}'_i^{(2)}$ . . . . .   | 43        |
| 5.3      | A Equação de Saha Não-Extensiva . . . . .                        | 44        |
| 5.4      | Determinação da Densidade de Bárions Generalizada . . . . .      | 47        |
| 5.4.1    | $q$ -Densidade de Bárions Usando $\rho_b^{(0),q}/m_p$ . . . . .  | 47        |
| 5.4.2    | $q$ -Densidade de Bárions Usando $\eta_q$ . . . . .              | 49        |
| 5.5      | Um Tratamento Alternativo Para a Equação de Saha . . . . .       | 51        |
| 5.6      | Resultados e Discussões . . . . .                                | 53        |
| <b>6</b> | <b>Considerações Finais e Perspectivas</b>                       | <b>61</b> |
|          | <b>Referências Bibliográficas</b>                                | <b>63</b> |
| <b>A</b> | <b>Alguns Limites Relevantes na Estatística de Tsallis</b>       | <b>70</b> |
| <b>B</b> | <b>Soluções Analíticas de Integrais Úteis</b>                    | <b>73</b> |

# Capítulo 1

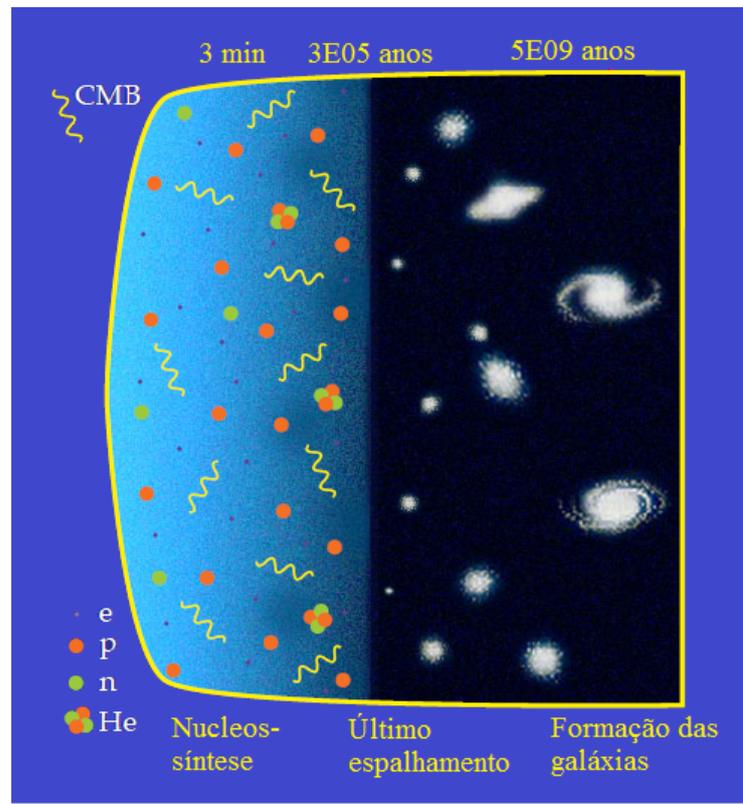
## Introdução

O Universo é repleto de estruturas em diversas escalas tais como estrelas, planetas, sistemas solares, galáxias, aglomerados de galáxias, superaglomerados de galáxias e grandes vazios. Com essa vastidão de estruturas, a Cosmologia surgiu com o intuito de explicar a forma, a composição, a estrutura e a evolução do Universo desde seu estado inicial até os dias atuais. A Cosmologia moderna tem como bases a Relatividade Geral e o princípio cosmológico, que são os ingredientes essenciais para o estabelecimento do Modelo Cosmológico Padrão (MCP). Os três pilares observacionais que fortalecem a Cosmologia moderna são: (i) a expansão do Universo comprovada pelo diagrama de Hubble; (ii) a abundância dos elementos leves prevista pela nucleossíntese primordial; e (iii) a radiação cósmica de fundo em micro-ondas (RCF) [1]. Uma breve ilustração da história térmica do Universo é mostrada na Figura 1.1.

Poucos instantes após o Universo começar a expandir (*Big Bang*), sua evolução térmica alcançou a fase de nucleossíntese primordial, que iniciou quando o plasma cósmico esfriou para uma temperatura de aproximadamente 1 Mev. Um pouco antes disso, não era possível formar os núcleos que originam o que conhecemos como átomos. Quando algum núcleo era formado, rapidamente era destruído por fótons altamente energéticos. Quando o Universo esfriou abaixo de 1 Mev, os núcleos começaram a se formar possibilitando a formação dos átomos de hidrogênio, hélio, deutério, trítio, etc [1, 2]. Após a nucleossíntese do *Big Bang*, o conteúdo material do Universo era composto de núcleos (prótons e nêutrons), elétrons e fótons. Neste cenário, quando o Universo tinha aproximadamente 320 mil anos, a evolução térmica alcançou a época da recombinação primordial do hidrogênio

[3]. Essa época permitiu que prótons e elétrons se combinassem para formar o átomo de hidrogênio neutro. O fim dessa época é conhecido como a última superfície de espalhamento, que marca o momento em que os fótons da RCF passam a viajar livremente pelo Universo. A radiação emitida pela última superfície de espalhamento foi detectada pela primeira vez pelos rádio-astrônomos Penzias e Wilson, em 1965 [4].

**Figura 1.1:** História térmica do Universo. A nucleossíntese originou os elementos leves no Universo primordial tais como hidrogênio, hélio e seus isótopos: deutério, trítio e  ${}^3\text{H}_e$ .



Fonte: Internet<sup>1</sup>

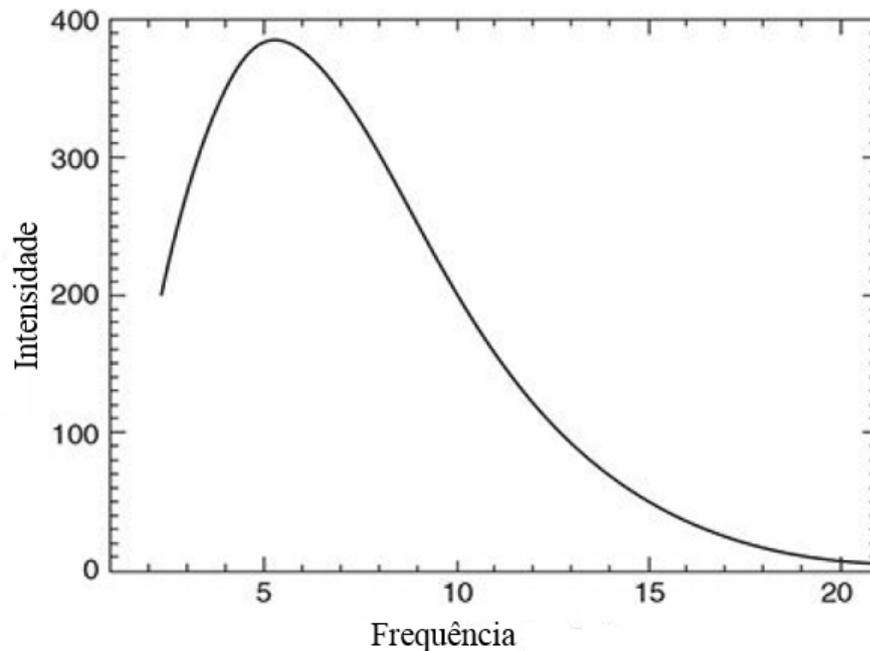
As observações mostram que o fundo de radiação cósmica é um corpo negro cuja temperatura é  $T = 2,73 \text{ K}$ . Essas observações estão de acordo com as previsões teóricas de Gamow e colaboradores [5, 6, 7, 8, 9, 10], nas quais a temperatura prevista na época era de  $T = 3 \text{ K}$ .

A Figura 1.2 mostra o espectro de Planck da radiação cósmica de fundo. A curva resulta dos dados obtidos do experimento FIRAS (*Far Infrared Absolute Spectrophotometer*), a bordo do satélite COBE (*Cosmic Background Explorer*) [11]. A análise detalhada

<sup>1</sup>Disponível em: <http://background.uchicago.edu/~whu/beginners/brief.html>. Acesso em Jan. 2019.

das propriedades físicas da radiação cósmica de fundo possibilita compreender a evolução térmica do Universo desde a última superfície de espalhamento.

**Figura 1.2:** O espectro de Planck da radiação cósmica de fundo.



Fonte: (FIXSEN, 1996)

Neste trabalho, daremos ênfase a fase da recombinação primordial do hidrogênio, que foi marcada por processos físicos provenientes da interação entre matéria bariônica e radiação [3, 12, 13, 14]. Uma forma de acompanhar o processamento da recombinação é através da equação de Saha. Para derivar a equação de Saha, supomos que sejam produzidos apenas átomos de hidrogênio (desprezando a pequena fração de hélio) e consideramos os números de ocupação para hidrogênio, prótons e elétrons. Além disso, supomos que essas espécies estejam tanto em equilíbrio térmico quanto em equilíbrio químico. Contudo, a equação de Saha apresenta alguns problemas na descrição da evolução do grau de ionização do Universo. Teoricamente esses problemas foram contornados por Peebles, que apresentou uma solução exata para a equação de Boltzmann configurada para uma descrição adequada da recombinação [3, 14].

O objetivo dessa dissertação é estudar o comportamento do grau de ionização do Universo através de uma abordagem não-extensiva da equação de Saha. Para este fim, usaremos as técnicas da mecânica estatística não-extensiva apresentada por Tsallis, em 1988 [15]. Nessa estatística, devido a indefinições acerca da forma adequada para o número

de ocupação generalizado, nós escolhemos duas formas já apresentadas na literatura. Tendo feito essas escolhas, é possível determinar todas as grandezas físicas pertinentes a recombinação no contexto não-extensivo. Não menos importante, apresentamos um tratamento não-extensivo alternativo para a equação de Saha, no qual impomos, por simplicidade, o potencial químico das espécies igual a zero. Para isso, seguimos os passos realizados por Pessah et al [16].

O objetivo principal deste trabalho é corrigir a curva de Saha por meio da estatística de Tsallis no sentido de se aproximar da solução proposta por Peebles. Em outras palavras, pretendemos ajustar a curva de Saha através do parâmetro entrópico  $q$ , buscando melhorias na descrição da recombinação primordial pela abordagem não-extensiva. Em nossa abordagem, foi necessário impor uma condição para o cálculo das  $q$ -densidades de número de partículas: calculamos todas as grandezas físicas concernentes a recombinação, no equilíbrio, isto é, configurando o potencial químico das partículas igual a zero. Sem essa imposição, uma descrição da recombinação pela abordagem não-extensiva, torna-se complexa.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: No capítulo 2, revisamos as bases da Cosmologia moderna, enfatizando a Teoria da Relatividade Geral e o princípio cosmológico. No capítulo 3, apresentamos uma breve introdução à mecânica estatística não-extensiva de Tsallis, mostrando os aspectos gerais dessa estatística. A época da recombinação primordial é mostrada no capítulo 4, onde expomos as informações necessárias para compreender os processos físicos dessa importante fase térmica do Universo. No capítulo 5, veremos todo o processo de construção da abordagem proposta por este trabalho, no qual apresentamos quatro formas para equação de Saha não-extensiva, além de mostrar os resultados e discussões. Finalmente, as considerações finais e perspectivas serão apresentadas no capítulo 6.

# Capítulo 2

## Elementos Básicos da Cosmologia

O Universo é composto de matéria gravitante (bariônica e escura), radiação e possivelmente de uma componente exótica denominada de energia escura. Para acompanhar a evolução dessas componentes é necessário construir um arcabouço teórico capaz de descrever com eficiência a evolução do Universo. Os ingredientes essenciais para essa descrição são: uma teoria de gravitação consistente e o princípio cosmológico. Atualmente a teoria de gravitação mais bem sucedida e amplamente adotada pela comunidade científica é a Relatividade Geral de Albert Einstein (1879-1955). A seguir, apresentaremos sucintamente os aspectos gerais da Relatividade Geral e do princípio cosmológico.

### 2.1 Relatividade Geral

A Relatividade Geral é indispensável para a compreensão da Cosmologia moderna. Embora seja possível construir uma abordagem newtoniana para a Cosmologia em um Universo tipo Friedmann-Robertson-Walker (FRW), e sua descrição tenha sido muito útil para revelar aspectos essenciais do problema, a Relatividade Geral mudou completamente a nossa forma de compreender o Universo [17]. Nesta Seção, nos restringimos apenas a descrição relativística. Para uma noção básica sobre a Cosmologia newtoniana ver [18].

Na Teoria da Relatividade Geral o tempo deixa de ser um parâmetro absoluto (visão newtoniana) e ganha o *status* de coordenada, de modo que uma nova entidade física emerge: o espaço-tempo. Um ponto importante dessa teoria é que ela recupera a versão newtoniana no limite de campo fraco [19]. Na realidade, a Relatividade Geral é

uma generalização da Mecânica de Newton para estudar o movimento de corpos em um espaço-tempo curvo<sup>1</sup>.

A forma de medir a distância entre dois eventos em um espaço-tempo (quadrimensional) curvo é através da métrica,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu , \quad (2.1)$$

onde  $g_{\mu\nu}$  é tensor métrico levando em conta as possíveis deformações. Os índices  $\mu$  e  $\nu$  designam as componentes temporais e espaciais da métrica. O papel da métrica é transformar a distância coordenada em distância física. Em Cosmologia ela faz previsões quantitativas em um Universo em expansão [1]. As próximas equações serão apresentadas usando o sistema de unidades naturais, a saber,  $c = 1$ .

As equações de campo de Einstein em um espaço-tempo curvo são dadas por

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} , \quad (2.2)$$

em que o tensor de Einstein é definido por

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathcal{R} g_{\mu\nu} . \quad (2.3)$$

Nessas expressões,  $R_{\mu\nu}$  é o tensor de curvatura (ou tensor de Ricci),  $\mathcal{R}$  é o escalar de Ricci ( $\mathcal{R} \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ ),  $T_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momento e  $G$  é a constante de Newton. Os índices  $\mu$  e  $\nu$  podem assumir os valores 0, 1, 2 e 3<sup>2</sup> formando um conjunto de 16 equações diferenciais em derivadas parciais. A simetria dos índices dos tensores permite reduzir esse conjunto para 10 equações.

O tensor de curvatura pode ser determinado através dos símbolos de Christoffel da seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^\alpha + \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\beta - \Gamma_{\beta\nu}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\beta , \quad (2.4)$$

---

<sup>1</sup>Na Relatividade Especial o espaço-tempo é plano, mas não euclidiano, de modo que é possível sincronizar todos os relógios em cada ponto desse espaço. Em outras palavras, todos os relógios variam com a mesma taxa de tempo em relação ao relógio da origem. Já em um espaço-tempo curvo, os relógios em cada ponto variam à taxas diferentes devido a presença de um campo gravitacional não uniforme [19].

<sup>2</sup>Quando  $\mu = \nu = 0$ , temos a componente temporal das equações de Einstein. Quando os índices assumem os valores 1, 2 e 3 representam as componentes espaciais das equações de Einstein,  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.

onde “,” implica em uma derivada parcial, isto é,  $\Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha = \partial\Gamma_{\mu\nu}^\alpha/\partial x^\alpha$ . Os símbolos de Christoffel são determinados por meio do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , de modo que

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}). \quad (2.5)$$

O lado esquerdo da expressão (2.2) representa o comportamento geométrico do espaço-tempo, enquanto que o lado direito da mesma expressão mostra a fonte do campo gravitacional, especificamente o tensor energia-momento, o qual adota a forma  $T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, p, p, p)$  para um fluido perfeito em repouso<sup>3</sup>.

A partir das equações apresentadas aqui, é possível acompanhar a evolução de todas as quantidades físicas de interesse cosmológico, desde que a equação de estado seja conhecida, como veremos mais adiante.

## 2.2 Princípio Cosmológico

O avanço tecnológico principalmente no desenvolvimento de telescópios (terrestres e espaciais) e sondas nos permitiu investigar com mais detalhes o Universo visível e até mesmo ter acesso a informações do Universo primordial. A Cosmologia tem se fortalecido nas últimas décadas devido as fortes evidências observacionais que estão de acordo com os modelos teóricos. O suporte observacional revelou uma característica interessante sobre o Universo: ele é homogêneo e isotrópico em escalas suficientemente grandes, a partir de 100 Mpc<sup>4</sup>. A rigor, para verificar isso, escolhemos uma região do espaço e comparamos a densidade média dessa região com a densidade total do Universo, de modo que a densidade média da região escolhida dever ser menor do que a densidade do Universo como um todo [20]. Assim, somente quando o diâmetro da região escolhida é aproximadamente 100 Mpc, o Universo começa a exibir homogeneidade e isotropia. Essas duas características físicas são as peças fundamentais para estabelecer o chamado princípio cosmológico. Esse princípio está sustentado nos seguintes enunciados:

- (i) o Universo é espacialmente homogêneo e isotrópico

---

<sup>3</sup>Um fluido perfeito não tem condução de calor e nem viscosidade. Também é do tipo rarefeito, onde o momento das partículas é zero.

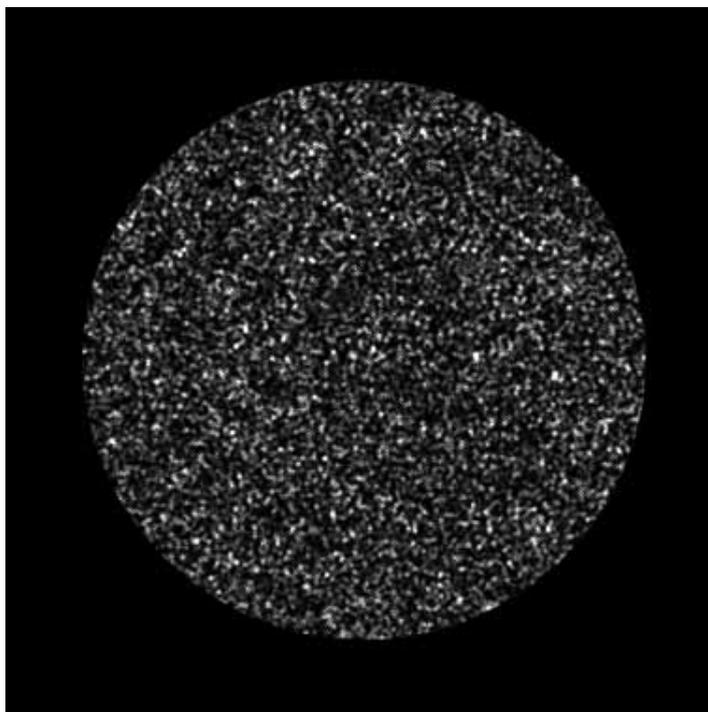
<sup>4</sup>1 pc = 3,086 × 10<sup>13</sup> km.

(ii) as leis da Física são as mesmas em todos os referenciais

Em outras palavras, não há no Universo nenhuma localização privilegiada. Especificamente a homogeneidade e isotropia do Universo implica que todos os pontos e direções no Universo são equivalentes, isto é, ao olharmos para o Universo em qualquer direção, ele terá a mesma aparência. Uma ilustração da homogeneidade e isotropia do Universo é mostrada na Figura 2.1.

O enunciado (ii) é na verdade uma proposição da Relatividade Geral conhecida como Princípio da Covariância Geral. Especificamente Einstein impôs que as leis da Física tenham a mesma forma para qualquer sistema de referência, incluindo os sistemas acelerados [17].

**Figura 2.1:** Homogeneidade e isotropia do Universo em grandes escalas. Essa seria a visão de um observador situado a uma distância maior que 100 Mpc, abaixo dessa escala, as inhomogeneidades começam a se manifestar.



Fonte: Internet<sup>5</sup>

Uma observação relevante é que a homogeneidade e isotropia se referem apenas às coordenadas espaciais, visto que homogeneidade temporal implicaria um Universo estacionário no tempo, sem *Big Bang*, pois não haveria evolução alguma, de modo que a

<sup>5</sup>Disponível em: <http://alienryderflex.com/homogeneity/>. Acesso em Dez. 2018.

Cosmologia seria fatalmente contrariada pelas observações. Neste contexto, os cosmólogos Robertson e Walker mostraram que, se o princípio cosmológico é satisfeito e a teoria de gravitação válida é a Relatividade Geral, então as equações de Friedmann são as únicas capazes de descrever a dinâmica correta do Universo. Assim, foi estabelecida a conhecida Cosmologia padrão de Friedmann-Robertson-Walker [17].

## 2.3 Universo de Friedmann-Robertson-Walker

A expansão do Universo é um fato científico. Em 1929, o astrônomo Edwin Hubble, baseado em suas observações, formulou uma lei onde previa que as galáxias estavam se afastando uma das outras com velocidade proporcional a distância de separação entre elas [21]. A partir dessa informação, agora, podemos estudar a evolução do Universo através do chamado fator de escala  $a(t)$ <sup>6</sup>. Através desse parâmetro podemos escrever as famosas equações de Friedmann, tais equações mostram o comportamento dinâmico do Universo.

Existem vários modelos que descrevem o Universo, dentre eles, vamos estudar a evolução do Universo baseado no MCP. Uma métrica que descreve a dinâmica e evolução do Universo com eficiência é a de FRW, pois ela expressa a homogeneidade e isotropia do espaço-tempo. Em coordenadas esféricas, essa métrica adota a seguinte forma:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (2.6)$$

onde  $k$  é uma constante que caracteriza o tipo de geometria do Universo. Se  $k = 0$ , então a geometria é plana; se  $k > 0$ , então a geometria é esférica, e  $k < 0$  corresponde a uma geometria hiperbólica [18].

Para obter a evolução do fator de escala em um Universo de FRW, precisamos resolver as equações de Einstein (ver Eq. (2.2)). O tensor métrico em um Universo plano ( $k = 0$ ) em expansão é dado por

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} [-1, a^2(t), a^2(t), a^2(t)]. \quad (2.7)$$

A informação que diz respeito a evolução do Universo está contida na componente tempo-tempo (0-0) das equações de Einstein. Usando as técnicas da álgebra tensorial, a

---

<sup>6</sup>O fator de escala é uma grandeza adimensional que mede a escala do Universo em qualquer fase de sua evolução.

componente (0-0) do tensor de Ricci fica:

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad (2.8)$$

onde o ponto sobre a variável implica uma derivada em relação ao tempo.

O escalar de Ricci pode ser expresso como

$$\mathcal{R} = 6 \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right]. \quad (2.9)$$

A componente (0-0) do tensor energia-momento é a densidade de energia  $\rho$ . Portanto, a evolução do fator de escala, componente (0-0) da Eq. (2.2), tem a seguinte forma:

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho. \quad (2.10)$$

Esta é a equação de Friedmann em um Universo espacialmente homogêneo, isotrópico e plano.

O comportamento da densidade de energia pode ser obtido da lei de conservação. A conservação do tensor energia-momento pode ser expressa da seguinte maneira:

$$T^\mu{}_{\nu;\mu} = 0, \quad (2.11)$$

em que “;” indica uma derivada covariante, em outras palavras,  $T^\mu{}_{\nu;\mu} = \nabla_\mu T^\mu{}_\nu$ , onde

$$\nabla_\mu T^\mu{}_\nu = T^\mu{}_{\nu,\mu} + T^\alpha{}_\nu \Gamma^\mu{}_{\alpha\mu} - T^\mu{}_\alpha \Gamma^\alpha{}_{\nu\mu} \quad (2.12)$$

é a definição de derivada covariante de um tensor. Após um pouco de álgebra tensorial, é possível expressar a equação de conservação como

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (2.13)$$

A equação de estado de um fluido perfeito é dada por

$$p = \omega\rho, \quad (2.14)$$

onde  $\omega$  é um parâmetro que caracteriza um dado componente, por exemplo,  $\omega = 0$  para a matéria ordinária,  $\omega = -1$  para a energia escura e  $\omega = 1/3$  para a radiação. A integração analítica da equação de conservação levando em conta a equação de estado, fornece<sup>7</sup>:

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+\omega)}. \quad (2.15)$$

---

<sup>7</sup>O índice zero indica o valor da grandeza medido hoje. No caso do fator de escala medido hoje, por convenção, adotamos  $a_0 = 1$ .

Uma combinação das equações (2.10) e (2.13), leva facilmente a equação da dinâmica do Universo de FRW. A equação da aceleração é dada por

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) . \quad (2.16)$$

Tendo em vista que o Universo está se expandindo, devemos ter  $\ddot{a} > 0$ . Isso sugere uma restrição para o parâmetro da equação de estado da energia escura, a saber,  $\omega < -1/3$ .

As equações apresentadas acima permitem descrever o comportamento dinâmico do Universo. Como podemos constatar, o princípio cosmológico juntamente com a Relatividade Geral são as ferramentas essenciais para a construção de qualquer modelo cosmológico.

# Capítulo 3

## Aspectos Gerais da Mecânica Estatística Não-Extensiva

### 3.1 Introdução

Nas últimas décadas houve um interesse significativo no estudo de propriedades de sistemas físicos que não podem ser descritos completamente pela Mecânica Estatística de Boltzmann-Gibbs (BG) como, por exemplo, sistemas ditos anômalos e sistemas fora do equilíbrio termodinâmico. Vejamos alguns exemplos de uma grande variedade disponível na literatura [22]:

- Turbulência em plasmas
- Difusão anômala de Lévy
- Neutrinos solares
- Buracos negros
- Sistemas granulares
- Colisões de alta energia de partículas elementares
- Entrelaçamento quântico

Esses sistemas tem em comum certas características como interações de longo alcance, efeitos de memória de longo alcance, fortes correlações de variáveis estocásticas, auto-organização, e evolução do tipo fractal ou multifractal.

Um novo horizonte se abriu quando, em 1988, Constantino Tsallis propôs uma possível generalização da entropia de BG, onde emergia uma nova ferramenta que proporcionava uma possibilidade de descrição dos sistemas mencionados anteriormente [15]. Esta teoria tem base puramente matemática: a multifractalidade. Tsallis relacionou a entropia com a fractalidade de um dado sistema, onde a dimensão fractal, representada pelo parâmetro entrópico  $q$ , poderia ser pensado como uma medida da desordem do sistema. Nesse contexto a nova entropia proposta é expressa por,

$$S_q = \frac{k_B}{q-1} \left( 1 - \sum_{i=1}^{\Omega} p_i^q \right). \quad (3.1)$$

No limite  $q = 1$ , essa nova forma entrópica deve retomar o caso padrão BG.

Atualmente pesquisadores de vários países despertaram um certo interesse na estatística de Tsallis e suas aplicações em geofísica [23], processamento de sinais e imagens [24], matemática [25, 26], economia [27], engenharias [28], dentre outras. Os primórdios das aplicações em Cosmologia e Astrofísica se deu principalmente a partir do trabalho de A. R. Plastino & A. Plastino [29]. Nesse contexto, as propriedades termodinâmicas apresentam modificações significativas devido à interações de longo alcance como no caso das forças gravitacionais [30, 31, 32]. Uma consideração interessante foi obtida por Bernui, em que há indícios de que as flutuações de temperatura da Radiação Cósmica de Fundo (RCF) corresponderiam a uma natureza não-aditiva [33]. Diversas outras aplicações podem ser consultadas nas referências [34, 35, 36, 37, 38, 39].

A estatística de Tsallis tem uma estrutura física muito abrangente e possui semelhanças apreciáveis com o formalismo matemático da Mecânica Estatística de BG. Por outro lado, questões como a não-aditividade da entropia e problemas com as leis da Termodinâmica [40], contribuíram para um certo ceticismo em relação a essa nova estatística. Contudo, aos poucos esse novo formalismo vem ganhando espaço devido a possibilidade de descrição de sistemas em que a Mecânica Estatística padrão mostra-se limitada.

Em 2001, G. Kaniadakis propôs um novo formalismo, baseado no Princípio de interação Cinético que governa a dinâmica das partículas dos sistemas físicos. Assim como no estudo de Tsallis, a estatística de Kaniadakis recupera o formalismo de BG

para um valor limite ( $\kappa = 0$ ) do seu parâmetro generalizado  $\kappa$ . Diversas aplicações desse formalismo podem ser encontradas na literatura como, por exemplo, no estudo de sistemas auto-gravitantes [41]. Maiores detalhes podem ser encontrados nas referências [42, 43, 44].

Neste capítulo, daremos ênfase a estatística de Tsallis apresentando algumas partes da estrutura que compõem esse novo formalismo. Nas próximas Seções, abordaremos as peculiaridades do formalismo, expondo e demonstrando, quando necessário, algumas propriedades matemáticas que incorporam esse novo espaço denominado de  $q$ -espaço.

## 3.2 A Origem do Parâmetro Entrópico $q$

A forma entrópica proposta por Tsallis foi inspirada nos multifractais [15]. Essa inspiração fica evidente principalmente pelo fato de fractais estarem relacionados com leis de potência. Por essa razão, a generalização da função exponencial foi expressa na forma de lei de potência. A seguir, vamos elucidar sucintamente alguns detalhes sobre a dimensão fractal, buscando associar o parâmetro entrópico  $q$  a dimensão fractal.

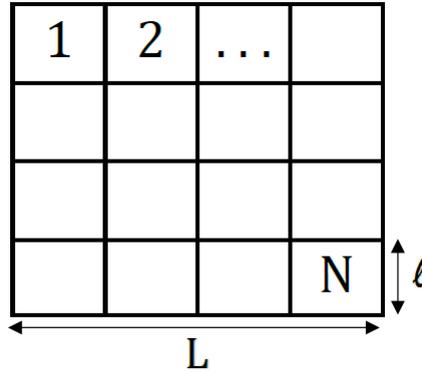
A fractalidade está presente em várias estruturas da natureza desde pequenas escalas, como a distribuição de átomos na matéria, até escalas cosmológicas como, por exemplo, a distribuição das galáxias no Universo. Além disso, uma infinidade de outras estruturas apresentam propriedades fractais tais como a distribuição das nuvens, estrutura dos raios, estrutura das plantas e das árvores, sistema de veias e artérias, a forma esponjosa dos pulmões, dentre muitos outros exemplos de estruturas e arranjos espaciais com um alto grau de aleatoriedade e complexidade [45, 46].

Um fractal pode ser pensado como um objeto geométrico complexo que pode ser derivado em partes, cada uma das quais semelhantes ao objeto original, além de ter uma estrutura não-trivial em qualquer escala [47]. Para ilustrar a dimensão fractal de um objeto geométrico, considere um quadrado de lado  $L$  coberto por  $N$  quadrados menores de lado  $\ell$  como mostrado na figura 3.1.

Observe que a área do quadrado ( $L^2$ ) é igual  $N$  vezes a área do quadrado menor ( $\ell^2$ ). Assim, temos a seguinte relação:

$$N\ell^2 = L^2, \quad (3.2)$$

**Figura 3.1:** Ilustração para o cálculo da dimensão fractal.



Fonte: (GOMES, 1993)

onde  $N$  representa a quantidade de quadrados de lado  $\ell$  necessários para preencher o quadrado de lado  $L$ , dada por  $N = L^2/\ell^2$ . No caso de um cubo, teremos  $N = L^3/\ell^3$ . No caso mais geral, considere um hipercubo com dimensão arbitrária  $d$  e com aresta  $L$ , para tal, teremos a seguinte expressão:

$$N = \left(\frac{L}{\ell}\right)^d . \tag{3.3}$$

Para objetos que obedecem a geometria euclidiana  $d$  é inteiro. Por outro lado,  $d$  é fracionário para objetos que apresentam estruturas fractais. O expoente  $d$  é comumente chamado de *expoente de massa*. Essa denominação advém da atribuição de uma massa unitária a cada cubo de lado  $\ell$ , portanto, teremos  $N \sim$  massa total [45, 47].

Várias estruturas observadas na natureza apresentam uma relação de escala do tipo

$$N(\ell, L) \cdot \ell^d \sim L^d , \tag{3.4}$$

com  $d$  não inteiro. O parâmetro  $d$  pode ser pensado como uma espécie de índice crítico que caracteriza o sistema (ou conjunto) e  $\ell$  a escala com que o sistema está sendo estudado [45, 46, 47]. Portanto, da Eq. (3.3), podemos obter uma expressão para a dimensão fractal de uma estrutura geométrica, dada por

$$d_F = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)} , \tag{3.5}$$

onde  $\epsilon \equiv \ell/L$ . Uma expressão alternativa para a dimensão fractal pode ser obtida a partir da Eq. (3.4), de modo que

$$N(\ell, L) \cdot \ell^{d_F} = kL^{d_F} , \tag{3.6}$$

em que a constante de proporcionalidade  $k$  é um número puro (adimensional). Tomando o logaritmo em ambos lados da Eq. (3.6), obtemos

$$\ln N(\epsilon) = d_F \ln \left( \frac{1}{\epsilon} \right) + \ln k . \quad (3.7)$$

Diferenciando ambos os lados da Eq. (3.7) em relação a  $\ln(1/\epsilon)$ , temos

$$d_F = \frac{d \ln N(\epsilon)}{d \ln(1/\epsilon)} . \quad (3.8)$$

Como vimos anteriormente,  $d_F$  é um parâmetro que caracteriza um dado sistema e isso, de um certo modo, pode está relacionado com a entropia desse sistema. Nesse contexto, deve-se expressar a entropia de modo que as probabilidades sejam escritas em termos de potências. Isso tornou-se possível com a generalização das funções exponencial e logaritmo.

Em geral, sem muito rigor matemático, podemos associar a cada parte da estrutura (objeto geométrico) uma probabilidade  $p_i$  relacionada com uma lei de escala do tipo

$$(p_i)^q \sim (\ell_i)^{\alpha q} , \quad (3.9)$$

onde  $\alpha$  é o fator de escala e  $q$  um número inteiro maior ou igual a zero [44]. Daí surge a relação entre o parâmetro  $q$  e a dimensão fractal proposta por Tsallis.

A seguir apresentamos os procedimentos matemáticos usados por Tsallis para realizar a generalização da entropia de BG [48]. Na realidade, Tsallis pretendia encontrar soluções de equações diferenciais ordinárias na forma de lei de potência que fossem escritas em termos de um parâmetro generalizado. Feito isso, seria possível escrever uma expressão generalizada para função exponencial, bem como a sua função inversa possibilitando uma generalização da entropia clássica.

Primeiramente vamos analisar o caso de uma equação diferencial ordinária (EDO) de natureza linear e homogênea. Considere a seguinte EDO:

$$\frac{dy}{dx} = y \quad [y(0) = 1] . \quad (3.10)$$

Para encontrar a solução desta EDO, integramos ambos lados da Eq. (3.10) em relação a  $x$ . Daí, obtemos

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx , \quad (3.11)$$

cuja solução é dada por

$$\ln y = x + c . \quad (3.12)$$

Impondo a condição de contorno  $y(0) = 1$ , temos que  $c = 0$ . Sendo assim, chegamos a seguinte solução:

$$\ln y = x , \quad (3.13)$$

onde a sua função inversa é obtida tomando o logaritmo, de modo que

$$y = e^x . \quad (3.14)$$

Agora vamos analisar o caso fora da linearidade, isto é, a EDO deve conter produtos de funções ou funções de potências. Nesse caso, vamos inserir, *ad hoc*, o parâmetro entrópico  $q$  em forma de potência. Então, considere a seguinte EDO não linear:

$$\frac{dy}{dx} = y^q \quad [y(0) = 1 ; q \in \mathbb{R}] . \quad (3.15)$$

Integrando ambos lados da Eq. (3.15), temos

$$\int y^{-q} dy = \int dx , \quad (3.16)$$

em que leva ao seguinte resultado:

$$\frac{y^{1-q}}{1-q} = x + c . \quad (3.17)$$

Aplicando a condição de contorno  $y(0) = 1$ , temos que  $c = -1/(1-q)$ . Desse modo, obtemos

$$\frac{y^{1-q} - 1}{1-q} = x . \quad (3.18)$$

Quando comparamos as equações (3.13) e (3.18), surge a seguinte definição:

$$\ln_q(y) \equiv \frac{y^{1-q} - 1}{1-q} , \quad (3.19)$$

onde  $\ln_q(y)$  é conhecido como  $q$ -logaritmo. Uma propriedade interessante do  $q$ -logaritmo é definida como

$$\ln_q(xy) \equiv \ln_q(x) + \ln_q(y) + (1-q) \ln_q(x) \ln_q(y) . \quad (3.20)$$

A inversa da função mostrada na Eq. (3.18) é dada por

$$y = [1 + (1 - q)x]^{\frac{1}{1-q}} . \quad (3.21)$$

Das equações (3.14) e (3.21), advém a seguinte definição:

$$\exp_q(x) \equiv [1 + (1 - q)x]^{\frac{1}{1-q}} , \quad (3.22)$$

em que  $\exp_q(x)$  é comumente chamada de  $q$ -exponencial.

É importante mencionar que essas funções generalizadas recuperam sua forma padrão quando  $q \rightarrow 1$ . No apêndice A, verificamos esse limite para a  $q$ -exponencial e o  $q$ -logaritmo, além de verificar outros limites relevantes.

### 3.3 A Entropia de Tsallis e Suas Propriedades

Antes de começarmos a tratar da entropia de Tsallis e suas propriedades, vamos apresentar algumas noções preliminares da Mecânica Estatística de BG.

Em geral um sistema físico é um sistema composto por  $N$  partículas idênticas confinadas num espaço de volume  $V$  [49]. A base da Mecânica Estatística de BG se encontra no *princípio de probabilidades iguais a priori*, onde atribui-se que todos os microestados acessíveis ao sistema são equiprováveis. Existe uma infinidade de maneiras distintas de descrever o mesmo estado macroscópico de um sistema. Individualmente, cada maneira de representação especifica um microestado acessível ao sistema. Partindo da hipótese das probabilidades iguais, tem-se que  $p_i = 1/\Omega$ , em que  $\Omega$  representa a densidade de microestados acessíveis ao sistema. No espaço de fase clássico, cada ponto nesse espaço representa um microestado, de modo que o *ensemble estatístico* é tratado como uma coleção de pontos representativos no espaço de fase [50, 51]. Os macroestados de um determinado sistema são completamente caracterizados pelos parâmetros extensivos energia interna  $U$ , volume  $V$  e número de partículas  $N$ . Gibbs assumiu que as condições macroscópicas de um sistema corresponderiam a uma coleção de microestados, que ele denominou de *ensemble* [49, 50, 52]. A probabilidade  $P_i$  de um macroestado é proporcional ao número de microestados. Boltzmann relacionou a entropia com o peso estatístico, isso permitiu chegar a sua célebre equação para a entropia

$$S = k_B \ln(\Omega) , \quad (3.23)$$

onde  $k_B$  foi definido como a constante de Boltzmann e  $\Omega$  é o peso estatístico do macroestado de entropia  $S$ . Conhecer a entropia de um determinado sistema, significa ter acesso a toda informação termodinâmica do sistema. A conexão entre o micro e o macro é feita pela Mecânica Estatística de BG de acordo com a Eq. (3.23).

A nova versão da entropia vislumbrada por Gibbs ficou conhecida como a teoria dos ensembles. Uma espécie de generalização do princípio de Boltzmann pode ser escrita da seguinte forma (assumindo  $p_i = 1/\Omega$ ):

$$S = -k_B \sum_i p_i \ln(p_i) , \quad (3.24)$$

onde  $\sum_i p_i = 1$  e  $k_B$  a constante de Boltzmann. Essa forma alternativa é conhecida como entropia de Boltzmann-Gibbs-Shannon. Esta versão é compatível com a Eq. (3.23), pois a entropia é positiva, côncava e aditiva (extensiva).

A maximização da Eq. (3.24) sob certos vínculos apropriados, para um sistema em equilíbrio térmico com um reservatório a temperatura  $T$ , leva ao fator de Boltzmann-Gibbs

$$p_i = \frac{1}{Z} \exp(-\beta E_i) , \quad (3.25)$$

onde  $\beta = 1/k_B T$ ,  $E_i$  é a energia do estado  $i$  e  $Z = \sum_j \exp(-\beta E_j)$  a *função de partição* (soma sobre os estados acessíveis).

Na teoria Termodinâmica é bem conhecido que os parâmetros macroscópicos são imprescindíveis para a especificação de um macroestado de um dado sistema. Tais parâmetros podem ser classificados da seguinte maneira [49, 50, 53]:

- Extensivos  $\rightarrow$  são aqueles cujos valores dobram, quando o tamanho do sistema é duplicado. Isso tem a ver com a propriedade de funções homogêneas de primeira ordem, por exemplo, para a entropia fica:  $S(\lambda\epsilon) = \lambda S(\epsilon)$ , onde  $\epsilon$  representa os parâmetros extensivos. Em outras palavras, são parâmetros proporcionais a dimensão do sistema.
- Intesivos  $\rightarrow$  são aqueles que se mostram independentes da dimensão do sistema.
- Não-extensivos  $\rightarrow$  são aqueles que apresentam propriedades incomuns<sup>1</sup>, por exemplo, a soma da entropia de um sistema composto (A+B) pode assumir valores me-

---

<sup>1</sup>Incomuns comparados com Mecânica Estatística clássica, já que a entropia é um parâmetro extensivo.

nores do que  $(A+B)$  que corresponde ao caso de subaditividade, ou poderá assumir valores maiores do que  $(A+B)$  correspondendo ao caso de superaditividade.

Uma característica fundamental da entropia de BG é que ela é aditiva (extensiva). Para vislumbrar melhor o conceito de aditividade, considere um sistema composto  $(A+B)$  constituído por dois subsistemas  $A$  e  $B$  *estatisticamente independentes*, isto é,  $P_{ij}^{(A+B)} = P_i^{(A)} \cdot P_j^{(B)}$ , a entropia total para esse sistema é dada por

$$\begin{aligned}
 S(A+B) &= -k_B \sum_{i,j} p_{i,j}^{A+B} \ln(p_{i,j}^{A+B}) , \\
 &= -k_B \sum_{i,j} p_i^A p_j^B \ln(p_i^A) - k_B \sum_{i,j} p_i^A p_j^B \ln(p_j^B) , \\
 &= -k_B \sum_i p_i^A \ln(p_i^A) - k_B \sum_j p_j^B \ln(p_j^B) , \\
 &= S(A) + S(B) ,
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

onde notamos claramente a manifestação da aditividade da entropia do sistema.

A nova forma entrópica, proposta por Tsallis, incorpora a célebre estrutura da mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs. A definição de entropia introduzida por Tsallis, leva em conta a substituição direta do logaritmo convencional pelo  $q$ -logaritmo, dado pela Eq. (3.19). O postulado da entropia segundo Tsallis garante que

$$S_q = -k_B \sum_{i=1}^{\Omega} p_i \ln_q(p_i) \quad (q \in \mathbb{R}) , \tag{3.27}$$

onde  $k_B$  é a constante de Boltzmann. A partir da Eq. (3.27), e usando a definição (3.19), podemos facilmente obter o seguinte resultado:

$$S_q = \frac{k_B}{q-1} \left( 1 - \sum_{i=1}^{\Omega} p_i^q \right) . \tag{3.28}$$

em que a função entrópica  $S_q$  é normalizada por  $\sum_{i=1}^{\Omega} p_i = 1$ ,  $p_i$  é a probabilidade do sistema se encontrar no microestado  $i$  e  $q$  é o parâmetro que caracteriza o grau da não extensividade do sistema. O parâmetro  $q$  também é comumente chamado de índice entrópico. A entropia clássica é recuperada no limite  $q \rightarrow 1$ , de forma que

$$S_1 = -k_B \sum_i p_i \ln(p_i) . \tag{3.29}$$

Fazendo uso das mesmas considerações que foram feitas para obter a Eq. (3.26),

imediatamente a  $q$ -entropia conduz a violação da aditividade da entropia clássica<sup>2</sup>. Isso é facilmente verificado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 S_q(A + B) &= -k_B \sum_{i,j} p_{i,j}^{A+B} \ln_q(p_{i,j}^{A+B}) , \\
 &= -k_B \sum_{i,j} p_i^A p_j^B \ln_q(p_i^A p_j^B) , \\
 &= -k_B \sum_{i,j} p_i^A p_j^B \left[ \ln_q(p_i^A) + \ln_q(p_j^B) + (1 - q) \ln_q(p_i^A) \ln_q(p_j^B) \right] , \\
 &= S_q(A) + S_q(B) + (1 - q)S_q(A)S_q(B) .
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

A entropia, de acordo com o postulado de Tsallis é não aditiva, como mostramos acima. Obviamente, essa característica está diretamente ligada com as propriedades do  $q$ -espaço, particularmente com a forma que a  $q$ -soma foi definida. O terceiro termo do lado direito da Eq. (3.30), é um termo cruzado que expressa a não aditividade da entropia do sistema. A aditividade da entropia clássica é recuperada quando  $q = 1$ . A Tabela 3.1 mostra algumas propriedades importantes da  $q$ -entropia [42, 48, 53, 54].

**Tabela 3.1:** Propriedades de  $q$ -entropia.

| índice entrópico | $S_q$        |
|------------------|--------------|
| $q = 1$          | aditiva      |
| $q > 1$          | subaditiva   |
| $q < 1$          | superaditiva |

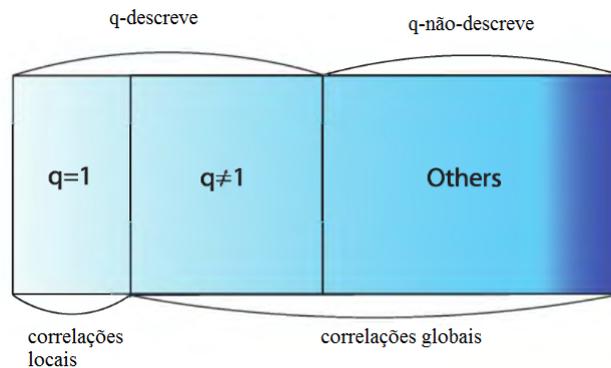
Fonte: (TSALLIS, 2009)

A entropia de BG é extensiva somente quando os subsistemas são (estritamente ou assintoticamente) independentes, de outro modo ela é não-extensiva. Já a  $q$ -entropia é não-extensiva para valores especiais de  $q$  se os subsistemas são globalmente correlacionados (ver Figura 3.2) [48].

Como é bem conhecido, a entropia clássica é uma função côncava de suas variáveis extensivas, de modo que, na remoção de vínculo interno, os parâmetros extensivos assu-

<sup>2</sup>Isso representa uma ruptura com um conceito fundamental em Termodinâmica, o de sistema isolado. Um sistema isolado significa que não há troca de matéria, nem energia, nem informação com sua vizinhança.

**Figura 3.2:** Cenário de localização da mecânica estatística não-extensiva. Nas extremidades esquerda e direita da região  $q = 1$ , encontram-se, respectivamente, os sistemas não interagentes como o gás ideal e fenômenos críticos associados às transições de fase padrão. Tais sistemas exibem, precisamente no ponto crítico, correlações coletivas que se conectam com os sistemas  $q \neq 1$ . Além do extremo direito da região  $q \neq 1$ , encontra-se uma região do que podemos considerar como sistemas muito complexos, de modo que a mecânica estatística não-extensiva não consegue descrever.



Fonte: (TSALLIS, 2009)

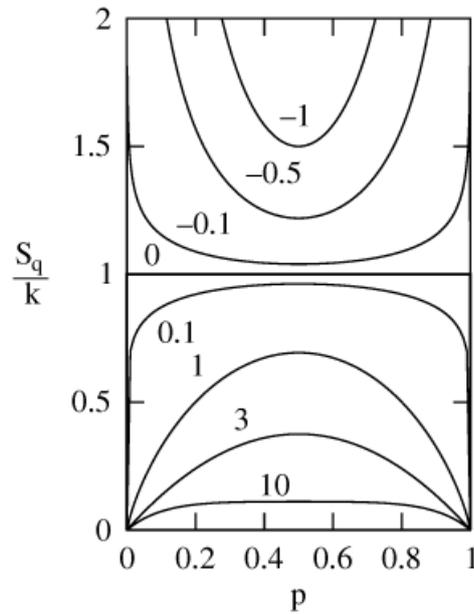
mem valores que maximizam a entropia [50]. É importante mencionar que  $S_q$  é sempre côncava para valores positivos de  $q$  e sempre convexa para valores negativos de  $q$  (ver Figura 3.3). Portanto, do ponto de vista termodinâmico, a entropia de Tsallis só tem algum significado físico para valores positivos de  $q$  ( $q > 0$ ). Por outro lado, a estatística de Tsallis pode ser aplicada, sem essas restrições, a sistemas financeiros [27, 55], sistemas sociais e artificiais [56], teoria de informação [57], dentre outros.

### 3.4 Conexão com a Termodinâmica

Buscando uma conexão adequada com a Termodinâmica, foram realizadas três tentativas de maximização da entropia, sendo que a última se mostrou mais apropriada. O problema consistia em definir uma forma adequada para o valor esperado da energia (vínculo sob a energia interna generalizada  $U_q$ ). No contexto do *ensemble canônico*<sup>3</sup>,

<sup>3</sup>O ensemble canônico é apropriado para descrever um sistema isolado (não troca nem matéria nem energia com sua vizinhança) que se encontra, ou tenha estado, em contato térmico com um banho de calor.

**Figura 3.3:** Ilustração das propriedades da  $q$ -entropia. Para o caso de equiprobabilidades dos microestados (ignorância máxima  $p_i = 1/\Omega$ ),  $S_q$  corresponde a um máximo (mínimo) para  $q > 0$  ( $q < 0$ ).



Fonte: (TSALLIS, 2009)

deve-se otimizar  $S_q$  sob vínculos apropriados e, em seguida, encontrar a distribuição de equilíbrio térmico (distribuição de probabilidades). A *primeira forma* foi proposta por Tsallis em 1988 [15, 48], considerando os seguintes vínculos:

$$\sum_{i=1}^{\Omega} p_i E_i = U , \quad (3.31)$$

$$\sum_{i=1}^{\Omega} p_i = 1 . \quad (3.32)$$

A maximização de  $S_q$  com os vínculos (3.31) e (3.32), leva a seguinte distribuição:

$$p_i \propto [1 - (q - 1)\beta E_i]^{1/(q-1)} = \exp_{2-q}(-\beta E_i) . \quad (3.33)$$

Nota-se que, quando  $q < 1$ , temos um comportamento tipo lei de potência em altas energias. Quando  $q > 1$ , temos o chamado *cutoff* (condição de corte). Além disso, a função de partição não pode ser definida,  $p_i$  não é invariante para  $\beta$  fixo, portanto, uma conexão satisfatória com a Termodinâmica não é permitida.

A *segunda forma* para o vínculo da energia  $U_q$ , foi proposta por Curado e Tsallis em 1991 [58],

$$\sum_{i=1}^{\Omega} p_i^q E_i = U_q . \quad (3.34)$$

A otimização de  $S_q$  com os vínculos (3.32) e (3.34), imediatamente conduz a seguinte expressão,

$$p_i \propto [1 - (1 - q)\beta E_i]^{1/(1-q)} = \exp_q(-\beta E_i) . \quad (3.35)$$

Neste caso, pode-se obter uma fatoração simples do multiplicador de Lagrange e obter uma função de partição dependente apenas de  $\beta$ . Por outro lado, viola (*a priori*) o princípio que diz que a média de uma constante coincide com uma constante e  $p_i$  continua não sendo invariante para  $\beta$  fixo, logo, não é possível uma conexão adequada com a Termodinâmica.

A *terceira forma* proposta define o vínculo da energia generalizada  $U_q$  do seguinte modo [59]:

$$\langle E_i \rangle_q \equiv \sum_{i=1}^{\Omega} P_i E_i = U_q , \quad (3.36)$$

em que  $\langle \rangle_q$  representa o valor esperado generalizado e  $P_i$  é a distribuição de Escort, dada por

$$P_i \equiv \frac{p_i^q}{\sum_{j=1}^{\Omega} p_j^q} . \quad (3.37)$$

Em todas as formas para o vínculo  $U_q$  apresentadas aqui,  $i$  representa um dado estado com energia  $E_i$  dos  $\Omega$  estados possíveis e  $\{E_i\}$  representam os autovalores do hamiltoniano do sistema.

A maximização de  $S_q$  com os vínculos (3.32) e (3.36), leva a seguinte distribuição de probabilidades:

$$p_i = \frac{[1 - (1 - q)\beta_q(E_i - U_q)]^{1/(1-q)}}{\bar{Z}_q} = \frac{\exp_q(-\beta_q(E_i - U_q))}{\bar{Z}_q} , \quad (3.38)$$

com

$$\beta_q \equiv \frac{\beta}{\sum_{j=1}^{\Omega} p_j^q} , \quad (3.39)$$

onde  $\beta$  é o multiplicador de Lagrange associado ao vínculo (3.36) e a função de partição generalizada é definida da seguinte forma,

$$\bar{Z}_q \equiv \sum_{i=1}^{\Omega} \exp_q(-\beta_q(E_i - U_q)) . \quad (3.40)$$

Com essa formulação todas as dificuldades mencionadas anteriormente são contornadas e, portanto, a partir de agora, será possível estabelecer uma conexão satisfatória com a Termodinâmica.

Observe que a partir da Eq. (3.28) e da expressão

$$\sum_{i=1}^{\Omega} p_i^q = (\bar{Z})^{1-q} , \quad (3.41)$$

podemos escrever o seguinte resultado:

$$S_q = k_B \ln_q(\bar{Z}_q) . \quad (3.42)$$

A distribuição de probabilidades (3.38) pode se reescrita para estados estacionários, de modo que

$$p_i = \frac{\exp_q(-\beta'_q E_i)}{Z'_q} , \quad (3.43)$$

com

$$\beta'_q \equiv \frac{\beta_q}{1 + (1 - q)\beta_q U_q} , \quad (3.44)$$

e a função de partição generalizada torna-se

$$Z'_q \equiv \sum_{j=1}^{\Omega} \exp_q(-\beta'_q E_j) . \quad (3.45)$$

A conexão com a Termodinâmica é feita pela energia livre de Helmholtz generalizada, de forma que

$$F_q \equiv U_q - TS_q = -\frac{1}{\beta} \ln_q(Z_q) , \quad (3.46)$$

onde

$$\ln_q(Z_q) = \ln_q(\bar{Z}'_q) - \beta U_q , \quad (3.47)$$

e

$$U_q = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln_q(Z_q) . \quad (3.48)$$

Também é válida a seguinte relação:

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S_q}{\partial U_q} \quad (T \equiv 1/k_B\beta) . \quad (3.49)$$

Essas relações fazem parte da chamada Termodinâmica não-extensiva, pois os efeitos não extensivos são notórios em toda a estrutura apresentada acima. A estrutura das relações termodinâmicas ordinárias é recuperada no limite extensivo,  $q = 1$  [53].

## 3.5 A $q$ -álgebra

Com o surgimento das funções generalizadas ( $q$ -exponencial e  $q$ -logaritmo) foi possível desenvolver um novo espaço matemático, a saber, o  $q$ -espaço. Nesta Seção, vamos apresentar algumas propriedades, operações e definições que foram generalizadas para estabelecer a  $q$ -álgebra. Todas as propriedades e operações que mostraremos a seguir, podem ser encontradas com mais detalhes nas referências [48, 60, 61, 62, 63].

### 3.5.1 Operações Generalizadas

#### 3.5.1.1 Definições Preliminares

Seja  $x$  e  $y$  dois números quaisquer, o operador soma generalizado desses números é definido da seguinte forma:

$$x \oplus_q y \equiv x + y + (1 - q)xy , \quad (3.50)$$

onde  $\oplus_q$  é o operador  $q$ -soma, de modo que, quando  $q = 1$ , a soma convencional é recuperada, isto é,  $\oplus_1 \equiv +$ .

O produto nesse espaço é chamado de  $q$ -produto e é definido da seguinte maneira:

$$x \otimes_q y \equiv \left[ x^{1-q} + y^{1-q} - 1 \right]_+^{\frac{1}{1-q}} \quad (x, y > 0) , \quad (3.51)$$

onde o produto ordinário é recuperado quando  $q = 1$ , ou seja,  $x \otimes_1 y = x \times y$ .

O operador inverso aditivo generalizado é definido por

$$\ominus_q x \equiv \frac{-x}{1 + (1 - q)x} \quad (x \neq 1/(q - 1)), \quad (3.52)$$

de modo que a  $q$ -diferença pode ser escrita da seguinte forma:

$$x \ominus_q y = \frac{x - y}{1 + (1 - q)y} \quad (y \neq 1/(q - 1)). \quad (3.53)$$

A  $q$ -diferença tem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} x \ominus_q y &= \ominus_q y \oplus_q x \\ x \ominus_q (y \ominus_q z) &= (x \ominus_q y) \oplus_q z . \end{aligned}$$

Finalmente, a  $q$ -razão é definida da seguinte maneira:

$$x \oslash_q y \equiv \left[ x^{1-q} - y^{1-q} + 1 \right]_+^{\frac{1}{1-q}} \quad (x, y > 0), \quad (3.54)$$

desde que  $x^{1-q} \leq y^{1-q} + 1$ . Novamente essa operação generalizada recai na operação convencional quando  $q = 1$ . É fácil ver que

$$1 \oslash_q x = \left[ 2 - x^{1-q} \right]_+^{\frac{1}{1-q}} \quad (x \geq 0). \quad (3.55)$$

A  $q$ -razão tem as seguintes propriedades:

$$x \oslash_q y = 1 \oslash_q (y \oslash_q x) \quad (x^{1-q} \leq y^{1-q} + 1), \quad (3.56)$$

$$x \oslash_q (y \oslash_q z) = (x \oslash_q y) \otimes_q z = (x \otimes_q z) \oslash_q y \quad (z^{1-q} - 1 \leq x^{1-q} \leq y^{1-q} + 1). \quad (3.57)$$

### 3.5.1.2 Operações com a $q$ -exponencial

A exponencial convencional é um morfismo se a relação entre  $(\mathbb{R}, +)$  e  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ , tem sua estrutura preservada. É fácil ver que, se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $f(x) = e^x$ , temos  $e^{x+y} = e^x e^y$ . Analogamente  $f(x)$  não é um morfismo entre  $(\mathbb{R}, +)$  e  $(\mathbb{R}, +)$ , pois  $e^{x+y} \neq e^x + e^y$ . Por outro lado, para tratarmos da exponencial generalizada, primeiro precisamos definir um conjunto para a função  $e_q^x$ . Seja  $\mathbb{L}_q$  o conjunto para  $e_q^x$ , então a função exponencial generalizada é um morfismo entre  $(\mathbb{L}_q, \oplus_q)$  e  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ . Isso torna-se evidente quando expressamos a seguinte operação:

$$e_q^{x \oplus_q y} = e_q^x e_q^y . \quad (3.58)$$

Para mostrar isso, considere  $(f : \mathbb{L}_q \rightarrow \mathbb{R}_+^* ; x \mapsto f(x) = e_q^x)$ , de modo que  $f(x \oplus_q y) = f(x)f(y)$ , então

$$\begin{aligned} f(x \oplus_q y) &= e_q^{x \oplus_q y} , \\ &= \{1 + (1 - q)[x + y + (1 - q)xy]\}^{\frac{1}{1-q}} , \\ &= [1 + (1 - q)x]^{\frac{1}{1-q}} [1 + (1 - q)y]^{\frac{1}{1-q}} , \\ &= e_q^x e_q^y = f(x)f(y) , \end{aligned}$$

onde usamos as equações (3.22) e (3.50). Para evitar ambiguidades note que  $e_q^x = \exp_q(x)$ . No decorrer deste trabalho usaremos isso para nos referir a função exponencial generalizada.

Nesta perspectiva, outras operações imediatas de  $e_q^x$  são escritas da seguinte maneira:

$$e_q^x \otimes_q e_q^y = e_q^{x+y} , \quad (3.59)$$

$$e_q^x \oslash_q e_q^y = e_q^{x-y} , \quad (3.60)$$

$$e_q^x / e_q^y = e_q^{x \ominus_q y} . \quad (3.61)$$

### 3.5.1.3 Operações com o $q$ -logaritmo

Analogamente ao que foi feito na Seção anterior, podemos expressar algumas operações da função logaritmo generalizada. Como  $\ln_q(x)$  é a função inversa de  $e_q^x$ , o morfismo agora é dado pela relação entre  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$  e  $(\mathbb{L}_q, \oplus_q)$ , de modo que

$$\ln_q(xy) = \ln_q(x) \oplus_q \ln_q(y) . \quad (3.62)$$

Para verificar isso, considere  $(f : \mathbb{L}_q \rightarrow \mathbb{R}_+^* ; x \mapsto f(x) = \ln_q(x))$ , de forma que  $f(x) \oplus_q f(y) = f(xy)$ , assim

$$\begin{aligned} f(x) \oplus_q f(y) &= \ln_q(x) + \ln_q(y) + (1 - q) \ln_q(x) \ln_q(y) , \\ &= \frac{x^{1-q} - 1 + y^{1-q} - 1}{1 - q} + \frac{(xy)^{1-q} - x^{1-q} - y^{1-q} + 1}{1 - q} , \\ &= \frac{(xy)^{1-q} - 1}{1 - q} , \\ &= \ln_q(xy) = f(xy) , \end{aligned}$$

em que usamos as equações (3.50) e (3.19).

Além disso, o  $q$ -logaritmo apresenta outras operações imediatas, dadas por

$$\ln_q(x \otimes_q y) = \ln_q(x) + \ln_q(y) , \quad (3.63)$$

$$\ln_q(x/y) = \ln_q(x) \ominus_q \ln_q(y) , \quad (3.64)$$

$$\ln_q(x \ominus_q y) = \ln_q(x) - \ln_q(y) . \quad (3.65)$$

## 3.5.2 Propriedades dos $q$ -operadores

### 3.5.2.1 Aditividade

O operador  $q$ -soma, expresso pela Eq. (3.50), obedece as seguintes propriedades:

1. Comutatividade:  $x \oplus_q y = y \oplus_q x$ .
2. Associatividade:  $x \oplus_q (y \oplus_q z) = (x \oplus_q y) \oplus_q z$ .
3. Não-distributiva (com a multiplicação usual):  $a(x \oplus_q y) \neq (ax \oplus_q ay)$ .
4. Elemento neutro (0):  $x \oplus_q 0 = 0 \oplus_q x = x$ .

### 3.5.2.2 Multiplicação

O operador  $q$ -produto, dado pela Eq. (3.51), tem as seguintes propriedades:

1. Comutatividade:  $x \otimes_q y = y \otimes_q x$ .
2. Associatividade:  $x \otimes_q (y \otimes_q z) = (x \otimes_q y) \otimes_q z$ .
3. Não-distributiva:  $x \otimes_q (y \oplus_q z) \neq (x \otimes_q y) \oplus_q (x \otimes_q z)$ .
4. Elemento neutro (1):  $x \otimes_q 1 = 1 \otimes_q x = x$ .

# Capítulo 4

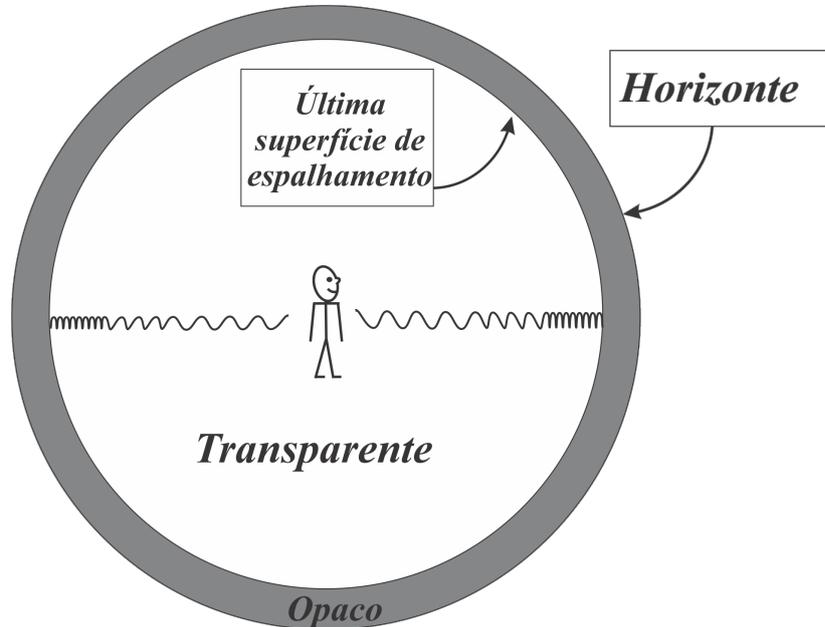
## A Recombinação Primordial do Hidrogênio

### 4.1 Introdução

A recombinação consiste de um processo em que elétrons e prótons se combinam para formar o átomo de hidrogênio neutro no Universo primordial. Trata-se de uma das mais importantes transições de fase da história térmica do Universo, durando aproximadamente 350.000 anos. Antes disso, a matéria estava totalmente ionizada (devido ao forte acoplamento entre a radiação e a matéria bariônica) num ambiente cuja temperatura da radiação era  $T \approx 4000K$ . No início da recombinação (320.000 anos após o Big Bang) o plasma começou a se neutralizar, surgindo os primeiros átomos de hidrogênio. No fim dessa era, chamada de última superfície de espalhamento, a matéria encontrava-se 99% combinada; o ambiente cuja temperatura da radiação era  $T \approx 2500K$  apresentava abundância de hidrogênio neutro [3, 12, 13, 14]. A partir desse momento, os fótons remanescentes viajaram livres de interação com a matéria (agora neutra), dominando o conteúdo energético além da nossa galáxia, a Via Láctea, na forma que conhecemos como Radiação Cósmica de Fundo em Micro-ondas (RCF) (ver Figura 4.1). Essa radiação remanescente da última superfície de espalhamento foi detectada pela primeira vez pelos rádio-astrônomos Penzias e Wilson, em 1965 [4].

Neste trabalho, consideramos um Universo cujo conteúdo energético é composto de elétrons, prótons, fótons, átomos de hidrogênio, matéria escura e energia escura. Os

**Figura 4.1:** Última superfície de espalhamento. Um observador é envolvido por uma última superfície de espalhamento esférica. Os fótons da RCF viajam em direção a nós a partir da última superfície de espalhamento, sendo continuamente *redshifted*<sup>1</sup>.



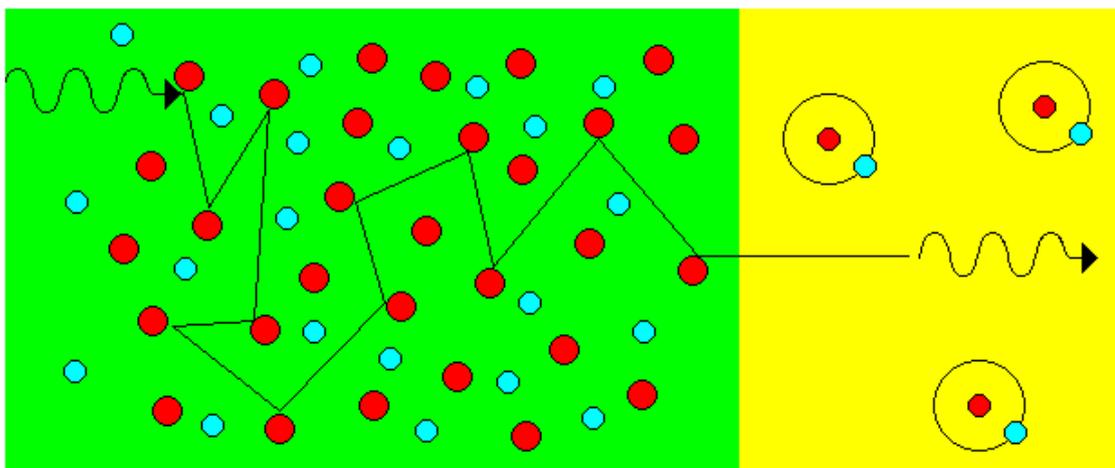
Fonte: (RYDEN, 2016)

fótons interagem fortemente com partículas carregadas tais como prótons e elétrons. Considerando um cenário em que exista radiação altamente energética interagindo com um número extremamente grande de partículas carregadas (plasma primordial), não é surpresa esperar que nenhum átomo de hidrogênio neutro possa ser produzido neste cenário, pois a energia do plasma é muito maior que a energia necessária para formá-lo. Portanto, essa época foi exclusivamente dominada pela radiação, de modo que o livre caminho médio de um fóton era muito pequeno (da ordem do tamanho de um átomo), implicando em um Universo opaco. No entanto, a expansão do Universo resulta numa diminuição de temperatura tornando as colisões entre as partículas cada vez menos frequentes. Sendo assim, quando as condições são favoráveis, os primeiros átomos de hidrogênio neutro são formados no Universo. Este é um dos momentos cruciais de toda a história térmica do Universo, pois, a partir de então, os fótons (radiação) passaram a viajar em um meio transparente (ver Figura 4.2). Neste novo cenário, agora com matéria neutra, as ondas eletromagnéticas passam a viajar livremente pelo Universo. Portanto, o Universo passa

<sup>1</sup>O termo *redshifted* significa um desvio para o vermelho na frequência dos fótons. Esse efeito é devido principalmente ao efeito Doppler relativístico.

a ser dominado pela matéria e, por conseguinte, a gravidade passa a atuar sobre ela, aglutinando-a e formando as primeiras estruturas do Universo. A matéria escura que era uma componente de fundo no período recombinação, passa, agora, a produzir seus efeitos gravitacionais sobre a matéria bariônica [12, 13].

**Figura 4.2:** Ilustração do processo de recombinação. Eras de dominação da radiação e da matéria. Do lado esquerdo, temos o plasma de hidrogênio (matéria altamente carregada) implicando um Universo opaco. Do lado direito, temos o átomo de hidrogênio neutro (matéria neutra) indicando um Universo transparente.



Fonte: Internet<sup>2</sup>

## 4.2 A Equação de Boltzmann e a Condição de Equilíbrio

De acordo com o Modelo Cosmológico Padrão, o Universo primordial era extremamente quente e denso. Neste cenário, interações entre partículas ocorriam frequentemente, de modo que os processos de aniquilação de partículas davam origem a novas partículas. Nesta Seção, estamos interessados em estudar as interações entre partículas no Universo primordial. Uma maneira sistemática de entender a evolução dos processos físicos ao longo da história térmica do Universo é estudá-los pela equação de Boltzmann. A equação de

<sup>2</sup>Disponível em: [http://www.bertolo.pro.br/fisica\\_cosmologia/Cosmologia/Cosmology/decoupling.htm](http://www.bertolo.pro.br/fisica_cosmologia/Cosmologia/Cosmology/decoupling.htm). Acesso em Dez. 2018.

Boltzmann em sua forma reduzida é dada por [1]:

$$\frac{df}{dt} = C[f], \quad (4.1)$$

onde o  $C[f]$  é um funcional<sup>3</sup> que contém todos os termos de colisões entre as espécies<sup>4</sup>. Na ausência de interações, temos que  $df/dt = 0$ , indicando que o número de partículas em um determinado volume do espaço de fase é constante.

De modo geral, vamos considerar a aniquilação das espécies 1 e 2, assim podemos determinar a densidade de número de partículas da espécie  $n_1$  pela Eq. (4.1). A aniquilação de 1 e 2 leva ao processo  $1 + 2 \leftrightarrow 3 + 4$ . A equação de Boltzmann para esse processo físico levando em conta a expansão do Universo é<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} a^{-3} \frac{d(n_1 a^3)}{dt} &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \int \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \int \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3 2E_4} \\ &\times (2\pi)^4 \delta^3(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) |\mathcal{M}|^2 \\ &\times \{f_3 f_4 [1 \pm f_1][1 \pm f_2] - f_1 f_2 [1 \pm f_3][1 \pm f_4]\}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

em que  $f$  é a função de distribuição (número de ocupação) no espaço de fase,  $\delta^3(x)$  é a função delta de Dirac,  $\mathcal{M}$  é a amplitude e  $E$  é a energia relativística. É importante mencionar que essa abordagem é feita no âmbito da Relatividade Geral, onde a métrica é quadridimensional, portanto, devemos tratar o espaço de fase em quatro dimensões.

No contexto da Estatística Quântica, as distribuições para Fermi-Dirac (FD) e Bose-Einstein (BE) podem ser escritas como [49, 50, 51, 52]:

$$f = \frac{1}{e^{(E-\mu)/T} \pm 1}, \quad (4.3)$$

onde o sinal “+” indica FD e o sinal “−” indica BE. No limite em que  $T \ll (E - \mu)$ , a contribuição quântica ( $\pm 1$ ) é irrelevante, assim a Eq. (4.3) torna-se

$$f = e^{\mu/T} e^{-E/T}. \quad (4.4)$$

Com essa simplificação, a última linha da Eq. (4.2) fica:

$$f_3 f_4 - f_1 f_2 = e^{-(E_1+E_2)/T} \{e^{(\mu_3+\mu_4)/T} - e^{(\mu_1+\mu_2)/T}\}, \quad (4.5)$$

<sup>3</sup>Geralmente esses funcionais são funções de distribuições muito complicadas.

<sup>4</sup>Essas espécies podem ser férmions ou bósons, e.g., elétrons, prótons, fótons, etc.

<sup>5</sup>Ao longo do texto adotaremos o sistema de unidades naturais, i.e.,  $k_B = \hbar = c = 1$ .

onde usamos a conservação da energia.

A densidade de número de partículas no espaço de fase é dada por

$$n_i = g_i e^{\mu_i/T} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-E_i/T}, \quad (4.6)$$

em que  $g_i$  é número de estados de spin (degenerescência).

Podemos definir a densidade de número de partículas no equilíbrio da seguinte maneira [1]:

$$n_i^{(0)} \equiv g_i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-E_i/T}. \quad (4.7)$$

As expressões (4.6) e (4.7) imediatamente leva a  $n_i/n_i^{(0)} = e^{\mu_i/T}$ . Portanto, a Eq. (4.5) torna-se

$$f_3 f_4 - f_1 f_2 = e^{-(E_1+E_2)/T} \left\{ \frac{n_3 n_4}{n_3^{(0)} n_4^{(0)}} - \frac{n_1 n_2}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}} \right\}. \quad (4.8)$$

Enfim, a equação de Boltzmann, que antes apresentava algumas complicações analíticas, agora se resume a uma equação diferencial ordinária para a densidade de número de partículas, dada por

$$a^{-3} \frac{d(n_1 a^3)}{dt} = n_1^{(0)} n_2^{(0)} \langle \sigma v \rangle \left\{ \frac{n_3 n_4}{n_3^{(0)} n_4^{(0)}} - \frac{n_1 n_2}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}} \right\}, \quad (4.9)$$

onde

$$\begin{aligned} \langle \sigma v \rangle \equiv & \frac{1}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}} \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \int \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \int \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3 2E_4} e^{-(E_1+E_2)/T} \\ & \times (2\pi)^4 \delta^3(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) |\mathcal{M}|^2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

é média térmica da seção de choque. Mais adiante veremos que esse termo é a taxa de recombinação.

A Eq. (4.9) sugere uma condição de equilíbrio, de modo que

$$\frac{n_3 n_4}{n_3^{(0)} n_4^{(0)}} = \frac{n_1 n_2}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}}. \quad (4.11)$$

Deste modo, essa condição implica que o fator  $(n_1 a^3)$  permanece constante. No âmbito da Recombinação, essa condição de equilíbrio é conhecida como a equação de Saha<sup>6</sup>.

<sup>6</sup>Em Física de Partículas essa equação é conhecida como *equilíbrio químico*. No contexto da Nucleosíntese do Big Bang essa equação é chamada de *equilíbrio estatístico nuclear* [1].

## 4.3 Recombinação

### 4.3.1 A Equação de Saha: Uma Aproximação

No Universo primordial a temperatura diminuía à medida que o Universo expandia. Em temperaturas da ordem de  $1 \text{ eV}^7$ , os fótons permanecem fortemente acoplados aos elétrons via espalhamento Compton e elétrons aos prótons via espalhamento Coulomb<sup>8</sup> [1, 2, 20, 64]. Neste cenário, conforme os primeiros átomos neutros começam a surgir a alta razão fóton/bárion ioniza instantaneamente qualquer hidrogênio neutro produzido. Como as reações no plasma primordial ocorrem rapidamente, os potenciais químicos são conservados. Essa é uma importante propriedade dos potenciais químicos<sup>9</sup>. Desse modo, considerando que a reação  $e + p \leftrightarrow H + \gamma$  permanece em equilíbrio, a Eq. (4.11) torna-se

$$\frac{n_e n_p}{n_H} = \frac{n_e^{(0)} n_p^{(0)}}{n_H^{(0)}}, \quad (4.12)$$

onde redefinimos os índices  $1 = e, 2 = p$  e  $3 = H$ . A partir de agora, começaremos a analisar a evolução do grau ionização pela equação de Saha<sup>10</sup>. Depois disso, a análise será feita através da equação de Boltzmann estabelecendo uma solução exata para a descrição do período da recombinação, bem como passando pela última superfície de espalhamento até os dias atuais.

Primeiramente vamos definir a fração de elétrons livres da seguinte forma:

$$X_e \equiv \frac{n_e}{n_b} = \frac{n_p}{n_b}, \quad (4.13)$$

onde  $n_b = n_e + n_H = n_p + n_H$  é a densidade de bárions (número total de núcleos de hidrogênio) e a neutralidade do Universo assegura que  $n_e = n_p$ . Depois de alguma álgebra, obtemos

$$\frac{X_e^2}{1 - X_e} = \frac{n_e n_p}{n_H n_b}. \quad (4.14)$$

---

<sup>7</sup> $1 \text{ eV} = 11605 \text{ K}$ .

<sup>8</sup>Neste contexto, podemos afirmar que havia poucos hidrogênios neutros.

<sup>9</sup>Os potenciais químicos são conservados em qualquer reação que está ocorrendo rapidamente em um gás.

<sup>10</sup>Matematicamente a equação de Saha é uma equação do segundo grau escrita como:  $X(1 + SX) = 1$  [2].

O resultado da expressão (4.7) para partículas não relativísticas, ou seja,  $m_i \gg T$ <sup>11</sup>, é dado por

$$n_i^{(0)} = g_i e^{-m_i/T} \left( \frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2}. \quad (4.15)$$

Por outro lado, vimos que  $n_i/n_i^{(0)} = e^{\mu_i/T}$ , então, obtemos o número de partículas por unidade de volume,

$$n_i = g_i e^{(\mu_i - m_i)/T} \left( \frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2}. \quad (4.16)$$

Sabendo que  $g_e = g_p = 2$  e  $g_H = 4$ , e que o equilíbrio químico da reação de recombinação é  $\mu_e + \mu_p = \mu_H$ <sup>12</sup>, e considerando que  $m_H \approx m_p$ , podemos facilmente obter a equação de Saha [1, 2, 20, 64],

$$\frac{X_e^2}{1 - X_e} = \frac{1}{n_b} \left( \frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\epsilon_0/T}, \quad (4.17)$$

em que  $\epsilon_0 = 13,6 \text{ eV}$  é a energia de ligação do átomo de hidrogênio no estado fundamental e  $n_b = 1,12 \times 10^{-5} \Omega_{b0} h^2 (1+z)^3 \text{ cm}^{-3}$ . Aqui,  $\Omega_{b0}$  é o parâmetro de densidade de matéria bariônica hoje,  $h$  é o parâmetro que mede a incerteza na medida da expansão do Universo (constante de Hubble) e  $T_0 = 2,725 \text{ K}$  é a temperatura da RCF hoje. Além disso,  $z$  é o *redshift* cosmológico, onde sua relação com o fator de escala é  $1+z = a_0/a$ , de modo que  $a_0$  é o fator de escala hoje.

Inicialmente nossa análise impôs que a recombinação começasse quando aproximadamente 90% da matéria do Universo ainda estivesse ionizada, ou seja, o grau de ionização do Universo fosse  $X_e = 0,9$  e terminasse quando aproximadamente 99% da matéria do Universo já combinou para formar o átomo de hidrogênio neutro, isto é, com o grau de ionização do Universo  $X_e = 0,01$  [12, 13]. Seguindo essas condições, vamos acompanhar a evolução do grau de ionização no Universo de acordo com a solução da Eq. (4.17). A equação de Saha leva em conta a recombinação diretamente do estado fundamental. Mas, durante o processo, são produzidos fótons altamente energéticos, implicando que os átomos de hidrogênio neutro recém formados sejam ionizados. Assim, conforme  $X_e$  cai, a taxa de recombinação diminui, de maneira que se torna mais difícil manter o equilíbrio [1, 3]. A descrição do processo de recombinação pela equação de Saha é até razoável no

<sup>11</sup>A energia das partículas no limite não relativístico é  $E_i = m_i + p^2/2m_i$ .

<sup>12</sup>O fóton não tem massa, por isso seu potencial químico é zero.

início, o problema é que a curva cai muito rapidamente levando a resultados estranhos conforme  $X_e$  diminui. A matéria se desacopla da radiação em  $X_e = 0,5$ , e a abordagem de Saha sugere que o *redshift* do desacoplamento e sua respectiva temperatura sejam  $z_{dec} \sim 1379$  e  $T_{dec} \sim 3760 K$ . A Figura 4.3 mostra o comportamento de  $X_e$  em função do *redshift*  $z$  pela a equação de Saha. Para acompanhar corretamente a fração de elétrons livres, devemos resolver a equação de Boltzmann encontrando uma solução exata para evolução detalhada de  $X_e$  ao longo da história térmica do Universo.

### 4.3.2 A Solução Exata

Em nossa análise, usamos a taxa líquida de recombinação encontrada por Peebles [3, 12, 13, 14]. Neste caso, a equação de Boltzmann para a densidade de elétrons, Eq. (4.9), pode ser convenientemente escrita como<sup>13</sup>

$$\frac{dX_e}{dt} = \left[ \beta_e(1 - X_e)e^{-[(B_1 - B_2)/k_B T_\gamma]} - a_{rec}X_e^2 n_b + I \right] C. \quad (4.18)$$

Para os átomos de hidrogênio temos que  $n_b = \rho_b/m_p$ , onde  $\rho_b$  é a densidade de matéria bariônica e  $m_p$  é a massa do próton.  $B_1$  e  $B_2$  são as energias de ligação do átomo de hidrogênio no estado fundamental e no primeiro estado excitado, respectivamente. O termo  $a_{rec}$  representa o coeficiente de recombinação (taxa de recombinação) e é dado por

$$a_{rec} \equiv \langle \sigma v \rangle = 2,84 \times 10^{-11} T_m^{-1/2} cm^3 s^{-1}, \quad (4.19)$$

onde  $T_m$  é a temperatura da matéria. A taxa de fotoionização,  $\beta_e$ , é expressa como

$$\beta_e = a_{rec} \frac{(2\pi m_e k_B T_\gamma)^{3/2}}{h^3} e^{-(B_2/k_B T_\gamma)}, \quad (4.20)$$

com  $T_\gamma$  sendo a temperatura da radiação.

Nessas expressões,  $m_e$  é a massa do elétron,  $k_B$  a constante e Boltzmann e  $h$  a constante de Planck. O termo  $I$  designa a ionização produzida por colisões entre os elétrons livres e os átomos de hidrogênio, escrita como [65]:

$$I = 1,23 \times 10^{-5} N_A X_e(1 - X_e) \rho_b \frac{k_B}{B_1} T_m^{1/2} e^{-(B_2/k_B T_m)}, \quad (4.21)$$

<sup>13</sup>Nesta Subseção não utilizamos o sistema de unidades naturais, pois precisamos computar as constantes fundamentais na integração numérica.

em que  $N_A$  é o número de Avogadro.

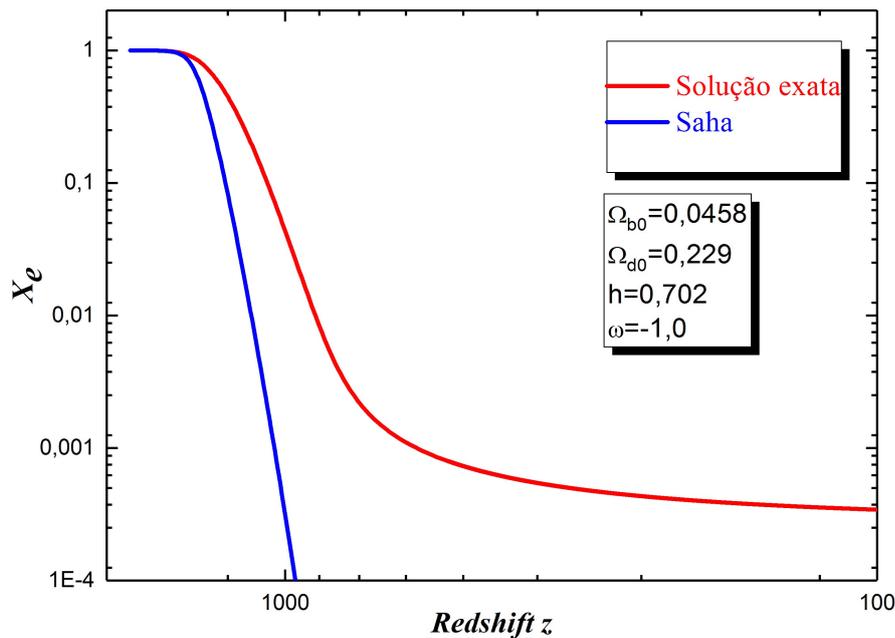
Finalmente,  $C$  representa a probabilidade de um átomo de hidrogênio excitado decair via a emissão de dois fótons ( $2s - 1s$ ), dada por

$$C = \frac{\Lambda_{2s,1s}}{\Lambda_{2s,1s} + \beta_e}, \quad (4.22)$$

onde  $\Lambda_{2s,1s} = 8,23s^{-1}$  é a taxa de decaimento de dois fótons do nível metaestável  $2s$  para o estado fundamental  $1s$  [14, 66].

A Figura 4.3 mostra as curvas para a equação de Saha e a integração numérica da Eq. (4.18) num plano formado por *redshift*  $z$  - grau de ionização  $X_e$ .

**Figura 4.3:** Evolução do grau de ionização do Universo. As linhas mostram a ionização residual no início, durante e no fim da recombinação primordial do hidrogênio.



Fonte: (SOUZA, 2007)

A linha vermelha na Figura 4.3 representa a curva teórica para a evolução do grau de ionização durante a recombinação. Diferentemente da equação de Saha, a modelagem de Peebles considera que a única maneira da recombinação prosseguir é via captura de um dos estados excitados do hidrogênio. A fração ionizada no término da recombinação é importante, principalmente, para a formação das primeiras moléculas de hidrogênio. Alguns dados relevantes da recombinação são mostrados na Tabela 4.1.

**Tabela 4.1:** Alguns dados da era da recombinação. Os índices  $i$  e  $f$  representam o início e o fim da recombinação.  $z$  é o *redshift*,  $t$  é a idade do Universo,  $T$  a temperatura da radiação, e  $\Delta z_{rec}$  e  $\Delta t_{rec}$  são, respectivamente, o intervalo de duração da recombinação em *redshift* e tempo. O *redshift* do desacoplamento é designado por  $z_{dec}$ .

| Solução | $z_i$  | $z_f$ | $z_{dec}$ | $t_i$<br>(Anos) | $t_f$<br>(Anos) | $T_i$<br>(K) | $T_f$<br>(K) | $\Delta z_{rec}$ | $\Delta t_{rec}$<br>(Anos) |
|---------|--------|-------|-----------|-----------------|-----------------|--------------|--------------|------------------|----------------------------|
| Saha    | 1481,6 | 1144  | 1378      | 311.170         | 458.499         | 4040         | 3120         | 337,6            | 147.329                    |
| Exata   | 1444,9 | 894,4 | 1269      | 320.000         | 670.000         | 3940         | 2440         | 550,5            | 350.000                    |

Fonte: (SOUZA, 2007)

# Capítulo 5

## Abordagem Não-Extensiva da Recombinação

### 5.1 Preliminares

A ideia central do trabalho consiste em generalizar a equação de Saha utilizando a estatística não-extensiva de Tsallis. Pretendemos observar os efeitos dessa aplicação em detrimento dos resultados convencionais disponíveis na literatura. Como vimos no capítulo 4, a equação de Saha envolve o cálculo da densidade de número de partículas. Nesta Seção, vamos apresentar os elementos necessários para prosseguir com a generalização da equação de Saha. O nosso ponto de partida é condição de equilíbrio dada pela Eq. (4.12), que em sua versão generalizada fica:

$$\frac{n_e^q n_p^q}{n_H^q} = \frac{n_e^{(0),q} n_p^{(0),q}}{n_H^{(0),q}} . \quad (5.1)$$

Aqui, uma informação importante é digna de menção. Quando trabalhamos com o lado esquerdo da Eq. (5.1), nos deparamos com uma dificuldade física<sup>1</sup> e analítica<sup>2</sup>, o equilíbrio devido aos potenciais químicos das partículas só pode ser aplicado em uma parte da equação de Saha generalizada, de modo que surgem termos cruzados que impossibilitam uma expressão sem os potenciais químicos. Assim, é muito complicado descrever o

---

<sup>1</sup>Física, porque não se sabe como determinar os potenciais químicos dessas partículas. Na equação de Saha usual, esses potenciais químicos desaparecem devido ser possível aplicar o equilíbrio  $\mu_e + \mu_p = \mu_H$ .

<sup>2</sup>Analítica, porque surgem termos cruzados dos potenciais químicos, de modo que é impossível rearranjar a expressão para aplicar o equilíbrio.

comportamento do grau de ionização pela equação de Saha. Para contornar essas complicações, em nossa abordagem, vamos trabalhar com o lado direito da Eq. (5.1). Portanto, a equação de Saha não-extensiva pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{(X_e^q)^2}{1 - X_e^q} = \frac{n_e^{(0),q} n_p^{(0),q}}{n_H^{(0),q} n_b^{(0),q}}, \quad (5.2)$$

onde  $n_b^{(0),q} = n_e^{(0),q} + n_H^{(0),q}$  é  $q$ -densidade de bárions.

O próximo passo é determinar  $n_i^{(0),q}$ , em que o índice  $i$  representa as espécies envolvidas no processo de recombinação, a saber, elétrons, prótons e átomos de hidrogênio. Em nossa abordagem, usamos a definição de densidade de número de partículas no equilíbrio conforme a Eq. (4.7), de modo que a sua versão generalizada é escrita como

$$n_i^{(0),q} \equiv \frac{g_i}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \mathcal{N}_i^{(0),q}, \quad (5.3)$$

onde  $\mathcal{N}_i^{(0),q}$  é o número de ocupação generalizado no equilíbrio, isto é, com  $\mu = 0$ . Para evitar ambiguidade na notação subsequente, vamos definir  $\mathcal{N}_i^{(0),q} \equiv \mathcal{N}_i^{\prime 3}$ .

Na Mecânica Estatística de BG a função de distribuição é responsável por contar o número de partículas em uma determinada região do espaço de fase. No contexto da Estatística de Tsallis, as formas obtidas para o número de ocupação ainda é motivo de muita discussão, porque não se sabe ao certo qual a forma apropriada para o número total de partículas generalizado<sup>4</sup> [67]. Neste trabalho, no intuito de uma investigação mais abrangente, consideramos as seguintes formas para o número de ocupação generalizado [22, 67, 68]:

$$\mathcal{N}_i^{\prime(1)} = \frac{1}{e_q^{\beta E_i} \pm 1}, \quad (5.4)$$

e

$$\mathcal{N}_i^{\prime(2)} = \frac{1}{\left(e_q^{\beta E_i}\right)^q \pm 1}. \quad (5.5)$$

No contexto da Recombinação,  $E_i = m_i c^2 + p^2/2m_i$  é a energia das partículas não relativísticas, ou seja, quando  $m_i c^2 \gg k_B T$  e  $\beta = 1/k_B T$ . Observe que, nesse limite,

<sup>3</sup>Estamos definindo dessa maneira porque usaremos duas versões generalizadas para a função de distribuição.

<sup>4</sup>Por essa razão, neste trabalho, vamos adotar a forma convencional para o número total de partículas, a saber,  $N = \sum_i \mathcal{N}_i$ .

$e_q^{\beta E_i} \gg 1$ , logo, o termo de contribuição da natureza quântica das partículas ( $\pm 1$ ) é desprezível. Portanto, em suas formas algébricas, as equações (5.4) e (5.5) tornam-se

$$\mathcal{N}'_i^{(1)} = [1 - (1 - q)\beta E_i]^{\frac{1}{1-q}} , \quad (5.6)$$

e

$$\mathcal{N}'_i^{(2)} = [1 - (1 - q)\beta E_i]^{\frac{q}{1-q}} . \quad (5.7)$$

Tendo feito isto, o próximo passo é resolver analiticamente a Eq. (5.3). Para fazer isso, usaremos as equações (5.6) e (5.7) ambas para os regimes  $q > 1$  e  $q < 1$ .

## 5.2 Determinação da $q$ -Densidade de Número de Partículas

### 5.2.1 $q$ -Densidade de Número para $\mathcal{N}'_i^{(1)}$

Inserindo a Eq. (5.6) na Eq. (5.3), obtemos

$$n_i^{(0),q} = \frac{4\pi g_i}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty dp p^2 \exp_q \left[ -\frac{m_i c^2}{k_B T} - \frac{p^2}{2m_i k_B T} \right] , \quad (5.8)$$

onde o fator  $4\pi$  vem da integração de  $d\Omega^5$ . Como a integração só depende de  $p$ , devemos retirar os termos constantes do argumento de  $\exp_q$ . Para isso, recorremos a seguinte propriedade [60]:

$$\exp_q(x \pm y) = \exp_q(x) \exp_q \left[ \frac{\pm y}{1 + (1 - q)x} \right] . \quad (5.9)$$

Desse modo, a Eq. (5.8) torna-se

$$n_i^{(0),q} = \frac{4\pi g_i}{(2\pi\hbar)^3} e_q^{-\frac{m_i c^2}{k_B T}} \int_0^a dp p^2 [1 + (q - 1)\gamma p^2]^{\frac{1}{1-q}} , \quad (5.10)$$

onde

$$a = \begin{cases} \infty, & q > 1 \\ [(1 - q)\gamma]^{-1/2}, & q < 1 . \end{cases} \quad (5.11)$$

---

<sup>5</sup>  $\int_{-\infty}^{+\infty} d^3 p f(p) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\Omega \int_0^\infty dp p^2 f(p)$ , em que  $d^3 p = p^2 dp d\Omega$  é o volume do espaço de fase em coordenadas esféricas, no qual  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ .

O procedimento analítico para resolver essa integral pode ser consultado no apêndice B. O resultado da Eq. (5.10) pode ser expresso da seguinte forma:

$$n_i^{(0),q} = \frac{4\pi g_i}{(2\pi\hbar)^3} e_q^{-\frac{m_i c^2}{k_B T}} A_q^i, \quad (5.12)$$

onde

$$A_q^i = \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}}{4[(q-1)\gamma]^{3/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{5-3q}{2(q-1)}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}, & \text{se } 1 < q < 5/3 \\ \frac{(2m_i k_B T)^{3/2} \sqrt{\pi}}{4}, & \text{se } q = 1 \\ \frac{\sqrt{\pi}}{4[(1-q)\gamma]^{3/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q}\right)}{\Gamma\left(\frac{7-5q}{2(1-q)}\right)}, & \text{se } q < 1. \end{cases} \quad (5.13)$$

### 5.2.2 $q$ -Densidade de Número para $\mathcal{N}_i'^{(2)}$

Usando o número de ocupação  $\mathcal{N}_i'^{(2)}$  dado pela Eq. (5.7), a Eq. (5.3) torna-se

$$n_i^{(0),q} = \frac{4\pi g_i}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty dp p^2 \left\{ \exp_q \left[ -\frac{m_i c^2}{k_B T} - \frac{p^2}{2m_i k_B T} \right] \right\}^q. \quad (5.14)$$

Usando a propriedade expressa pela Eq. (5.9), podemos escrever

$$n_i^{(0),q} = \frac{4\pi g_i}{(2\pi\hbar)^3} \left[ e_q^{-\frac{m_i c^2}{k_B T}} \right]^q \int_0^a dp p^2 \left[ 1 + (q-1)\gamma p^2 \right]^{\frac{q}{1-q}}, \quad (5.15)$$

onde  $a$  é dado pela equação (5.11).

Um procedimento análogo ao da Subseção anterior leva ao seguinte resultado:

$$n_i^{(0),q} = \frac{4\pi g_i}{(2\pi\hbar)^3} \left[ e_q^{-\frac{m_i c^2}{k_B T}} \right]^q B_q^i, \quad (5.16)$$

no qual

$$B_q^i = \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}}{4[(q-1)\gamma]^{3/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{q-1}\right)}, & \text{se } 1 < q < 3 \\ \frac{(2m_i k_B T)^{3/2} \sqrt{\pi}}{4}, & \text{se } q = 1 \\ \frac{\sqrt{\pi}}{4[(1-q)\gamma]^{3/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right)}{\Gamma\left(\frac{5-3q}{2(1-q)}\right)}, & \text{se } q < 1. \end{cases} \quad (5.17)$$

É importante ressaltar que devemos tomar os devidos cuidados pertinentes aos regimes  $q > 1$  e  $q < 1$ . Em nossa abordagem,  $\gamma$  deve está de acordo com a seguinte definição:

$$\gamma \equiv \begin{cases} \frac{1}{2m_i k_B T [1 + (q-1) \frac{m_i c^2}{k_B T}]}, & \text{se } q > 1 \\ \frac{1}{2m_i k_B T [1 + (1-q) \frac{m_i c^2}{k_B T}]}, & \text{se } q < 1. \end{cases} \quad (5.18)$$

A definição de  $\gamma$ , quando  $q > 1$ , surge naturalmente nas equações desta abordagem. Por outro lado, a definição para  $\gamma$ , quando  $q < 1$ , foi imposta (*Ad hoc*) para evitar resultados imaginários, uma vez que esse fator está dentro de uma raiz quadrada. Somente dessa maneira, é possível obter os resultados para a equação de Saha não-extensiva.

### 5.3 A Equação de Saha Não-Extensiva

Tendo apresentado todas as formas possíveis para a  $q$ -densidade de número usando as duas escolhas para o número de ocupação generalizado, agora estamos em uma posição para encontrar as versões não-extensiva da equação de Saha. As  $q$ -densidades de número para elétrons, prótons e átomos de hidrogênio usando o número de ocupação  $\mathcal{N}_i'^{(1)}$  são, respectivamente,

$$\begin{aligned} n_e^{(0),q} &= A_q^e \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} e_q^{-\frac{m_e c^2}{k_B T}}, \\ n_p^{(0),q} &= A_q^p \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} e_q^{-\frac{m_p c^2}{k_B T}}, \\ n_H^{(0),q} &= A_q^H \frac{16\pi}{(2\pi\hbar)^3} e_q^{-\frac{m_H c^2}{k_B T}}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Analogamente, podemos escrever as  $q$ -densidades de número usando o número de ocupação  $\mathcal{N}_i'^{(2)}$  da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} n_e^{(0),q} &= B_q^e \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \left[ e_q^{-\frac{m_e c^2}{k_B T}} \right]^q, \\ n_p^{(0),q} &= B_q^p \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \left[ e_q^{-\frac{m_p c^2}{k_B T}} \right]^q, \\ n_H^{(0),q} &= B_q^H \frac{16\pi}{(2\pi\hbar)^3} \left[ e_q^{-\frac{m_H c^2}{k_B T}} \right]^q. \end{aligned} \quad (5.20)$$

A Eq. (5.2) para o número de ocupação  $\mathcal{N}_i^{(1)}$  torna-se

$$\frac{(X_e^q)^2}{1 - X_e^q} = \frac{A_q^e A_q^p}{A_q^H} \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \frac{e_q^{-\frac{m_e c^2}{k_B T}} e_q^{-\frac{m_p c^2}{k_B T}}}{n_b^{(0),q} e_q^{-\frac{m_H c^2}{k_B T}}}. \quad (5.21)$$

A  $q$ -aritmética permite expressar as seguintes propriedades (ver capítulo 3):

$$\exp_q(x) \exp_q(y) = \exp_q[x + y + (1 - q)xy], \quad (5.22)$$

e

$$\frac{\exp_q(x)}{\exp_q(y)} = \exp_q \left[ \frac{x - y}{1 + (1 - q)y} \right]. \quad (5.23)$$

Usando essas duas propriedades e o fato que  $m_H \approx m_p$ , a Eq. (5.21) expressando todos os termos fica:

- Para o regime  $q > 1$

$$\frac{(X_e^q)^2}{1 - X_e^q} = C_{q>1} \frac{(2\pi m_e k_B T)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3 n_b^{(0),q}} \left[ 1 + (q - 1) \frac{m_e c^2}{k_B T} \right]^{3/2} [1 + (1 - q)\xi_q]^{\frac{1}{1-q}}, \quad (5.24)$$

onde definimos

$$C_{q>1} \equiv \frac{1}{(q - 1)^{3/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{5-3q}{2(q-1)}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}, \quad (5.25)$$

e

$$\xi_q \equiv \frac{-\frac{B}{k_B T} + (1 - q) \frac{m_e m_p c^4}{k_B^2 T^2}}{1 + (q - 1) \frac{m_H c^2}{k_B T}}. \quad (5.26)$$

- Para o regime  $q < 1$

$$\frac{(X_e^q)^2}{1 - X_e^q} = C_{q<1} \frac{(2\pi m_e k_B T)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3 n_b^{(0),q}} \left[ 1 + (1 - q) \frac{m_e c^2}{k_B T} \right]^{3/2} [1 + (q - 1)\xi_q]^{\frac{1}{q-1}}, \quad (5.27)$$

em que definimos

$$C_{q<1} \equiv \frac{1}{(1 - q)^{3/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q}\right)}{\Gamma\left(\frac{7-5q}{2(1-q)}\right)}. \quad (5.28)$$

O fator  $\xi_q$  é dado pela Eq. (5.26). As expressões (5.24) e (5.27) representam a equação de Saha não-extensiva usando o número de ocupação  $\mathcal{N}_i'^{(1)}$  para os dois regimes do parâmetro  $q$  supracitados.

De modo similar podemos obter a equação de Saha não-extensiva para o número de ocupação  $\mathcal{N}_i'^{(2)}$ . Portanto, a Eq. (5.2) pode ser escrita como

$$\frac{(X_e^q)^2}{1 - X_e^q} = \frac{B_q^e B_q^p}{B_q^H} \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \frac{n_b^{(0),q}}{n_b^{(0),q}} \frac{\left[ e_q^{-\frac{m_e c^2}{k_B T}} \right]^q \left[ e_q^{-\frac{m_p c^2}{k_B T}} \right]^q}{\left[ e_q^{-\frac{m_H c^2}{k_B T}} \right]^q}. \quad (5.29)$$

Seguindo os mesmos procedimentos que foram feitos para obter as expressões anteriores, teremos os seguintes cenários:

- Para o regime  $q > 1$

$$\frac{(X_e^q)^2}{1 - X_e^q} = D_{q>1} \frac{(2\pi m_e k_B T)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{n_b^{(0),q}} \left[ 1 + (q-1) \frac{m_e c^2}{k_B T} \right]^{3/2} [1 + (1-q)\xi_q]^{1-q}, \quad (5.30)$$

no qual definimos

$$D_{q>1} \equiv \frac{1}{(q-1)^{3/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{q-1}\right)}. \quad (5.31)$$

- Para o regime  $q < 1$

$$\frac{(X_e^q)^2}{1 - X_e^q} = D_{q<1} \frac{(2\pi m_e k_B T)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{n_b^{(0),q}} \left[ 1 + (1-q) \frac{m_e c^2}{k_B T} \right]^{3/2} [1 + (q-1)\xi_q]^{1-q}, \quad (5.32)$$

onde definimos

$$D_{q<1} \equiv \frac{1}{(1-q)^{3/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right)}{\Gamma\left(\frac{5-3q}{2(1-q)}\right)}. \quad (5.33)$$

O fator  $\xi_q$  é dado pela expressão (5.26). A equação de Saha não-extensiva usando o número de ocupação  $\mathcal{N}_i'^{(2)}$  é representada pelas equações (5.30) e (5.32) conforme os regimes do parâmetro  $q$  mostrados acima.

Nessas expressões  $B$  representa a energia de ligação do átomo de hidrogênio no estado fundamental. Já  $m_e$ ,  $m_p$  e  $m_H$  são as massas do elétron, próton e hidrogênio,

respectivamente. Além disso,  $k_B$  é a constante de Boltzmann,  $c$  é a velocidade da luz no vácuo e  $\hbar$  é a constante reduzida de Planck .

É importante evidenciar que, no regime  $q < 1$ , tivemos que definir a  $q$ -exponencial da seguinte forma:  $[1 + (q - 1)x]^{\frac{1}{q-1}}$ . Caso contrário, não é possível obter os resultados numéricos.

## 5.4 Determinação da Densidade de Bárions Generalizada

Para uma descrição completa da equação de Saha não-extensiva, precisamos especificar a  $q$ -densidade de bárions,  $n_b^{(0),q}$ . Intuitivamente o caminho mais acessível seria calcular  $n_b^{(0),q} = n_e^{(0),q} + n_H^{(0),q}$ . Contudo, há duas possíveis formas de encarar essa determinação: a primeira seria determiná-la usando  $n_b^{(0),q} = \rho_b^{(0),q}/m_p$ , cujos procedimentos usuais podem ser consultados em [3]; e a segunda forma seria através da razão bárion/fóton,  $\eta_q = n_b^{(0),q}/n_\gamma^{(0),q}$ , onde o tratamento convencional pode ser encontrado em [20]. Neste trabalho, seguiremos os procedimentos usuais e buscaremos encontrar uma expressão usando essas duas formas para determinar uma possível densidade de bárions generalizada.

### 5.4.1 $q$ -Densidade de Bárions Usando $\rho_b^{(0),q}/m_p$

Inicialmente é preciso apresentar alguns parâmetros cosmológicos indispensáveis para essa determinação. Uma forma de fazer com que todas as densidades de energia tenham a mesma unidade é definir o parâmetro de densidade como [1]:

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_{cr}} , \quad (5.34)$$

onde  $\rho_{cr}$  é a densidade crítica, que significa a densidade necessária para que o Universo tenha geometria plana. O índice  $i$  designa as componentes do Universo. Assim, para a componente bariônica, temos

$$\Omega_b = \frac{\rho_b}{\rho_{cr}} . \quad (5.35)$$

A densidade crítica hoje é dada por

$$\rho_{c,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1,8791 h^2 \times 10^{-29} g \text{ cm}^{-3}. \quad (5.36)$$

Uma abordagem não-extensiva das equações de Friedmann pode ser encontrada na referência [69]. Aqui, usaremos a seguinte generalização da equação de Friedmann:

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{4(5-3q)\pi G}{3} \rho a^2. \quad (5.37)$$

Em um Universo plano, isto é, com  $k = 0$ , a  $q$ -densidade crítica hoje fica:

$$\rho_{cr,0}^q = \frac{3H_0^2}{4(5-3q)\pi G}, \quad (5.38)$$

na qual fizemos  $H = H_0$  e  $a = a_0 = 1$ .

Tendo apresentado a Eq. (5.38), podemos facilmente escrever a seguinte relação:

$$\rho_{cr,0}^q = \frac{2}{(5-3q)} \rho_{cr,0}. \quad (5.39)$$

De posse dessas expressões, estamos prontos para determinar  $n_b^{(0),q}$ . Portanto, a  $q$ -densidade de bárions pode ser escrita como

$$\begin{aligned} n_b^{(0),q} &= \frac{\rho_{b,0}^q}{m_p} \\ &= \frac{\Omega_b \rho_{cr,0}^q}{m_p} \\ &= \Omega_{b0} (1+z)^3 \frac{2}{(5-3q)} \left( \frac{\rho_{cr,0}}{m_p} \right), \end{aligned}$$

onde usamos  $\Omega_b = \Omega_{b0}(1+z)^3$ . Numericamente temos que [3]

$$\frac{\rho_{cr,0}}{m_p} = 1,124 \times 10^{-5} \text{ prótons } \text{cm}^{-3} h^2. \quad (5.40)$$

A expressão final para a  $q$ -densidade de bárions fica:

$$n_b^{(0),q} = 1,124 \times 10^{-5} \frac{2}{(5-3q)} \Omega_{b0} h^2 (1+z)^3 \text{cm}^{-3}. \quad (5.41)$$

A densidade de bárions usual é recuperada quando  $q = 1$ . Uma observação relevante é que o intervalo  $0 < q < 5/3$  parece ser uma restrição muito comum em muitos sistemas físicos estudados na literatura.

### 5.4.2 $q$ -Densidade de Bárions Usando $\eta_q$

Usaremos como premissa a definição da razão bárion/fóton da seguinte maneira:

$$\eta_q \equiv \frac{n_b^{(0),q}}{n_\gamma^q}, \quad (5.42)$$

uma vez que  $n_\gamma^{(0),q} = n_\gamma^q$ . Neste trabalho, vamos assumir  $\eta_q \approx 6,1 \times 10^{-10}$ , que pode ser encontrado em [20]. Então, teremos

$$n_b^{(0),q} = 6,1 \times 10^{-10} n_\gamma^q. \quad (5.43)$$

Feito isto, precisamos determinar a  $q$ -densidade de fótons. A Eq. (5.3) para fótons torna-se

$$n_\gamma^q = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \frac{1}{e_q^{\beta E_i} - 1}, \quad (5.44)$$

onde a degenerescência dos fótons é  $g_\gamma = 2$ . Sabendo que a energia para partículas relativísticas é  $E_i = \sqrt{m_i^2 c^4 + p^2 c^2}$ , tendo em vista que o fóton não tem massa, e para o caso em que  $e_q^{\beta E_i} \gg 1$ , a Eq. (5.44) para o número de ocupação  $\mathcal{N}_i'^{(1)}$  fica:

$$n_\gamma^q = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^b dp p^2 [1 - (1-q)\alpha p]^{1-\frac{1}{q}}, \quad (5.45)$$

em que

$$b = \begin{cases} \infty, & q > 1 \\ \frac{1}{(1-q)\alpha}, & q < 1, \end{cases} \quad (5.46)$$

de modo que definimos  $\alpha = \frac{c}{k_B T}$ .

A resolução da expressão (5.45) pode ser consultada no apêndice B, cujo resultado é dado por

$$n_\gamma^q = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} G_q, \quad (5.47)$$

onde

$$G_q = \begin{cases} \frac{2}{[(q-1)\alpha]^3} \frac{\Gamma\left(\frac{4-3q}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}, & \text{se } 1 < q < 4/3 \\ 2 \left(\frac{k_B T}{c}\right)^3, & \text{se } q = 1 \\ \frac{2}{[(1-q)\alpha]^3} \frac{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q}\right)}{\Gamma\left(\frac{5-4q}{1-q}\right)}, & \text{se } q < 1. \end{cases} \quad (5.48)$$

Sendo assim, a  $q$ -densidade de bárions torna-se

$$n_b^{(0),q} = 6,1 \times 10^{-10} \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} G_q . \quad (5.49)$$

Desse modo, teremos os seguintes cenários:

- Para o regime  $q > 1$

$$n_b^{(0),q} = 6,1 \times 10^{-10} \frac{16\pi}{\left[(q-1)\frac{hc}{k_B T}\right]^3} \frac{\Gamma\left(\frac{4-3q}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)} . \quad (5.50)$$

- Para o regime  $q < 1$

$$n_b^{(0),q} = 6,1 \times 10^{-10} \frac{16\pi}{\left[(1-q)\frac{hc}{k_B T}\right]^3} \frac{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q}\right)}{\Gamma\left(\frac{5-4q}{1-q}\right)} . \quad (5.51)$$

A Eq. (5.44) para o número de ocupação  $\mathcal{N}_i^{(2)}$  é dada por

$$n_\gamma^q = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^b dp p^2 [1 - (1-q)\alpha p]^{1-\frac{q}{1-q}} , \quad (5.52)$$

onde  $b$  e  $\alpha$  são os mesmos da Eq. (5.45).

O resultado da expressão (5.52) pode ser escrito como

$$n_\gamma^q = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} R_q , \quad (5.53)$$

no qual

$$R_q = \begin{cases} \frac{2}{[(q-1)\alpha]^3} \frac{\Gamma\left(\frac{3-2q}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{q-1}\right)}, & \text{se } 1 < q < 3/2 \\ 2 \left(\frac{k_B T}{c}\right)^3, & \text{se } q = 1 \\ \frac{2}{[(1-q)\alpha]^3} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right)}{\Gamma\left(\frac{4-3q}{1-q}\right)}, & \text{se } q < 1 . \end{cases} \quad (5.54)$$

A  $q$ -densidade de bárions torna-se

$$n_b^{(0),q} = 6,1 \times 10^{-10} \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} R_q . \quad (5.55)$$

Nesse caso, teremos os seguintes cenários:

- Para o regime  $q > 1$

$$n_b^{(0),q} = 6,1 \times 10^{-10} \frac{16\pi}{\left[(q-1)\frac{\hbar c}{k_B T}\right]^3} \frac{\Gamma\left(\frac{3-2q}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{q-1}\right)}. \quad (5.56)$$

- Para o regime  $q < 1$

$$n_b^{(0),q} = 6,1 \times 10^{-10} \frac{16\pi}{\left[(1-q)\frac{\hbar c}{k_B T}\right]^3} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right)}{\Gamma\left(\frac{4-3q}{1-q}\right)}. \quad (5.57)$$

Uma observação importante é que os resultados apresentados aqui são uma boa aproximação frente aos resultados convencionais. Para ilustrar isso, vamos comparar os resultados de  $n_\gamma^q$  e  $n_\gamma$ . No limite  $q \rightarrow 1$ , para  $n_\gamma^q$  nas expressões acima, chegamos ao seguinte resultado:

$$n_\gamma^1 = 0,2026 \left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3. \quad (5.58)$$

O resultado usual para  $n_\gamma$  pode ser consultado em [20], cujo valor é dado por

$$n_\gamma = 0,2436 \left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3. \quad (5.59)$$

Essa pequena diferença é devido a aproximação que fizemos para resolver as integrais nas expressões (5.45) e (5.52).

## 5.5 Um Tratamento Alternativo Para a Equação de Saha

Além das formas de abordar a equação de Saha apresentadas anteriormente, podemos fazer um tratamento alternativo seguindo as mesmas condições tal como considerar a densidade de número no equilíbrio, isto é, fazendo  $\mu = 0$ . Esse tratamento alternativo consiste em expandir a  $e_q^x$  em torno de  $(q-1)$  ao invés de resolve-la de modo completo como fizemos nas seções anteriores. Esse procedimento é ideal para simplificar as aplicações. Essa expansão pode ser encontrada em [22], a qual é dada por

$$e_q^x = e^x \left[ 1 + \frac{x^2}{2}(q-1) + \frac{8x^3 + 3x^4}{24}(q-1)^2 + \mathcal{O}[(q-1)^3] \right] \quad (\forall x; q \rightarrow 1). \quad (5.60)$$

Para conduzir esse tratamento alternativo, vamos considerar apenas número de ocupação  $\mathcal{N}'_i^{(1)}$  dado pela Eq. (5.4), de modo que sua expansão até primeira ordem de  $(q - 1)$  fica [16]:

$$\mathcal{N}'_i^{(1)} = \frac{1}{e^{\beta E_i} \pm 1} + \frac{(q-1)}{2} \frac{(\beta E_i)^2 e^{\beta E_i}}{(e^{\beta E_i} \pm 1)^2} + \mathcal{O}[(q-1)^2]. \quad (5.61)$$

Como estamos interessados em estudar partículas não relativísticas, no caso da recombinação, então nesse limite,  $e^{\beta E_i} \gg \pm 1$ . Portanto, a Eq. (5.61) torna-se

$$\mathcal{N}'_i^{(1)} = e^{-\beta E_i} + \frac{(q-1)}{2} (\beta E_i)^2 e^{-\beta E_i}. \quad (5.62)$$

Desse modo, a  $q$ -densidade de número de partículas pode ser escrita como

$$n_i^{(0),q} = \frac{g_i}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p e^{-\beta E_i} + \frac{g_i}{(2\pi\hbar)^3} \frac{(q-1)}{2} \beta^2 \int d^3p E_i^2 e^{-\beta E_i}. \quad (5.63)$$

O primeiro termo do lado direito da equação acima é igual a  $n_i^{(0)}$  (ver Eq. (4.7)). Agora precisamos resolver o segundo termo do lado direito da mesma equação. Usando a energia para partículas não relativísticas, podemos chegar ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} n_i^{(0),q} &= n_i^{(0)} + \left[ 4\pi m_i^2 c^4 \int_0^\infty dp p^2 e^{-\frac{\beta p^2}{2m_i}} + 4\pi c^2 \int_0^\infty dp p^4 e^{-\frac{\beta p^2}{2m_i}} + \frac{\pi}{m_i^2} \int_0^\infty dp p^6 e^{-\frac{\beta p^2}{2m_i}} \right] \\ &\times \frac{g_i}{(2\pi\hbar)^3} \frac{(q-1)}{2} \beta^2 e^{-\beta m_i c^2}. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Existem vários métodos para resolver as integrais acima. Recentemente Sales *et al* desenvolveram um método alternativo simples e eficiente para resolver esse tipo de integral [70]. O método é dado por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx = \gamma_{2n} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{\frac{2n+1}{2}}} \quad (\forall n \in \mathbb{N}), \quad (5.65)$$

onde

$$\gamma_{2n} = \left. \frac{d^n (1-x)^{-1/2}}{dx^n} \right|_{x=0}. \quad (5.66)$$

Usando esse método, as integrais podem ser expressas da seguinte forma:

$$\int_0^\infty dp p^2 e^{-\frac{\beta p^2}{2m_i}} = \frac{1}{4} \left[ \pi \left( \frac{2m_i}{\beta} \right)^3 \right]^{1/2}, \quad (5.67)$$

$$\int_0^\infty dp p^4 e^{-\frac{\beta p^2}{2m_i}} = \frac{3}{8} \left[ \pi \left( \frac{2m_i}{\beta} \right)^5 \right]^{1/2}, \quad (5.68)$$

$$\int_0^\infty dp p^6 e^{-\frac{\beta p^2}{2m_i}} = \frac{15}{16} \left[ \pi \left( \frac{2m_i}{\beta} \right)^7 \right]^{1/2}. \quad (5.69)$$

Agora, podemos encontrar a  $q$ -densidade de número de partículas. Após um pouco de álgebra, obtemos

$$n_i^{(0),q} = g_i \frac{(2\pi m_i k_B T)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} e^{-\frac{m_i c^2}{k_B T}} \left\{ 1 + \frac{(q-1)}{2} \left[ \frac{m_i^2 c^4}{k_B^2 T^2} + 3 \frac{m_i c^2}{k_B T} + \frac{15}{4} \right] \right\} .$$

O ponto positivo desse tratamento é que o limite é bem claro, quando  $q = 1$ , a densidade de número de partículas usual é recuperada. De posse dessa expressão, podemos estabelecer a equação de Saha não-extensiva de uma maneira matematicamente bem elegante. Levando em conta que  $m_H \approx m_p$ , a Eq. (5.2) torna-se

$$\frac{(X_e^q)^2}{1 - X_e^q} = \frac{(2\pi m_e k_B T)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{e^{-\frac{B}{k_B T}}}{n_b^q} \left\{ 1 + \frac{(q-1)}{2} \left[ \frac{m_e^2 c^4}{k_B^2 T^2} + 3 \frac{m_e c^2}{k_B T} + \frac{15}{4} \right] \right\} . \quad (5.70)$$

Essa é a equação de Saha não-extensiva. Para obter uma descrição completa, precisamos encontrar uma forma para  $q$ -densidade de bárions. Na referência [16], podemos encontrar a  $q$ -densidade fótons, de modo que incluindo todas as constantes fundamentais envolvidas, pode ser escrita como

$$n_\gamma^q = \frac{1}{\pi^2} \left( \frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3 [2\zeta(3) + (q-1)12,98] , \quad (5.71)$$

onde  $\zeta(s)$  é a função zeta de Riemann.

Tendo apresentado a  $q$ -densidade de fótons, podemos expressar a  $q$ -densidade de bárions pela definição de  $\eta_q$ . Portanto, temos que

$$n_b^{(0),q} = 6,1 \times 10^{-10} 8\pi \left( \frac{k_B T}{hc} \right)^3 [2\zeta(3) + (q-1)12,98] . \quad (5.72)$$

Finalmente, reunindo todas as expressões não-extensivas para a equação de Saha apresentados até aqui, podemos analisar graficamente os resultados para cada abordagem da equação de Saha não-extensiva. Os resultados e discussões serão apresentados na próxima Seção.

## 5.6 Resultados e Discussões

Os nossos resultados, obtidos numericamente, foram gerados com o auxílio de um código escrito em linguagem Fortran criado adequadamente para a descrição do período da recombinação primordial do hidrogênio. Como mencionamos no capítulo 4, vamos

considerar que a recombinação comece efetivamente quando 90% da matéria esteja ionizada, e que o fim da recombinação seja quando apenas 1% da matéria no Universo esteja ionizada, ou seja, 99% da matéria já se encontra na forma de hidrogênio neutro. Essa pequena fração ionizada no final da recombinação é essencial para a formação das primeiras moléculas de hidrogênio.

De acordo com Peebles, uma restrição física de grande importância para a descrição da recombinação é que a ionização residual ( $X_e$ ) não poderia ser menor do que  $10^{-4}$  [71]. Em outras palavras, o grau de ionização do Universo no final da recombinação deve ser maior que  $10^{-4}$ , isto é, devemos ter resultados em que  $X_e > 0,0001$ .

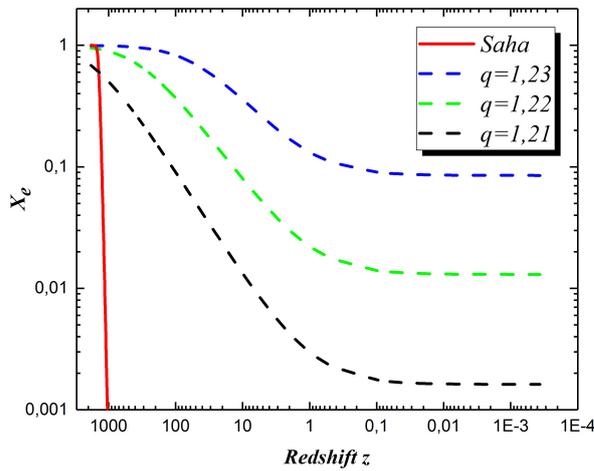
A aproximação de Saha é muito útil na descrição da recombinação somente em altos *redshifts* ( $z \sim 1481$ ), isto é, ela descreve bem o início da recombinação e até revela informações físicas do desacoplamento (quando  $X_e = 0,5$ ) da matéria e radiação (ver Tabela 4.1). Por outro lado, o grau de ionização vai a zero muito rápido quando, na verdade, espera-se um comportamento assintótico próximo de  $10^{-4}$ , de acordo com observações feitas por Peebles. Por essa razão, a abordagem de Saha não fornece uma descrição física satisfatória para a evolução do grau de ionização do Universo, visto que é necessário haver uma pequena fração de matéria ionizada remanescente da recombinação para a produção das primeiras moléculas de hidrogênio.

A expressão final para a equação de Saha não-extensiva dada pela Eq. (5.70), não mostrou um comportamento esperado para a ionização residual. Na verdade, o parâmetro  $q$  simplesmente move a curva para a esquerda e para a direita, mas não exibe um comportamento assintótico próximo de  $10^{-4}$ . Portanto, nesta Seção, não mostraremos os resultados gráficos para a equação de Saha não-extensiva da Seção 5.5.

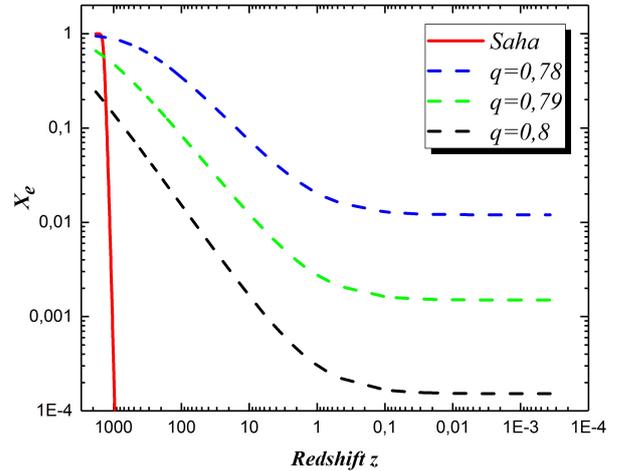
Inicialmente vamos apresentar os nossos resultados para a equação de Saha não-extensiva (ou  $q$ -Saha) comparados com os resultados da equação de Saha usual. Os resultados mostrados nas Figuras 5.1 e 5.2 estão de uma maneira que possamos observar os efeitos nas condições inicial e final da recombinação provocados pela variação do parâmetro  $q$ . Para efeito de análise, sem se preocupar efetivamente com a recombinação, procuramos os valores de  $q$  nos quais fosse possível notar a sua influência nos valores inicial e final do grau de ionização do Universo. Evidentemente os resultados das Figuras 5.1 e 5.2 nos mostram que o grau de ionização é muito sensível ao parâmetro  $q$ , principalmente

em altos *redshifts*. Nós também procuramos limitar o valor de  $q$ , de modo que os nossos resultados estivessem de acordo com as observações teóricas de Peebles. É notório que todas as curvas das figuras supracitadas exibem um comportamento assintótico próximo de  $10^{-4}$ . Esse é um ponto importante para a nossa abordagem, uma vez que a equação de Saha padrão não apresenta esse comportamento.

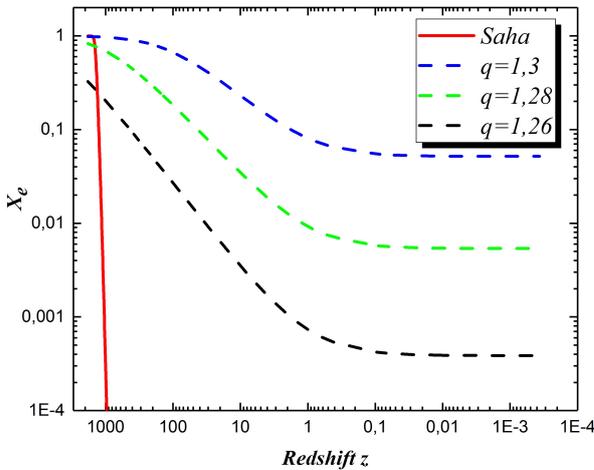
**Figura 5.1:** Saha *versus*  $q$ -Saha para diferentes valores de  $q$ . A curva em vermelho representa a equação de Saha padrão. As curvas em azul, verde e preto representam os resultados para  $q$ -Saha. Em (a) e (b) são mostrados os resultados obtidos usando o número de ocupação  $\mathcal{N}'_i^{(1)}$ . Já em (c) e (d) mostramos os resultados obtidos usando o número de ocupação  $\mathcal{N}'_i^{(2)}$ . Todas as curvas para  $q$ -Saha foram geradas usando a  $q$ -densidade de bárions dada pela Eq. (5.41).



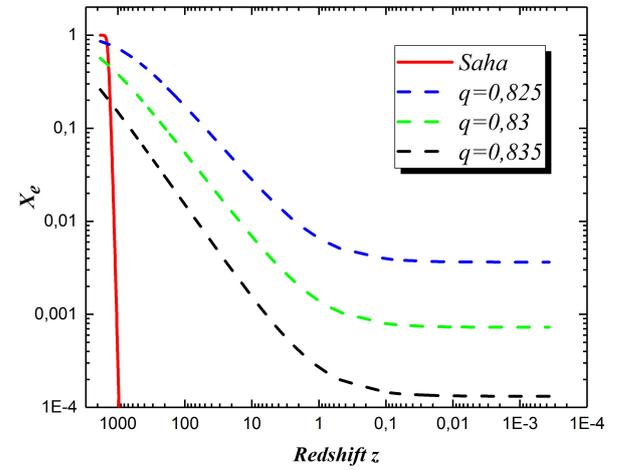
(a)



(b)



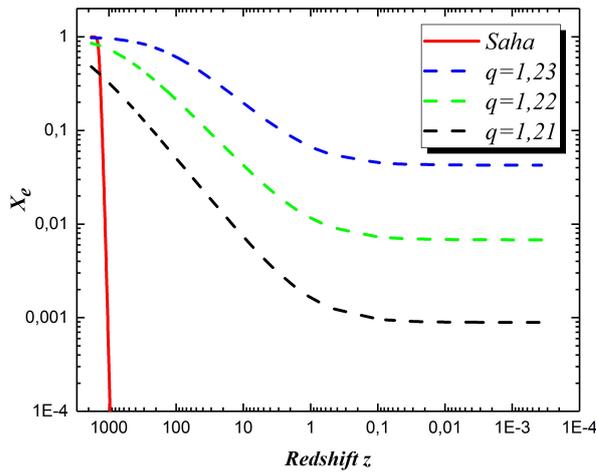
(c)



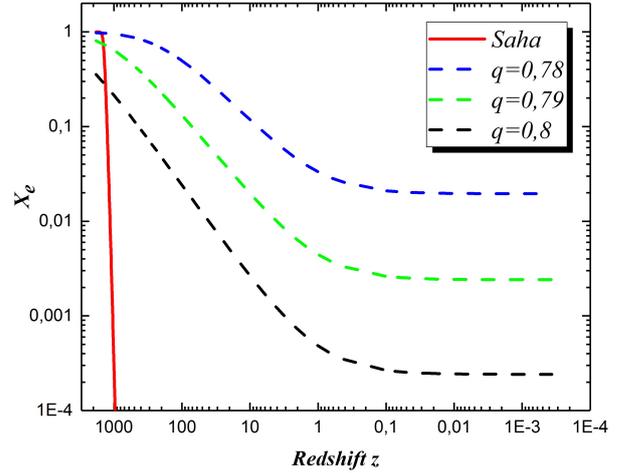
(d)

Fonte: Autor

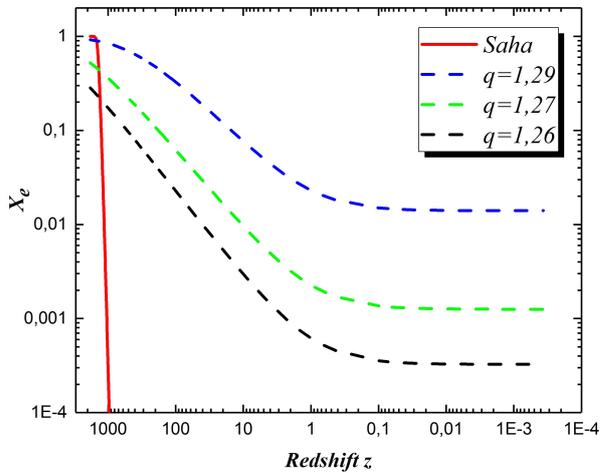
**Figura 5.2:** Saha versus  $q$ -Saha para diferentes valores de  $q$ . Em (e) e (f) são mostrados os resultados obtidos usando o número de ocupação  $\mathcal{N}_i'^{(1)}$ . Por outro lado, em (g) e (h) mostramos os resultados obtidos usando o número de ocupação  $\mathcal{N}_i'^{(2)}$ . Todas as curvas para  $q$ -Saha mostradas aqui, foram geradas usando a  $q$ -densidade de bárions obtida da Subseção 5.4.2.



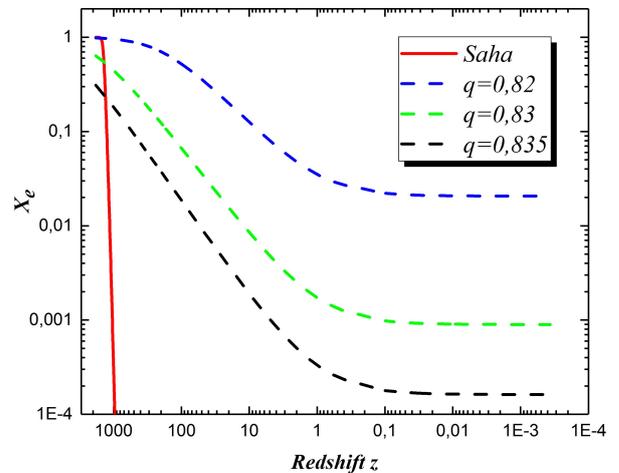
(e)



(f)



(g)



(h)

Fonte: Autor

Não conseguimos identificar os motivos pelos os quais as condições da recombinação (inicial e final) são muito sensíveis a leves variações do parâmetro  $q$ , principalmente a condição inicial, que *a priori* não esperávamos esse tipo de comportamento. Mais adiante, vamos apresentar os resultados que obtivemos para a abordagem não-extensiva da recombinação.

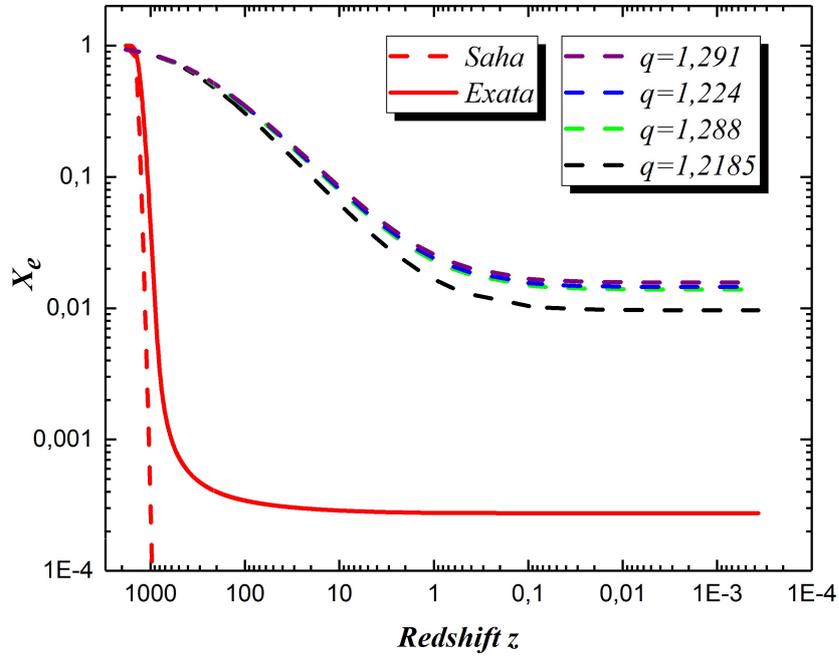
Para efeito de comparação, mostraremos os resultados da Figura 4.3 juntamente com os nossos resultados para a equação de Saha não-extensiva. Devido a alta sensibilidade das condições da recombinação ao parâmetro  $q$ , nós vamos prosseguir da seguinte maneira: devemos observar para quais valores de  $q$  é possível configurar  $X_e^q = 0,9$  exatamente quando a solução de Peebles tiver o mesmo valor. Em outras palavras, devemos encontrar os valores de  $q$  que possibilitem acontecer  $X_e^q \sim X_e = 0,9$ . Fazendo isso, podemos acompanhar a evolução do grau de ionização do Universo no início da recombinação, de modo que essa descrição comece juntamente com a curva teórica proposta por Peebles.

Os valores do parâmetro  $q$  que se mostraram mais adequados para satisfazer essas condições são mostrados na Figura 5.3. Em (i), as linhas em roxo e azul foram obtidas usando, respectivamente, os números de ocupação  $\mathcal{N}'_i^{(2)}$  e  $\mathcal{N}'_i^{(1)}$  (com a  $q$ -densidade de bárions obtida da Subseção 5.4.2). As linhas verde e preto foram obtidas usando, respectivamente, os números de ocupação  $\mathcal{N}'_i^{(2)}$  e  $\mathcal{N}'_i^{(1)}$  (com a  $q$ -densidade de bárions dada pela Eq. (5.41)). Já em (j), as linhas em roxo e verde foram obtidas usando a  $q$ -densidade de bárions dada pela Eq. (5.41) (com os números de ocupação  $\mathcal{N}'_i^{(1)}$  e  $\mathcal{N}'_i^{(2)}$ , respectivamente). As linhas azul e preto foram obtidas usando a  $q$ -densidade de bárions obtida da Subseção 5.4.2 (com os números de ocupação  $\mathcal{N}'_i^{(1)}$  e  $\mathcal{N}'_i^{(2)}$ , respectivamente).

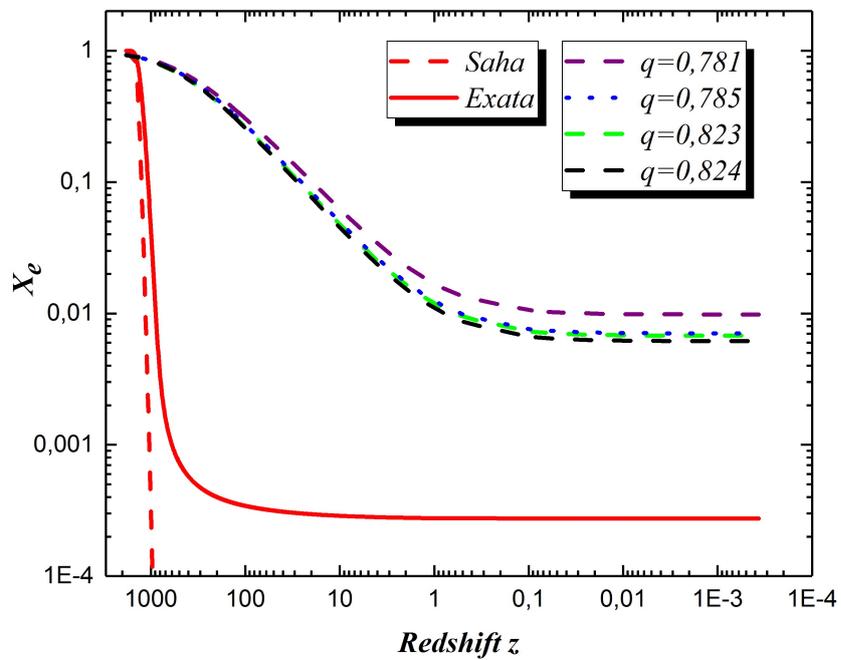
Para uma possível descrição da era da recombinação, buscamos os valores do parâmetro  $q$  ajustados a condição inicial  $X_e^q \sim X_e = 0,9$ , e os quais exibissem um comportamento assintótico o mais próximo possível de  $10^{-4}$  no final da recombinação.

A Figura 5.4 mostra o comportamento do grau de ionização no período da recombinação. A duração da recombinação em  $z$  é delimitada pela região cinza. Nota-se que o intervalo de duração da recombinação pela nossa abordagem ( $q$ -Saha) é bastante diferente do previsto pela abordagem de Peebles. Portanto, os resultados obtidos pela nossa abordagem não mostraram uma descrição plausível da evolução do grau de ionização no período da recombinação. Mas é importante evidenciar alguns aspectos sobre a comparação das abordagens Saha *versus*  $q$ -Saha. Um aspecto relevante é que a equação de Saha padrão, após o fim da recombinação, leva o grau de ionização a zero muito rapidamente, enquanto mostra resultados razoáveis no início da recombinação, como mencionamos anteriormente. Por outro lado, a nossa abordagem, no início da recombinação, começa até bem, mas rapidamente estende a duração da recombinação apresentando um comporta-

**Figura 5.3:** Comparação das curvas de Saha padrão, Peebles (exata) e  $q$ -Saha para valores de  $q$  que satisfazem  $X_e^q \sim X_e = 0,9$ . Em (i) mostramos os resultados para  $q > 1$ . Em (j) apresentamos os resultados para  $q < 1$ .



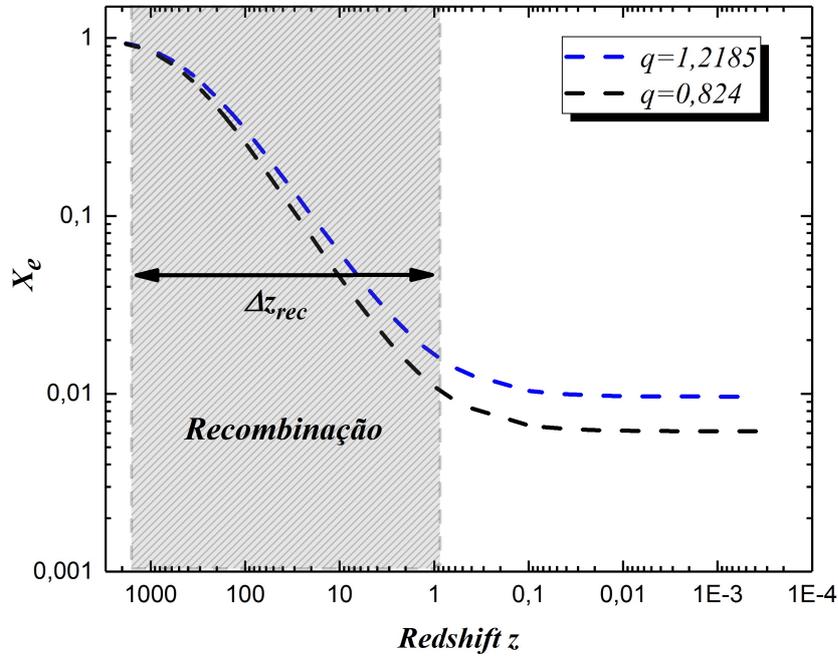
(i)



(j)

Fonte: Autor

**Figura 5.4:** Evolução do grau de ionização do Universo via  $q$ -Saha. A linha azul mostra a ionização residual usando o número de ocupação  $\mathcal{N}_i'^{(1)}$  (com a  $q$ -densidade de bárions dada pela Eq. (5.41)). A linha preta representa a ionização residual usando o número de ocupação  $\mathcal{N}_i'^{(2)}$  (com a  $q$ -densidade de bárions obtida da Subseção 5.4.2).



Fonte: Autor

mento linear em uma parte das curvas, suavizando apenas nas caudas. Contudo, os nossos resultados exibem uma característica importante: comportamento assintótico no final da curva ( $\sim 10^{-2}$ ), característica essa que a equação de Saha padrão não exhibe. Na Tabela 5.1 mostramos a comparação dos dados do período da recombinação para  $q$ -Saha, Saha usual e a solução exata de Peebles.

**Tabela 5.1:** Comparação dos dados da recombinação para Saha, Peebles (exata) e  $q$ -Saha. Os índices  $i$  e  $f$  representam o início e o fim da recombinação.  $z$  é o *redshift*,  $t$  é a idade do Universo,  $T$  a temperatura da radiação e  $\Delta z_{rec}$  e  $\Delta t_{rec}$  são, respectivamente, o intervalo de duração da recombinação em *redshift* e tempo. O *redshift* para o desacoplamento é designado por  $z_{dec}$ .

| Solução       | $z_i$  | $z_f$ | $z_{dec}$ | $t_i$<br>(Anos) | $t_f$<br>(Anos)    | $T_i$<br>(K) | $T_f$<br>(K) | $\Delta z_{rec}$ | $\Delta t_{rec}$<br>(Anos) |
|---------------|--------|-------|-----------|-----------------|--------------------|--------------|--------------|------------------|----------------------------|
| Saha          | 1481,6 | 1144  | 1378      | 311.170         | 458.499            | 4040         | 3120         | 337,6            | 147.329                    |
| Exata         | 1444,9 | 894,4 | 1269      | 320.000         | 670.000            | 3940         | 2440         | 550,5            | 350.000                    |
| $q = 1, 2185$ | 1423   | 0,1   | 230,5     | 330.615         | 12,4G <sup>6</sup> | 3880         | 3            | 1422,7           | 12,4G                      |
| $q = 0, 824$  | 1540,3 | 0,835 | 280,5     | 293.560         | 6,7G               | 4200         | 5            | 1539,46          | 6,7G                       |

Fonte: Autor

<sup>6</sup>Na tabela 5.1, definimos  $G = 10^9$ . Usamos dessa forma para a tabela não exceder as margens da página. Os valores com todas as casas decimais são:  $t_f = 12,4562 \times 10^9$  e  $\Delta t_{rec} = 12.455.869.385$  anos (quando  $q = 1, 2185$ );  $t_f = 6,71087 \times 10^9$  e  $\Delta t_{rec} = 6.710.576.440$  anos (quando  $q = 0, 824$ ).

# Capítulo 6

## Considerações Finais e Perspectivas

O Universo passou por várias fases térmicas durante o seu processo de evolução. Uma das mais importantes foi a fase em que ocorreu a recombinação primordial do hidrogênio. De acordo com as previsões teóricas, essa transição de fase durou aproximadamente 350 mil anos e foi marcada por processos físicos na interação exclusiva entre matéria e radiação. Na literatura, a descrição da recombinação é feita pela aproximação de Saha e pela abordagem de Peebles, nas quais o ponto inicial é a equação de Boltzmann para o processo de aniquilação de partículas [1].

Com advento da mecânica estatística não-extensiva de Tsallis em 1988 [15], uma ampla gama de aplicações foram feitas em Cosmologia, principalmente no sentido de estudar as propriedades da RCF e da recombinação, ver por exemplo [16, 33, 74]. Nesse sentido, esta dissertação consiste em aplicar as técnicas da estatística de Tsallis em Cosmologia, especialmente, no período da recombinação. Em nossa abordagem, nós escolhemos duas formas para o número de ocupação generalizado (ver (5.6) e (5.7)). Nós partimos da suposição de que fosse possível acompanhar a evolução do grau de ionização pela equação de Saha, impondo a  $q$ -densidade de número de partículas no equilíbrio, isto é, configurando  $\mu = 0$ . Desse modo, evitamos problemas com os potenciais químicos nas expressões finais, que surgem devido as propriedades da  $q$ -álgebra. Apresentamos quatro formas para a equação de Saha não-extensiva (ver (5.24), (5.27), (5.30) e (5.32)). Para essas expressões, determinamos a  $q$ -densidade de bárions de duas formas diferentes (ver Seção 5.4).

Em nossa abordagem, os resultados obtidos não mostraram uma descrição satis-

fatória da recombinação. A principal discrepância com os resultados da abordagem de Peebles é que os nossos resultados apresentam um período de recombinação muito grande, da ordem de  $10^9$  anos de duração. Além disso, percebemos que as condições inicial e final da recombinação são muito sensíveis ao parâmetro  $q$ , de modo que leves variações já mudam drasticamente essas condições. Por outro lado, evidenciamos alguns aspectos relevantes sobre a nossa abordagem:

- em altos *redshifts* consegue descrever o início da recombinação razoavelmente;
- exibe um comportamento assintótico próximo de  $10^{-2}$ , que está dentro do intervalo sugerido por Peebles para o final da recombinação ( $X_e > 10^{-4}$ ).

Esse comportamento assintótico no final da recombinação não aparece na equação de Saha padrão, o que torna a nossa abordagem relevante, nesse sentido.

A nossa perspectiva é realizar uma investigação mais profunda no sentido de compreender por quais motivos as condições da recombinação, em nossa abordagem, são muito sensíveis a leves alterações do parâmetro  $q$ , e tentar melhorar as curvas no intuito de uma descrição da recombinação semelhante a descrição apresentada por Peebles.

Não menos importante, faremos esforços na tentativa de procurar maneiras mais plausíveis do ponto de vista físico e matemático para o número de ocupação partindo de entropias generalizadas.

Outra perspectiva é incluir em nossa abordagem a ionização colisional introduzida por Defouw [65]. Para isso, seria interessante encontrar a sua versão generalizada para a estatística de Tsallis.

Além disso, tentaremos obter expressões para os potenciais químicos a partir da equação de Saha padrão. Em seguida, seria possível analisar a influência dos potenciais químicos na versão generalizada da equação de Saha.

Finalmente, pretendemos estudar o comportamento da equação de Saha no contexto da estatística de Kaniadakis e observar os efeitos do parâmetro  $\kappa$  no processamento da recombinação.

# Referências

- [1] DODELSON, S. **Modern cosmology**. Elsevier, 2003.
- [2] WEINBERG, S. **Cosmology**. Oxford University Press, 2008.
- [3] PEEBLES, P. J. E. **ApJ**, 153:55, 1970.
- [4] PENZIAS, A. A.; WILSON, R. W. A. *Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s*, **ApJ**, v. 142, p. 419-421, 1965.
- [5] GAMOW, G. *The evolution of the Universe*, **Nature**, v. 162, p. 680-682, 1948.
- [6] GAMOW, G. *Expanding Universe and the Origin of Elements*, **Phys. Rev**, v. 70, p. 572-573, 1946.
- [7] ALPHER, R. A.; BETHE, H.; GAMOW, G. *the Origin of Chemical Elements*, **Phys. Rev**, v. 73, p. 803-804, 1948.
- [8] ALPHER, R. A.; HERMAN, R. C. *Remarks on the Evolution of the Expanding Universe*, **Phys. Rev**, v. 75, p. 1089-1095, 1949.
- [9] ALPHER, R. A.; HERMAN, R. C. *On the relative Abundance of the Elements*, **Phys. Rev**, v. 74, p. 1737-1742, 1948.
- [10] ALPHER, R. A.; HERMAN, R. C. *Evolution of the Universe*, **Nature**, v. 162, p. 744-775, 1948.
- [11] FIXSEN, D. J. et al. *The Cosmic Microwave Background Spectrum from the Full COBE FIRAS Data Set*, **ApJ**, v. 473, p. 576-587, 1996.

- [12] SOUZA, H. T. C. M. **Evolução de Estruturas Primordiais**. 2007. Dissertação de Mestrado, UFRN, Natal (RN)-Brasil. Disponível em: <http://repositorio.ufrn.br:8080/jspui/handle/123456789/16663>. Acesso em: Dez. 2018.
- [13] SOUZA, H. T. C. M. **Evolução top-hat hidrodinâmica em campos de velocidades peculiares primordiais** – Tese de Doutorado, UFRN, Natal(RN)-Brasil, 2007. Disponível em: <http://repositorio.ufrn.br:8080/jspui/handle/123456789/16606>. Acesso em: Dez. 2018.
- [14] PEEBLES, P. J. E. **Principles of Physical Cosmology**. Princiton University Press, 1993.
- [15] TSALLIS, C. *Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics*, *Journal of Statistical Physics*. v. 52, p. 479-487, 1988.
- [16] PESSAH, M. E.; TORRES, D. F.; VUCETICH, H. Statistical mechanics and the description of the early universe.(I). Foundations for a slightly non-extensive cosmology. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 297, n. 1-2, p. 164-200, 2001.
- [17] J. E. HORVATH, et al. **Cosmologia física do micro ao macro cosmos e vice-versa**. São Paulo: Editora Livraria da Física. 2011.
- [18] LIDDLE, A. **An introduction to modern cosmology**. John Wiley & Sons, 2015.
- [19] SCHUTZ, B. **A first course in general relativity**. Cambridge university press, 2009.
- [20] RYDEN, B. **Introduction to cosmology**. Cambridge University Press, 2016.
- [21] HUBBLE, E. Proc. N. A. S., **15**:168, 1929.
- [22] TSALLIS, C. Nonextensive statistical mechanics and thermodynamics: Historical background and present status. In: **Nonextensive statistical mechanics and its applications**. Springer, Berlin, Heidelberg, 2001. p. 3-98.
- [23] FREITAS, D. B. et al. Nonextensive triplet in a geological faults system. **EPL (Europhysics Letters)**, v. 102, n. 3, p. 39001, 2013.

- [24] MAN'KO, V. I. et al. Metric on the space of quantum states from relative entropy. Tomographic reconstruction. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, v. 50, n. 33, p. 335302, 2017.
- [25] SUYARI, H.  $q$ -Stirling's formula in Tsallis statistics. **arXiv preprint cond-mat/0401541**, 2004.
- [26] JÁUREGUI, M. **q-generalização da representação da delta de Dirac em ondas planas e da transformada de Fourier inversa**. 2011. Dissertação de Mestrado, CBPF, Rio de Janeiro.
- [27] QUEIROS, S. M. D.; ANTENEODO, C.; TSALLIS, C. Power-law distributions in economics: a nonextensive statistical approach. In: **Noise and Fluctuations in Econophysics and Finance**. International Society for Optics and Photonics, 2005. p. 151-165.
- [28] FABBRI, R. et al. Multi- $q$  pattern classification of polarization curves. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 395, p. 332-339, 2014.
- [29] PLASTINO, A. R.; PLASTINO, A. *Stellar polytropes and Tsallis' entropy*, **PhLA**, v. 174, p. 384-386, 1993.
- [30] COHEN, E. G. D. *Statistics and dynamics*, **Physica A**, v. 305, p. 19-26, 2002.
- [31] BARANGER, M. *Why Tsallis statistics?*, **Physica A**, v. 305, p. 27-31, 2002.
- [32] LANDSBERG, P. T. **Thermodynamics and Statistical Mechanics**, Dover, 1990.
- [33] BERNUI, A.; TSALLIS, C.; VILLELA, T. *Temperature fluctuations of the cosmic microwave background radiation: A case of non-extensivity?*, **PhRvA**, v. 356, p. 426-430, 2006.
- [34] HANSEN, S. H. *Cluster temperatures and non-extensive thermo-statistics*, **New Astronomy**, v. 10, p. 371-377, 2005.
- [35] HANSEN, S. H. et al. *Dark matter distribution function from non-extensive statistical mechanics*, **New Astronomy**, v. 10, p. 379-384, 2005.

- [36] JIULIN, D. *Nonextensivity in nonequilibrium plasma systems with Coulombian long-range interactions*, **PhLA**, v. 329, p. 262-267, 2004.
- [37] JIULIN, D. *The nonextensive parameter and Tsallis distribution for self-gravitating systems*, **Europhys. Lett.**, v. 67, p. 893-899, 2004.
- [38] JIULIN, D. *The Chandrasekhar's condition of the equilibrium and stability for a star in the nonextensive kinetic theory*, **New Astronomy**, v. 12, p. 60-63, 2006.
- [39] TARUYA, A.; SAKAGAMI, M. *Long-Term Evolution of Stellar Self-Gravitating Systems Away from Thermal Equilibrium: Connection with Nonextensive Statistics*, **PhRvL**, v. 90, p. 181101, 2003.
- [40] BENTO, E. P. **Entropias generalizadas: vínculos termodinâmicos da Terceira Lei**. 2016. 97f. Tese (Doutorado em Física) - Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufrn.br/jspui/handle/123456789/24145>. Acesso em: Nov. 2018.
- [41] BENTO, E. P. **Fundamentação da estatística não-gaussiana: efeitos em politrópicas**. 2011. Dissertação de Mestrado, UFRN, Natal, (RN)-Brasil. Disponível em: <http://repositorio.ufrn.br:8080/jspui/handle/123456789/18595>. Acesso em: Dez. 2018.
- [42] MACEDO FILHO, A. **Conexão entre as Redes Complexas e a Estatística de Kaniadakis e busca eficiente das propriedades críticas do processo epidêmico difusivo 1D**. 2011. Tese de Doutorado, UFRN, Natal(RN)-Brasil. Disponível em: <http://repositorio.ufrn.br:8080/jspui/handle/123456789/16576>. Acesso em: Dez. 2018.
- [43] KANIADAKIS, G. **Non-linear kinetics underlying generalized statistics**, **Physica A**. v. 296, p. 405-425, 2001.
- [44] SOUZA, N. T. C. M. **Entropia de bloco no formalismo estatístico generalizado de Kaniadakis**. 2011. Dissertação de Mestrado, UFRN, Natal (RN)-Brasil. Disponível em: <http://repositorio.ufrn.br:8080/jspui/handle/123456789/18593>. Acesso em: Dez. 2018.

- 
- [45] MANDELBROT, B. B. **The fractal geometry of nature**. New York: WH freeman, 1982.
- [46] BECK, CHRISTIAN; SCHÖGL, FRIEDRICH. **Thermodynamics of chaotic systems: an introduction**. Cambridge University Press, 1995.
- [47] GOMES, M. et al. **Fractais Notas de Curso**, 45<sup>a</sup> SBPC 27<sup>a</sup> Reunião Anual da SBF, Recife, 1993.
- [48] TSALLIS, C. **Introduction to nonextensive statistical mechanics: approaching a complex world**. Springer Science & Business Media, 2009.
- [49] PATHRIA, R. K.; BEALE, P. D. **Statistical Mechanics**. Third Edition. Butterworth-Heinemann, 2011.
- [50] SALINAS, S. R. A. **Introdução a física estatística**. vol. 09. Edusp, 1997.
- [51] GREINER, W.; NEISE, L.; STÖCKER, H. **Thermodynamics and statistical mechanics**. Springer Science & Business Media, 2012.
- [52] REIF, F. **Fundamentals of statistical and thermal physics**. Waveland Press, 2009.
- [53] SILVA JUNIOR, R. **Teoria cinética não extensiva: efeitos físicos em gases e plasmas**. 2000. Tese de Doutorado, UFRN(RN)-Brasil, Natal. Disponível em: <https://repositorio.ufrn.br/jspui/handle/123456789/16589> Acesso em : Dez. 2018.
- [54] ALMEIDA, L. M. S. **Efeitos não-gaussianos em astrofísica e cosmologia**. 2007. Tese de Doutorado, UFRN(RN)-Brasil, Natal. Disponível em: <https://repositorio.ufrn.br/jspui/handle/123456789/16653> Acesso em : Dez. 2018.
- [55] TSALLIS, C. et al. Nonextensive statistical mechanics and economics. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 324, n. 1-2, p. 89-100, 2003.
- [56] RODRÍGUEZ, A.; TSALLIS, C. A dimension scale-invariant probabilistic model based on Leibniz-like pyramids. **Journal of Mathematical Physics**, v. 53, n. 2, p. 023302, 2012.

- [57] BAEZ, J. C.; FRITZ, T.; LEINSTER, T. A characterization of entropy in terms of information loss. **Entropy**, v. 13, n. 11, p. 1945-1957, 2011.
- [58] CURADO, E. M. F.; TSALLIS, C. **Generalized statistical mechanics: connection with thermodynamics**. Journal of Physics A: Mathematical and General, v. 24, n. 2, p. L69, 1991.
- [59] TSALLIS, C.; MENDES, R. S.; PLASTINO, A. R. **The role of constraints within generalized nonextensive statistics**. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, v. 261, n. 3-4, p. 534-554, 1998.
- [60] BORGES, E. P. **Manifestações dinâmicas e termodinâmicas de sistemas nao-extensivos**. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. Rio de Janeiro, 2004.
- [61] NELSON, K. P.; UMAROV, S. **The relationship between Tsallis statistics, the Fourier transform, and nonlinear coupling**. arXiv 2008. arXiv preprint arXiv:0811.3777.
- [62] NIVANEN, L.; LE MEHAUTE, A.; WANG, Q. A. Generalized algebra within a nonextensive statistics. **Reports on Mathematical Physics**, v. 52, n. 3, p. 437-444, 2003.
- [63] BORGES, E. P. A possible deformed algebra and calculus inspired in nonextensive thermostatics. Physica A: **Statistical Mechanics and its Applications**, v. 340, n. 1-3, p. 95-101, 2004.
- [64] MUKHANOV, V. **Physical foundations of cosmology**. Cambridge university press, 2005.
- [65] DEFOUW, R. J. Apj, **161**:55, 1970.
- [66] B. J. T. JONES and R. F. G. WYSE. **Astron. Astrophys**, **149**: 144, 1985.
- [67] SHEN, Ke-Ming; ZHANG, Ben-Wei; WANG, En-Ke. Generalized ensemble theory with non-extensive statistics. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 487, p. 215-224, 2017.

- 
- [68] BECK, C. Non-extensive statistical mechanics and particle spectra in elementary interactions. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 286, n. 1-2, p. 164-180, 2000.
- [69] PAULA, R. M. **Novos limites para o parâmetro de Tsallis em um espaço de fases não comutativo, gravidade entrópica e equações de Friedmann não extensivas**. 2016. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Juiz de Fora.
- [70] SALES, L. L.; SILVA, J. A.; BENTO, E. P. An alternative method for solving the Gaussian integral. **arXiv preprint arXiv:1811.03957**, 2018.
- [71] PEEBLES, P. J. E.; PAGE JR, L. A.; PARTRIDGE, R. B. **Finding the big bang**. Cambridge University Press, 2009.
- [72] ARFKEN, G.; WEBER, H. H. **Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física**. Elsevier, 2007.
- [73] RILEY, K. F.; HOBSON, M. P.; BENCE, S. J. Mathematical Methods for Physics and Engineering Third Edition Paperback Set. **Mathematical Methods for Physics and Engineering-3rd Edition**, by KF Riley, MP Hobson and SJ Bence, pp. 1362. Cambridge University Press, March 2006. ISBN-10: 0521861535. ISBN-13: 9780521861533, p. 1362, 2006.
- [74] SOARES, B. B. et al. Non-Gaussian thermostistical considerations upon the Saha equation. **arXiv preprint arXiv:1901.01839**, 2018.

# Apêndice A

## Alguns Limites Relevantes na Estatística de Tsallis

Neste apêndice mostraremos alguns limites importantes no contexto da estatística de Tsallis. Pretendemos mostrar em detalhes todos os cálculos. Primeiramente vamos começar mostrando o limite da  $q$ -exponencial. Considere a definição:

$$\exp_q(x) \equiv [1 + (1 - q)x]^{\frac{1}{1-q}} . \quad (\text{A.1})$$

O limite para  $q \rightarrow 0$  é imediato, cujo resultado é  $\lim_{q \rightarrow 0} \exp_q(x) = 1 + x$ . No limite quando  $q = 1$  e  $q = \infty$ , temos  $\exp_1(x) = \exp(x)$  e  $\exp_\infty(x) = 1$ , respectivamente.

*Demonstração.* Lembrando que para resolvermos o limite de funções do tipo lei de potência, precisamos recorrer a algumas técnicas de resolução. Uma maneira de resolver indeterminações do tipo  $1^\infty$  é reescrever a função  $f(x)$  como  $e^{\ln[f(x)]}$ . Temos que

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 1} \exp_q(x) &= \lim_{q \rightarrow 1} [1 + (1 - q)x]^{\frac{1}{1-q}} , \\ &= \lim_{q \rightarrow 1} \exp\{\ln[1 + (1 - q)x]^{\frac{1}{1-q}}\} , \\ &= \exp\left\{ \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\ln[1 + (1 - q)x]}{1 - q} \right\} . \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Aplicando a regra de l'Hôpital<sup>1</sup> no argumento da exponencial, temos

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{\ln[1 + (1 - q)x]}{1 - q} \stackrel{L}{=} \lim_{q \rightarrow 1} \frac{x}{1 + (1 - q)x} = x, \quad (\text{A.3})$$

onde  $\stackrel{L}{=}$  indica que aplicamos a regra de l'Hôpital (De agora em diante vamos usar isso quando aplicarmos essa regra). Portanto, obtemos

$$\lim_{q \rightarrow 1} \exp_q(x) = \exp(x). \quad (\text{A.4})$$

Tendo feito isso, o procedimento para calcular o limite quando  $q = \infty$  é o mesmo, de modo que teremos

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\ln[1 + (1 - q)x]}{1 - q} \stackrel{L}{=} \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + (1 - q)x} = 0, \quad (\text{A.5})$$

Sendo assim, temos

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \exp_q(x) = 1. \quad (\text{A.6})$$

□

Agora, vamos mostrar o limite quando  $q = 1$  para a função  $q$ -logaritmo. Considere a definição:

$$\ln_q(x) \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q}. \quad (\text{A.7})$$

Nesse caso, quando  $q \rightarrow 1$ , temos  $\ln_1(x) = \ln(x)$ .

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 1} \ln_q(x) &= \lim_{q \rightarrow 1} \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q}, \\ &= \lim_{q \rightarrow 1} \frac{e^{(1-q)\ln(x)} - 1}{1 - q}, \\ &\stackrel{L}{=} \lim_{q \rightarrow 1} \ln(x) e^{(1-q)\ln(x)}, \\ &= \ln(x). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

□

---

<sup>1</sup>A regra de l'Hôpital é útil para calcular o limite de frações com indeterminações do tipo  $\frac{0}{0}$  ou  $\frac{\infty}{\infty}$ . A regra diz que o limite de frações dessa natureza é igual ao limite da derivada do numerador pela derivada do denominador. Para mais informações acesse o sítio [https://pt.wikipedia.org/wiki/Regra\\_de\\_l'H%C3%B4pital](https://pt.wikipedia.org/wiki/Regra_de_l'H%C3%B4pital).

Um outro limite relevante na teoria de Tsallis é o da entropia generalizada. A expressão para essa entropia é

$$S_q = \frac{k_B}{q-1} \left( 1 - \sum_{i=1}^{\Omega} p_i^q \right), \quad (\text{A.9})$$

de modo que

$$S_1 = -k_B \sum_i p_i \ln(p_i). \quad (\text{A.10})$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 1} S_q &= \lim_{q \rightarrow 1} \frac{k_B}{q-1} \left( 1 - \sum_{i=1}^{\Omega} p_i^q \right), \\ &= \lim_{q \rightarrow 1} \frac{k_B}{q-1} \left( 1 - \sum_{i=1}^{\Omega} e^{q \ln(p_i)} \right), \\ &\stackrel{L}{=} \lim_{q \rightarrow 1} -k_B \sum_{i=1}^{\Omega} e^{q \ln(p_i)} \ln(p_i), \\ &= -k_B \sum_i p_i \ln(p_i). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

□

# Apêndice B

## Soluções Analíticas de Integrais Úteis

Neste apêndice vamos apresentar as resoluções analíticas detalhadas para as integrais que surgem na determinação da  $q$ -densidade de número de partículas ao longo do capítulo 4 desta dissertação. Além disso, vamos resolver as integrais que aparecem na determinação da densidade bárions generalizada.

### Integrais da Subseção 5.2.1

A primeira integral que aparece é dada pela Eq. (5.10):

$$\int_0^a dp p^2 [1 + (q - 1)\gamma p^2]^{\frac{1}{1-q}}, \quad (\text{B.1})$$

onde

$$a = \begin{cases} \infty, & q > 1 \\ [(1 - q)\gamma]^{-1/2}, & q < 1. \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

No contexto da estatística de Tsallis, esse tipo de integral é comumente chamada de  $q$ -Gaussiana. Geralmente as restrições contidas em  $a$  depende do sistema físico investigado.

A seguir mostramos a resolução para os cenários  $q > 1$  e  $q < 1$ .

- Para o regime  $q > 1$

A integral (B.1) torna-se

$$\int_0^{\infty} dp p^2 [1 + (q-1)\gamma p^2]^{\frac{1}{1-q}} . \quad (\text{B.3})$$

Fazendo a seguinte substituição:  $u = (q-1)\gamma p^2$ , temos que

$$p^2 dp = \frac{p du}{2\gamma(q-1)} . \quad (\text{B.4})$$

Por outro lado, temos

$$p = \frac{u^{1/2}}{\sqrt{\gamma(q-1)}} . \quad (\text{B.5})$$

Substituindo (B.5) no lado direito de (B.4), obtemos

$$p^2 dp = \frac{u^{1/2} du}{2[\gamma(q-1)]^{3/2}} . \quad (\text{B.6})$$

Assim, a integral (B.3) torna-se

$$\int_0^{\infty} dp p^2 [1 + (q-1)\gamma p^2]^{\frac{1}{1-q}} = \frac{1}{2[\gamma(q-1)]^{3/2}} \int_0^{\infty} \frac{u^{1/2}}{(1+u)^{\frac{1}{q-1}}} du . \quad (\text{B.7})$$

A função Beta, cuja solução pode ser expressa em termos da função Gama, constitui uma ferramenta muito poderosa na resolução de integrais complicadas. A definição da função Beta é dada por

$$B(z, w) = \int_0^{\infty} \frac{x^{z-1}}{(1+x)^{z+w}} dx = \int_0^1 x^{z-1} (1-x)^{w-1} dx = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} , \quad (\text{B.8})$$

onde a função Gama é definida como

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} y^{t-1} e^{-y} dy . \quad (\text{B.9})$$

Para uma revisão mais detalhada sobre essas funções especiais, o leitor interessado pode consultar as referências [72, 73].

Retornando para a integral (B.7), e usando a definição da função Beta, temos as seguintes substituições:

$$u = x, \quad z-1 = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad z+w = \frac{1}{q-1} .$$

Então, obtemos

$$z = \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad w = \frac{5-3q}{2(q-1)} .$$

Logo, temos que

$$\int_0^\infty \frac{u^{1/2}}{(1+u)^{\frac{1}{q-1}}} du = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{5-3q}{2(q-1)})}{\Gamma(\frac{1}{q-1})}. \quad (\text{B.10})$$

Mas,

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \int_0^\infty y^{1/2} e^{-y} dy.$$

Tomando  $y = r^2$ , podemos escrever

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \int_{-\infty}^\infty r^2 e^{-r^2} dr = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}. \quad (\text{B.11})$$

Assim, a equação (B.10) torna-se

$$\int_0^\infty \frac{u^{1/2}}{(1+u)^{\frac{1}{q-1}}} du = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{5-3q}{2(q-1)})}{\Gamma(\frac{1}{q-1})} \sqrt{\pi}. \quad (\text{B.12})$$

Portanto, enfim, a integral (B.7) fica:

$$\int_0^\infty dpp^2 [1 + (q-1)\gamma p^2]^{\frac{1}{1-q}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4[\gamma(q-1)]^{3/2}} \frac{\Gamma(\frac{5-3q}{2(q-1)})}{\Gamma(\frac{1}{q-1})}. \quad (\text{B.13})$$

Note que a função Gama do numerador impõe a condição para não haver divergência,  $q \neq 5/3$ . Isso limita superiormente o parâmetro  $q$ , de modo que o intervalo de validade fica:  $1 < q < 5/3$ .

- Para o regime  $q < 1$

Nesse regime, a integral (B.1) pode ser escrita como

$$\int_0^{[(1-q)\gamma]^{-1/2}} dpp^2 [1 - (1-q)\gamma p^2]^{\frac{1}{1-q}}. \quad (\text{B.14})$$

Seguindo os mesmos procedimentos anteriores, fazendo a seguinte substituição:  $u = (1-q)\gamma p^2$ , podemos facilmente expressar

$$p^2 dp = \frac{u^{1/2} du}{2[\gamma(1-q)]^{3/2}}. \quad (\text{B.15})$$

Assim, a integral (B.14) torna-se

$$\int_0^{[(1-q)\gamma]^{-1/2}} dpp^2 [1 - (1-q)\gamma p^2]^{\frac{1}{1-q}} = \frac{1}{2[\gamma(1-q)]^{3/2}} \int_0^1 u^{1/2} (1-u)^{\frac{1}{1-q}} du. \quad (\text{B.16})$$

Usando a função Beta, teremos as seguintes substituições:

$$u = x, \quad z = \frac{3}{2}, \quad w = \frac{2-q}{1-q} \quad \text{e} \quad z + w = \frac{7-5q}{2(1-q)}.$$

Então, a integral do lado direito de (B.16) fica:

$$\int_0^1 u^{1/2} (1-u)^{\frac{1}{1-q}} du = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q}\right)}{\Gamma\left(\frac{7-5q}{2(1-q)}\right)} \sqrt{\pi}. \quad (\text{B.17})$$

Enfim, a integral (B.16) torna-se

$$\int_0^{[(1-q)\gamma]^{-1/2}} dpp^2 \left[1 - (1-q)\gamma p^2\right]^{\frac{1}{1-q}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4[\gamma(1-q)]^{3/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q}\right)}{\Gamma\left(\frac{7-5q}{2(1-q)}\right)}. \quad (\text{B.18})$$

## Integrais da Subseção 5.2.2

A próxima integral a ser resolvida é dada pela Eq. (5.15):

$$\int_0^a dpp^2 \left[1 + (q-1)\gamma p^2\right]^{\frac{q}{1-q}}, \quad (\text{B.19})$$

onde  $a$  é dado pela Eq. (B.2).

Os passos realizados aqui serão os mesmos da Seção anterior, portanto, vamos analisar de forma resumida os cenários  $q > 1$  e  $q < 1$ .

- Para o regime  $q > 1$

Imediatamente, temos que

$$\int_0^\infty dpp^2 \left[1 + (q-1)\gamma p^2\right]^{\frac{q}{1-q}} = \frac{1}{2[\gamma(q-1)]^{3/2}} \int_0^\infty \frac{u^{1/2}}{(1+u)^{\frac{q}{q-1}}} du. \quad (\text{B.20})$$

Usando a definição da função Beta, temos as seguintes substituições:

$$u = x, \quad z = \frac{3}{2}, \quad z + w = \frac{q}{q-1} \quad \text{e} \quad w = \frac{3-q}{2(q-1)}.$$

Consequentemente, teremos

$$\int_0^\infty \frac{u^{1/2}}{(1+u)^{\frac{q}{q-1}}} du = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{q-1}\right)} \sqrt{\pi}. \quad (\text{B.21})$$

Logo,

$$\int_0^\infty dpp^2 \left[1 + (q-1)\gamma p^2\right]^{\frac{q}{1-q}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4[\gamma(q-1)]^{3/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{q-1}\right)}. \quad (\text{B.22})$$

A função Gama do numerador impõe a condição  $q \neq 3$ , restringindo o intervalo de validade para  $1 < q < 3$ .

- Para o regime  $q < 1$

Neste regime, temos que

$$\int_0^{[(1-q)\gamma]^{-1/2}} dpp^2 [1 - (1-q)\gamma p^2]^{\frac{q}{1-q}} . \quad (\text{B.23})$$

Facilmente, podemos escrever

$$\int_0^{[(1-q)\gamma]^{-1/2}} dpp^2 [1 - (1-q)\gamma p^2]^{\frac{q}{1-q}} = \frac{1}{2[\gamma(1-q)]^{3/2}} \int_0^1 u^{1/2}(1-u)^{\frac{q}{1-q}} du . \quad (\text{B.24})$$

Recorrendo a definição da função Beta, temos as seguintes substituições:

$$u = x, \quad z = \frac{3}{2}, \quad z + w = \frac{5 - 3q}{2(1-q)} \quad \text{e} \quad w = \frac{1}{1-q} .$$

Então, chegamos ao seguinte resultado:

$$\int_0^1 u^{1/2}(1-u)^{\frac{q}{1-q}} du = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right)}{\Gamma\left(\frac{5-3q}{2(1-q)}\right)} \sqrt{\pi} . \quad (\text{B.25})$$

Portanto,

$$\int_0^{[(1-q)\gamma]^{-1/2}} dpp^2 [1 - (1-q)\gamma p^2]^{\frac{q}{1-q}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4[\gamma(1-q)]^{3/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right)}{\Gamma\left(\frac{5-3q}{2(1-q)}\right)} . \quad (\text{B.26})$$

## Integrais da Subseção 5.4.2

Primeiramente vamos resolver a seguinte integral (ver Eq. (5.45)):

$$\int_0^b dpp^2 [1 - (1-q)\alpha p]^{\frac{1}{1-q}} , \quad (\text{B.27})$$

em que

$$b = \begin{cases} \infty, & q > 1 \\ \frac{1}{(1-q)\alpha}, & q < 1 . \end{cases} \quad (\text{B.28})$$

Vamos analisar diretamente os casos  $q > 1$  e  $q < 1$ .

- Para o regime  $q > 1$

Para esse regime, a integral (B.27) fica:

$$\int_0^\infty dp p^2 [1 + (q-1)\alpha p]^{\frac{1}{1-q}} . \quad (\text{B.29})$$

Fazendo a seguinte substituição:  $u = (q-1)\alpha p$ , teremos

$$p^2 dp = \frac{u^2 du}{[(q-1)\alpha]^3} . \quad (\text{B.30})$$

Com isso, temos que

$$\int_0^\infty dp p^2 [1 + (q-1)\alpha p]^{\frac{1}{1-q}} = \frac{1}{[(q-1)\alpha]^3} \int_0^\infty \frac{u^2}{(1+u)^{\frac{1}{q-1}}} du . \quad (\text{B.31})$$

Novamente usando a definição da função Beta, podemos escrever as seguintes substituições:

$$u = x, \quad z = 3, \quad z + w = \frac{1}{q-1} \quad \text{e} \quad w = \frac{4-3q}{q-1} .$$

Com essas informações, podemos escrever

$$\int_0^\infty \frac{u^2}{(1+u)^{\frac{1}{q-1}}} du = \frac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{4-3q}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)} . \quad (\text{B.32})$$

Mas, usando a relação  $\Gamma(t) = (t-1)!$ , temos que  $\Gamma(3) = 2$ . Portanto, a Eq. (B.31) fica:

$$\int_0^\infty dp p^2 [1 + (q-1)\alpha p]^{\frac{1}{1-q}} = \frac{2}{[(q-1)\alpha]^3} \frac{\Gamma\left(\frac{4-3q}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)} . \quad (\text{B.33})$$

O intervalo de validade é  $1 < q < 4/3$ .

- Para o regime  $q < 1$

Neste regime, (B.27) pode ser escrita como

$$\int_0^{\frac{1}{(1-q)\alpha}} dp p^2 [1 - (1-q)\alpha p]^{\frac{1}{1-q}} . \quad (\text{B.34})$$

Fazendo a seguinte substituição:  $u = (1-q)\alpha p$ , imediatamente podemos escrever

$$p^2 dp = \frac{u^2 du}{[(1-q)\alpha]^3} . \quad (\text{B.35})$$

Assim, teremos

$$\int_0^{\frac{1}{(1-q)\alpha}} dp p^2 [1 - (1-q)\alpha p]^{\frac{1}{1-q}} = \frac{1}{[(1-q)\alpha]^3} \int_0^1 u^2 (1-u)^{\frac{1}{1-q}} du . \quad (\text{B.36})$$

Com a definição da função Beta, temos as seguintes substituições:

$$u = x, \quad z = 3, \quad z + w = \frac{5 - 4q}{1 - q} \quad \text{e} \quad w = \frac{2 - q}{1 - q}.$$

O resultado final é

$$\int_0^{\frac{1}{(1-q)\alpha}} dpp^2 [1 - (1 - q)\alpha p]^{\frac{1}{1-q}} = \frac{2}{[(1 - q)\alpha]^3} \frac{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q}\right)}{\Gamma\left(\frac{5-4q}{1-q}\right)}. \quad (\text{B.37})$$

Agora, nós vamos resolver a integral dada pela Eq. (5.52):

$$\int_0^b dpp^2 [1 - (1 - q)\alpha p]^{\frac{q}{1-q}}, \quad (\text{B.38})$$

onde  $b$  é dado pela Eq. (B.28).

- Para o regime  $q > 1$

Neste cenário, a integral (B.38) torna-se

$$\int_0^\infty dpp^2 [1 + (q - 1)\alpha p]^{\frac{q}{1-q}}. \quad (\text{B.39})$$

Procedendo com a substituição  $u = (q - 1)\alpha p$ , é fácil chegar ao seguinte resultado:

$$\int_0^\infty dpp^2 [1 + (q - 1)\alpha p]^{\frac{1}{1-q}} = \frac{1}{[(q - 1)\alpha]^3} \int_0^\infty \frac{u^2}{(1 + u)^{\frac{q}{q-1}}} du. \quad (\text{B.40})$$

As substituições de acordo com a definição da função Beta são:

$$u = x, \quad z = 3, \quad z + w = \frac{q}{q - 1} \quad \text{e} \quad w = \frac{3 - 2q}{q - 1}.$$

Com essas informações, podemos expressar facilmente o resultado final,

$$\int_0^\infty dpp^2 [1 + (q - 1)\alpha p]^{\frac{q}{1-q}} = \frac{2}{[(q - 1)\alpha]^3} \frac{\Gamma\left(\frac{3-2q}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{q-1}\right)}. \quad (\text{B.41})$$

- Para o regime  $q < 1$

Para este regime, a expressão (B.38) fica:

$$\int_0^{\frac{1}{(1-q)\alpha}} dpp^2 [1 - (1 - q)\alpha p]^{\frac{q}{1-q}}. \quad (\text{B.42})$$

Fazendo a seguinte substituição:  $u = (1 - q)\alpha p$ , é fácil ver que

$$\int_0^{\frac{1}{(1-q)\alpha}} dpp^2 [1 - (1 - q)\alpha p]^{\frac{q}{1-q}} = \frac{1}{[(1 - q)\alpha]^3} \int_0^1 u^2 (1 - u)^{\frac{q}{1-q}} du . \quad (\text{B.43})$$

De acordo com a definição da função Beta, teremos as seguintes substituições:

$$u = x, \quad z = 3, \quad z + w = \frac{4 - 3q}{1 - q} \text{ e } w = \frac{1}{1 - q} .$$

Portanto, finalmente, teremos

$$\int_0^{\frac{1}{(1-q)\alpha}} dpp^2 [1 - (1 - q)\alpha p]^{\frac{q}{1-q}} = \frac{2}{[(1 - q)\alpha]^3} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right)}{\Gamma\left(\frac{4-3q}{1-q}\right)} . \quad (\text{B.44})$$